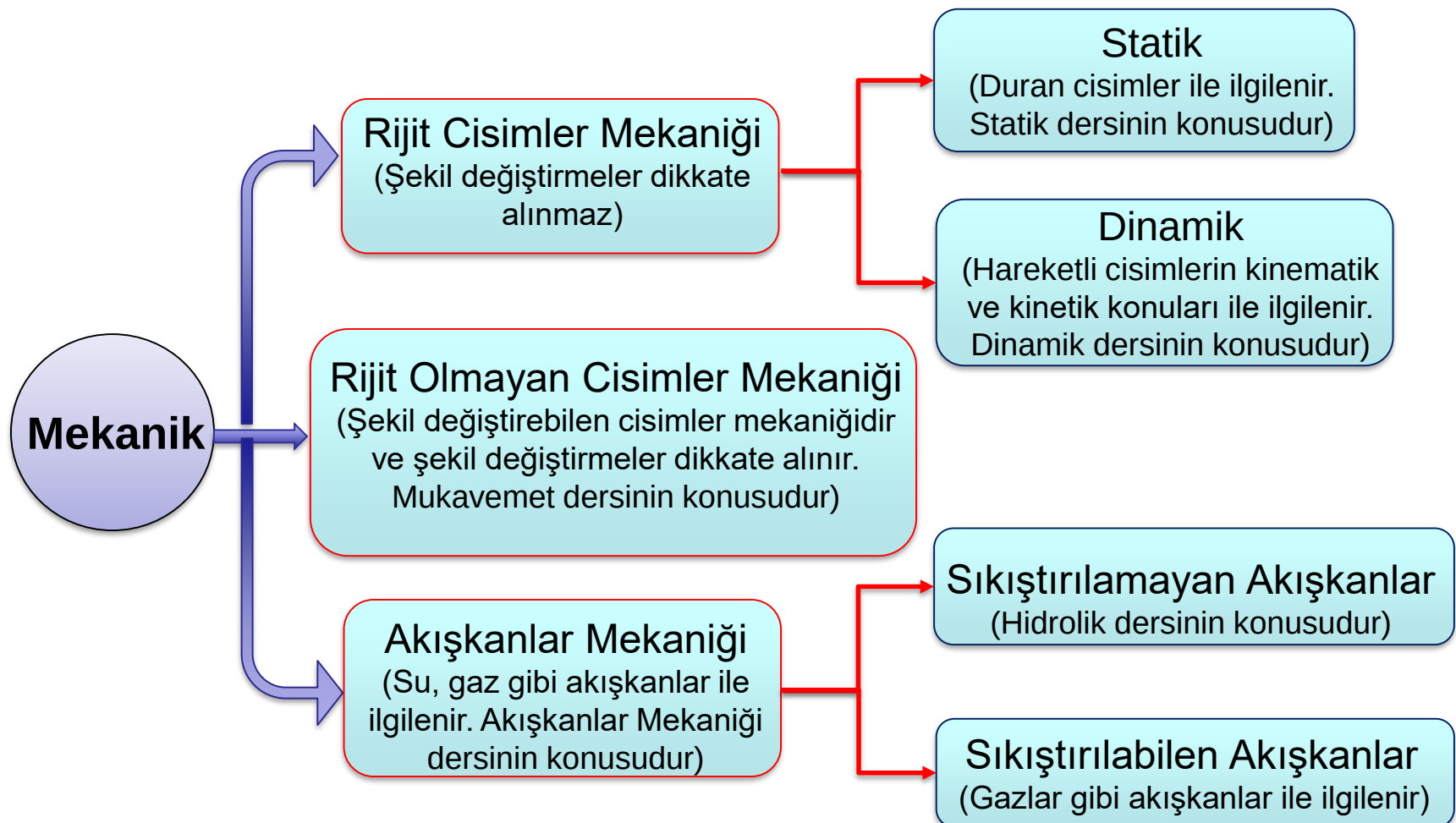


Engineering Mechanics: Statics in SI Units, 12e

1

Genel Prensipler

1.1 Mekanik (Mechanics)



1.1 Mekanik (d'm)

Rijit Cisimler Mekaniği diğer alanların temelidir. Yapıların analiz ve dizaynında çok sıklıkla kullanılmaktadır. Rijit Cisimler Mekaniği aşağıdaki şemada görüldüğü gibi iki alt dala ayrılmaktadır. Biz bu ders kapsamında Statik alt dalı ile ilgileneceğiz.



1.1 Mekanik (d'm)

- **Mekanik:** Fizik biliminin, cisimlerin dış yükler altındaki davranışlarını inceleyen dalıdır. Üç alt dala ayrılır (Bknz. Şema).
- **Rijit Cisim:** Kuvvet etkisi ile şeklinde bir değişiklik olmayan teorik cisimdir. Gerçekte katı haldeki tüm cisimlerde dış kuvvetler etkisiyle az-çok şekil değişikliği olur. Ancak statik ve dinamik bilimlerinde gerçek katı cisimler de rijit kabul edilmektedir.
- **Statik:** Dış yüklere maruz kalmasına rağmen durağan halde dengede olan cisimlerin davranışlarını inceler. Örneğin oturduğumuz sıra, masa vb. gibi. Statikte genel amaç cisme etki eden dış kuvvetlerin belirlenmesidir.

1.1 Mekanik (d'm)

- **Mukavemet:** Dış yüklerin etkisine maruz, genelde statik (durağan) halde olan, şekil değiştirebilen katı cisimlerin ve sistemlerin davranışlarını inceler. Dış yükler statikteki denklemlerden hesaplandıktan sonra, bu dış yüklere sistemin dayanıp dayanamayacağını veya dayanması için boyutlarının ya da malzemesinin ne olması gerektiği sorularına cevap aranır. Mühendislik açısından bu çok önemli sorulara cevabı ise ancak Mukavemet bilimi vermektedir.
- **Dinamik:** Hareket halindeki katı cisimlerin davranışlarını inceleyen mekanik biliminin bir alt dalıdır.

1.1 Mekanik (d'm)

Statik dersi gerçek hayatta ne işe yarar?

Bu sorunun cevabını bir örnekle anlamaya çalışalım:

- Çalıştığınız kurum, şekildeki gibi bir hamak imal etmek istemektedir.
- Ar-Ge mühendisi olarak sizden hamakta kullanılacak iplerin emniyetli çapını (**d**) belirlemenizi istemiştir.



1.1 Mekanik (d'm)

Statik dersi gerçek hayatta ne işe yarar? (d'm)

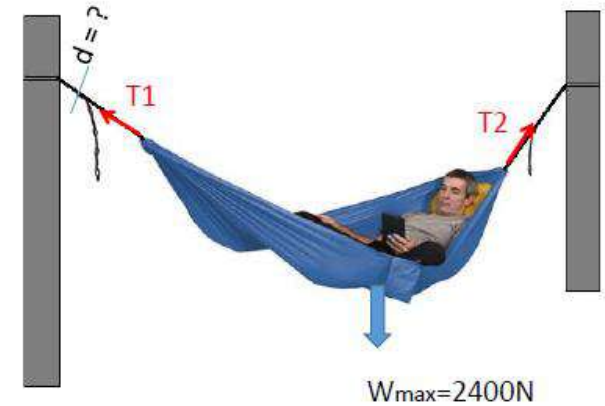
Siz de şu şekilde düşünüyorsunuz:

- Hamak maksimum 120 kg'lık bir kişiyi taşısin.
- Ancak, 2 katı emniyetli olacak şekilde tasarlamak istiyorsunuz. Yani durağan halde hamak maksimum 240 kg (yaklaşık 2400 N)'luk bir yükü taşıması gerekecektir.
- Şunu unutmayalım; ip kuvvetleri bilinmeden emniyetli çap (**d**) hesaplanamaz.

1.1 Mekanik (d'm)

Statik dersi gerçek hayatta ne iŖe yarar? (d'm)

- O halde; ilk adım iplere gelen kuvvetleri (T_1, T_2) bulmaktır (Statik bilgilerinden).
- İkinci adım ise ipin emniyetli çapını (d) hesaplamaktır (Mukavemet bilgilerinden).



- Görüldüğü gibi Statik ve Mukavemet birbirlerini tamamlayan iki derstir.
- Mukavemet dersinde doğrudan gerçek hayata uygulanabilen boyut hesabı (d çapının belirlenmesi gibi) yapılır ki bu hesaplamalar mühendislerden beklenmektedir.
- Ancak boyutu hesaplamadan önce kuvvetlerin bilinmesi gerekir. Bu ise Statik dersinin temel konusudur.

1.2 Temel Kavramlar (Fundamentals Concepts)

Statikte sıkça karşımıza çıkacak kavramlar şunlardır:

1. **Uzunluk (Length):** Bir noktanın uzaydaki yerini belirtmek ve cisimlerin büyüklüğünü tanımlamak için kullanılan büyüklüktür.
2. **Kütle (Mass):** Madde miktarının ölçüsüdür. Ayrıca, cismin hız değişimine gösterdiği direncin (ataletin) bir ölçüsüdür.
3. **Zaman (Time):** Olaylar arasında öncelik-sonralık ilişkisi kuran ve dördüncü boyut olarak bilinen büyüklüktür. Statikte değil, ancak dinamik problemlerinde kullanılır.
4. **Force:** Bir cismin diğer bir cisme etki ettirdiği «itme» ya da «çekme» etkisidir.

1.2 Temel Kavramlar (d'm)

İdealleştirmeler (Idealizations)

- Mekanikte karşılaşılan problemleri daha kolay çözebilmek için yapılan bir işlemdir. Burada üç önemli idealleştirme yapılacaktır:



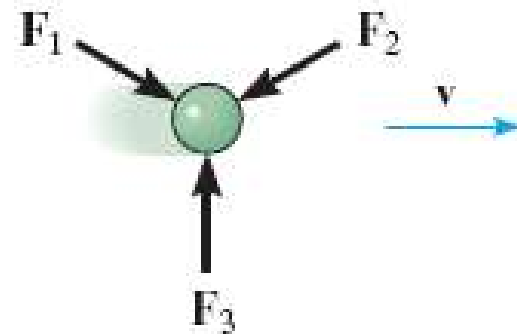
1.2 Temel Kavramlar (d'm)

- 1. Nokta-Parçacık (Particles):** Kütlesi olan ancak boyutları ihmal edilebilir olan cisimdir.
 - Örneğin, dünyanın boyutları yörüngesinin boyutlarına göre ihmal edilebilir. Cismin geometrisi önemsiz olur, fakat kütlesi ihmal edilemez.
- 2. Rijit Cisim (Rigid Body):** Birçok parçacığın bir araya gelmesiyle oluşan, kuvvet uygulanmadan önce ve sonra parçacıklar arasındaki mesafenin aynı kaldığı cisimdir.
- 3. Tekil Kuvvet (Concentrated Force):** Bir yüklemenin etkisini bir noktada toplanmış gibi temsil eden kuvvete denir.
 - Örneğin tekerlek ve zemin arasında oluşan kuvvet gibi.

1.2 Temel Kavramlar (d'm)

Newton'un Üç Hareket Kanunu

- **1. Kanun:** Başlangıçta durağan halde olan veya sabit hızla bir doğru boyunca hareket eden bir cisim üzerine dengelenmemiş bir kuvvet etki etmedikçe (net kuvvet ve moment sıfır ise) bu hareket durumunu korur.



Denge (equilibrium)

1.2 Temel Kavramlar (d'm)

- **2. Kanun:** Bir parçacığın ivmesi, üzerine etki eden bileşke kuvvetle doğru orantılı ve kuvvet doğrultusundadır. $F=ma$

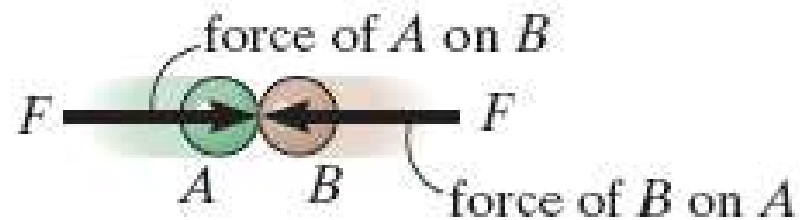
$$F = ma$$



İvmeli hareket (accelerated motion)

1.2 Temel Kavramlar (d'm)

- **3. Kanun:** İki parçacık arasındaki etki ve tepki kuvvetleri eşit, aynı doğrultu üzerinde ve zıt yönlerdedir.



Etki-Tepki (Action-Reaction)

1.2 Temel Kavramlar (d'm)

Newton'un Çekim Yasası (Newton's Law of Gravitational Attraction)

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

F = İki parçacık arasındaki çekim kuvveti

G = Evrensel çekim sabiti

(deneysel verilere göre $G = 66.73(10^{-12}) \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$)

m₁, m₂ = Cisimlerin kütleleri

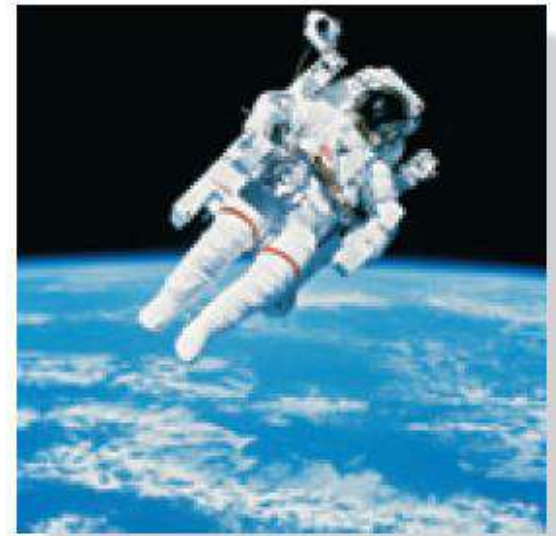
r = Cisimler arasındaki mesafe

M_e: Dünyanın kütlesi,

g: yer çekim ivmesi

Eğer diğer cisim dünya olarak alınırsa;

Çekim kuvveti (= ağırlık): $W = G \frac{mM_e}{r^2}$



$g = GM_e / r^2$ alınırsa $W = mg$ olacaktır.

1.2 Temel Kavramlar (d'm)



- Dikkat edilirse, ağırlığı ifade eden $W = m.g$ denklemi $F = m.a$ denklemine benzemektedir. Bilindiği gibi, m kütleyi, a ve g ivmeyi ifade etmektedir.
- g sadece r^2 'ye bağlıdır. Yani mesafenin karesi ile ters orantılıdır. Başka bir deyişle dünyada her yerde sabit bir değeri yoktur. Kutuplarda daha büyük bir değere sahipken ekvatorunda daha küçüktür.
- Ancak hesaplarda 'standart konum' diye adlandırılan deniz seviyesinde 45° enleminde ölçülen aşağıdaki standart değer kullanılır.

$$\boxed{g = 9.81 \frac{m}{s^2}} \quad \boxed{g = 32.2 \frac{ft}{s^2}}$$

1.3 Ölçüm Birimleri (Units of Measurement)

SI (SI Units) Birim Sistemi

- Bu derste genel olarak SI (Système International d'Unités) birim sistemi kullanılacaktır.
- Uzunluk (m-metre), zaman (s-saniye), kütle (kg-kilogram) olmak üzere üç temel birim vardır. Dördüncüsü olan kuvvet (N-Newton) olmak üzere Newton'un 2. yasası ile elde edilir.
- **$F = ma$** dan $[N] = [kg][m/s^2]$. Yani $1\text{ N} = 1\text{ kg.m/s}^2$ dir.

1.3 Ölçüm Birimleri (d'm)

Birim sistemi	Uzunluk	Zaman	Kütle	Kuvvet
International Systems of Units (SI)	Metre (m)	Saniye (s)	Kilogram (kg)	Newton (N) $\left(\frac{kg.m}{s^2} \right)$

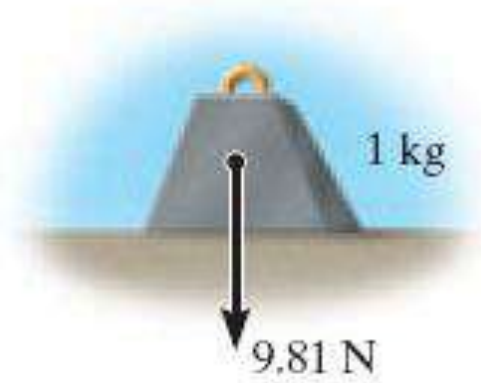
1.3 Ölçüm Birimleri (d'm)

- Standart konumda;
 $g = 9.806\,65\text{ m/s}^2$ olarak alınan değer;
- Hesaplamalarda;
 $g = 9.81\text{ m/s}^2$ olarak alınacaktır.

$$W = mg \quad (g = 9.81\text{m/s}^2)$$

Bu durumda;

- 1 kg kütleli bir cisim, 9.81 N'luk bir ağırlığa,
- 2 kg kütleli bir cisim, 19.62 N'luk bir ağırlığa sahip olacaktır.



1.4 SI Birim Sistemi

Önekler (Prefixes)

- Bazı çok büyük veya çok küçük miktarları belirtmek için o miktarı tanımlayan birimin başına üst çarpan veya alt çarpan şeklinde bazı önekler getirilir.
- **Örneğin:** $4\,000\,000\text{ N} = 4\,000\text{ kN}$ (kilo-newton)
 $= 4\text{ MN}$ (mega- newton)
 $0.005\text{m} = 5\text{ mm}$ (milli-meter)

1.4 SI Birim Sistemi (d'm)

TABLE 1–2 Prefixes (Önekler)

	Üstel form	Önek	SI sembolü
<u>Üst çarpan</u>			
1 000 000 000	10^9	giga	G
1 000 000	10^6	mega	M
1 000	10^3	kilo	k
<u>Alt çarpan</u>			
0.001	10^{-3}	milli	m
0.000 001	10^{-6}	micro	μ
0.000 000 001	10^{-9}	nano	n

Not: Genelde paydada önek kullanılmaz. Örneğin; N/mm yerine kN/m yazılır. Bu kural kg için uygulanmaz. Örneğin; m/mg yerine Mm/kg olarak yazılır.

- Bir işlem durumunda öneklerin hepsi 10'un katları şeklinde yazılarak işlem yapılır ve elde edilen sonuç önek kullanılarak yazılır.

Ör: $(50 \text{ kN})(60 \text{ nm}) = 50(10^3) \text{ N} \cdot 60(10^{-9}) \text{ m} = 3000(10^{-6}) \text{ N.m} = 3(10^{-3}) \text{ N.m} = 3 \text{ mN.m}$

1.5 Sayısal Hesaplamalar (Numerical Calculations)

Birimsel Homojenite (Dimensional Homogeneity)

- Bütün işlemlerimizde birimsel homojeniteye dikkat etmeliyiz.
- Örn; $s = vt + (1/2)at^2$ (sabit ivmeli zamana bağlı konum).
Burada boyutlar, $[m] = [(m/s)s, (m/s^2)s^2] \rightarrow [m] = [m]$
- Denklemin sağ da solu da m olur. Mekanikte tüm problemlerde birimsel homojenite vardır.



1.5 Sayısal Hesaplamalar (d'm)

Anlamlı Rakamlar (Significant Figures)

- Bir sayının doğruluğu, içerdiği anlamlı rakamların sayısı ile belirlenir.
- Anlamlı rakam sayısı, herhangi bir sıfır içeren 5604 gibi bir sayı ve 34.52 gibi herhangi bir sayı için dört olduğu söylenebilir.
- Sayılar sıfır ile başladığında ya da bittiğinde, anlamlı rakamların sayısını netleştirmek için örneklerden yararlanırız. 400 sayısını, $0.4(10^3)$ olarak yazabiliriz. Bundan dolayı bir tane anlamlı rakama sahip olduğu görülür.

1.5 Sayısal Hesaplamalar (d'm)

Sayıların Yuvarlanması (Rounding off Numbers)

- Sonuç olarak elde edilen sayının kesinliği, problem verilerinin kesinliğinden asla daha iyi olamaz.
- Hesap makinaları veya bilgisayarlar elde edilen sonuçtaki anlamlı rakam sayısı verideki anlamlı rakamların sayısından daha fazladır.
- Hesaplanan sonuçlar her zaman uygun sayıda anlamlı rakama “yuvarlatılmış” olmalıdır.



1.5 Sayısal Hesaplamalar (d'm)

Örnek: 2 km/h hız değerini m/s cinsinden yazalım.

$$2 \text{ km/h} = \left(\frac{2 \text{ km}}{h} \right) \left(\frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \right) \left(\frac{1 h}{3600 s} \right) = \frac{2000 \text{ m}}{3600 s} = 0.556 \text{ m/s}$$

Örnek: $(400 \text{ mm})(0.6 \text{ MN})^2$ işlemini SI biriminde gösterelim.

$$\begin{aligned} [400(10^{-3}) \text{ m}][0.6(10^6) \text{ N}]^2 &= (0.4 \text{ m})(0.36(10^{12}) \text{ N}^2) \\ &= 144(10^9) \text{ m} \cdot \text{N}^2 = 144 \text{ Gm} \cdot \text{N}^2 \end{aligned}$$

Not: Her iki örnekte de sonucu üç anlamlı dijit olacak şekilde yazdığımıza veya yuvarladığımıza dikkat ediniz.

1.6 Mesnet Çeşitleri

Basit Mesnet (Simple support, Pinned support)



Description: Stonehenge, England. One of the earliest examples of beam and column construction, it was built in approximately 2000 B.C. The picture shows part of a 30-meter circle of 30 upright stones, each weighing approximately 25 tons, capped by a continuous ring of 30 lintel stones, each weighing about 7 tons. The stones were brought 30 km from the quarry. Transport and construction procedures are still a matter of conjecture. (England)

1.6 Mesnet Çeşitleri (d'm)

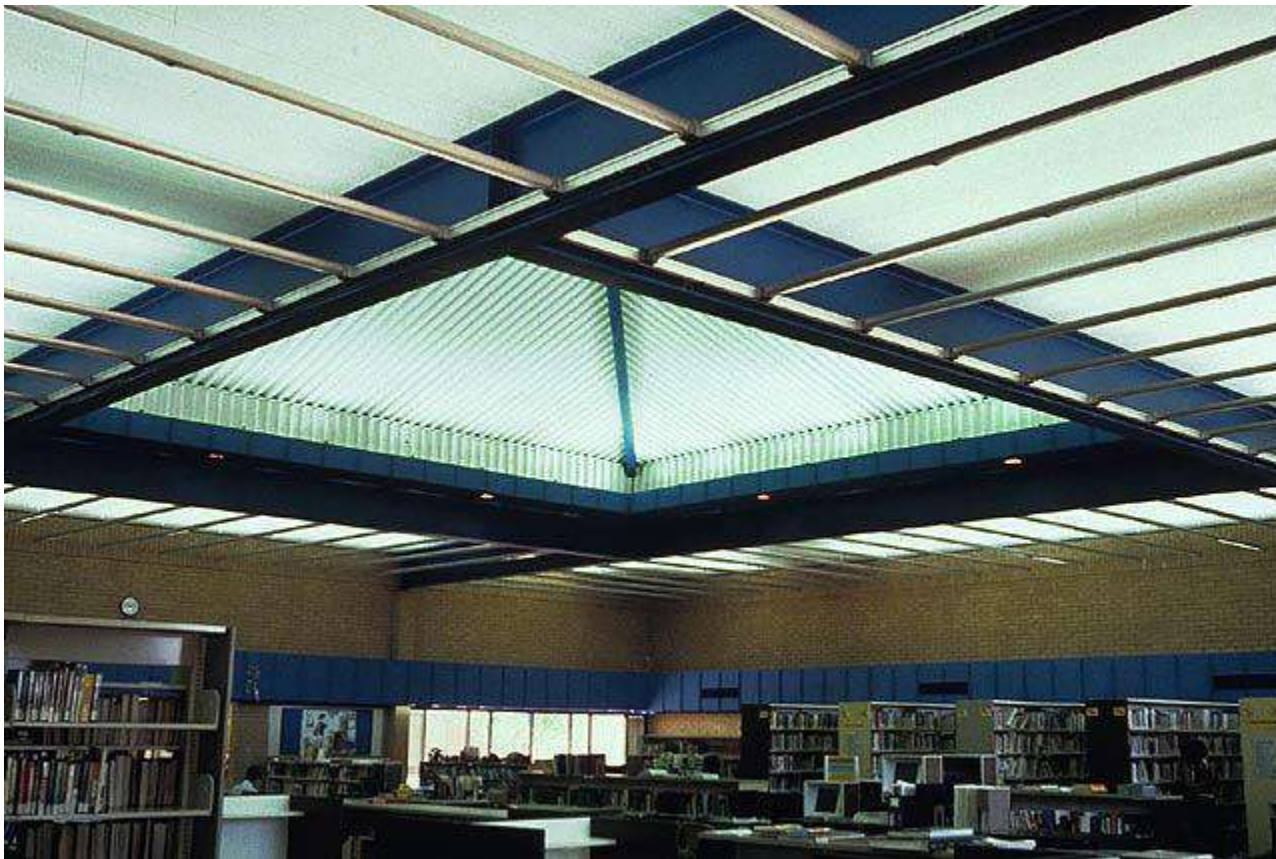
Basit Mesnet



Description: Temple of Olympian Zeus. Completed by the Roman Emperor Hadrian (AD 76-138) 700 years after the first columns were raised. Columns are 6 ft. 4 in. diameter, 56 ft. high, 18 ft. centers. Architrave beam span is obviously limited by the self-weight and tensile strength of the stone. (Athens, Greece)

1.6 Mesnet Çeşitleri (d'm)

Basit Mesnet



Description: Contra Costa County Branch Library after completion. Interior of library building [of GoddenA7] after completion. (Pinole, California)

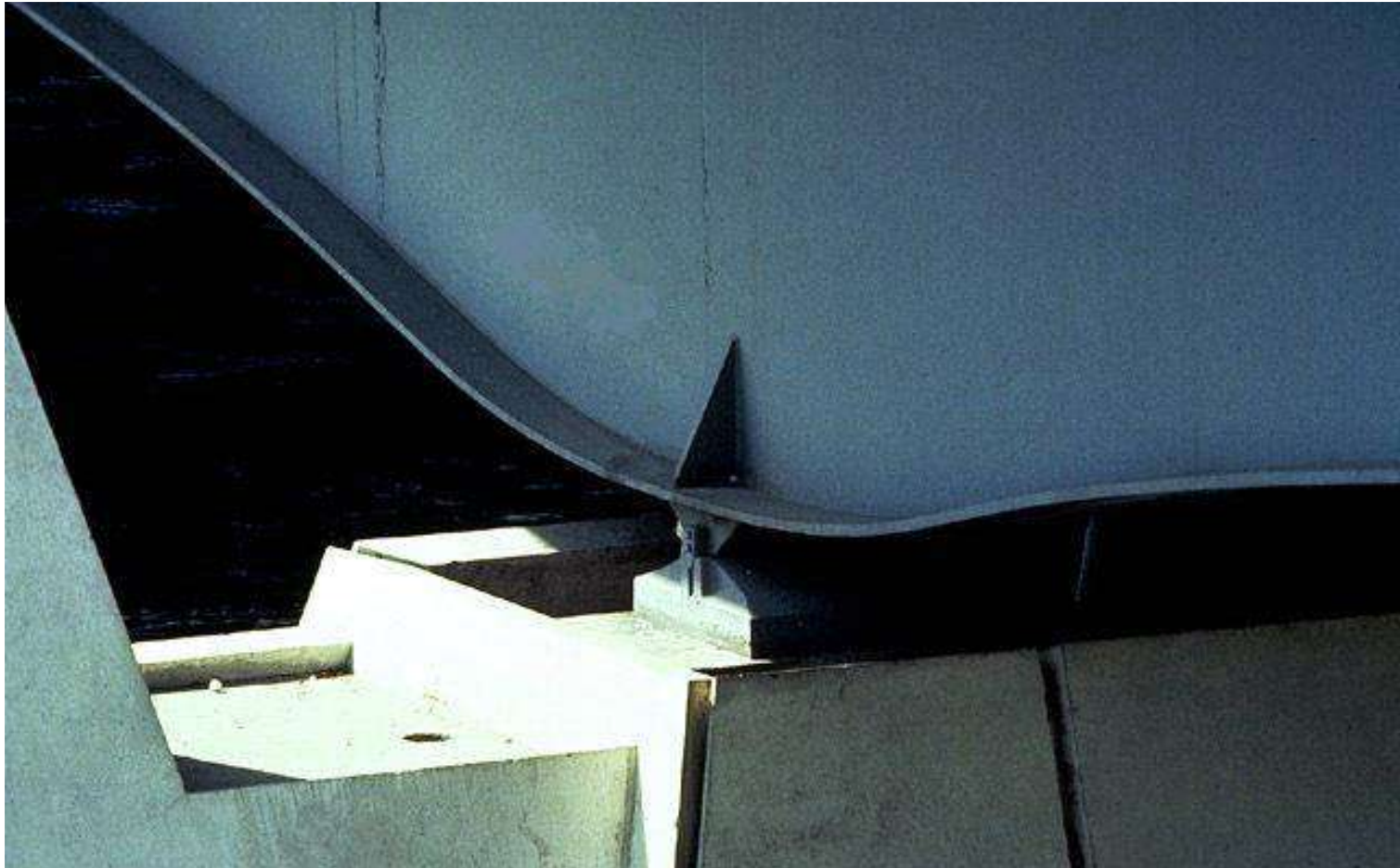
1.6 Mesnet Çeşitleri (d'm)

Basit Mesnet



1.6 Mesnet Çeşitleri (d'm)

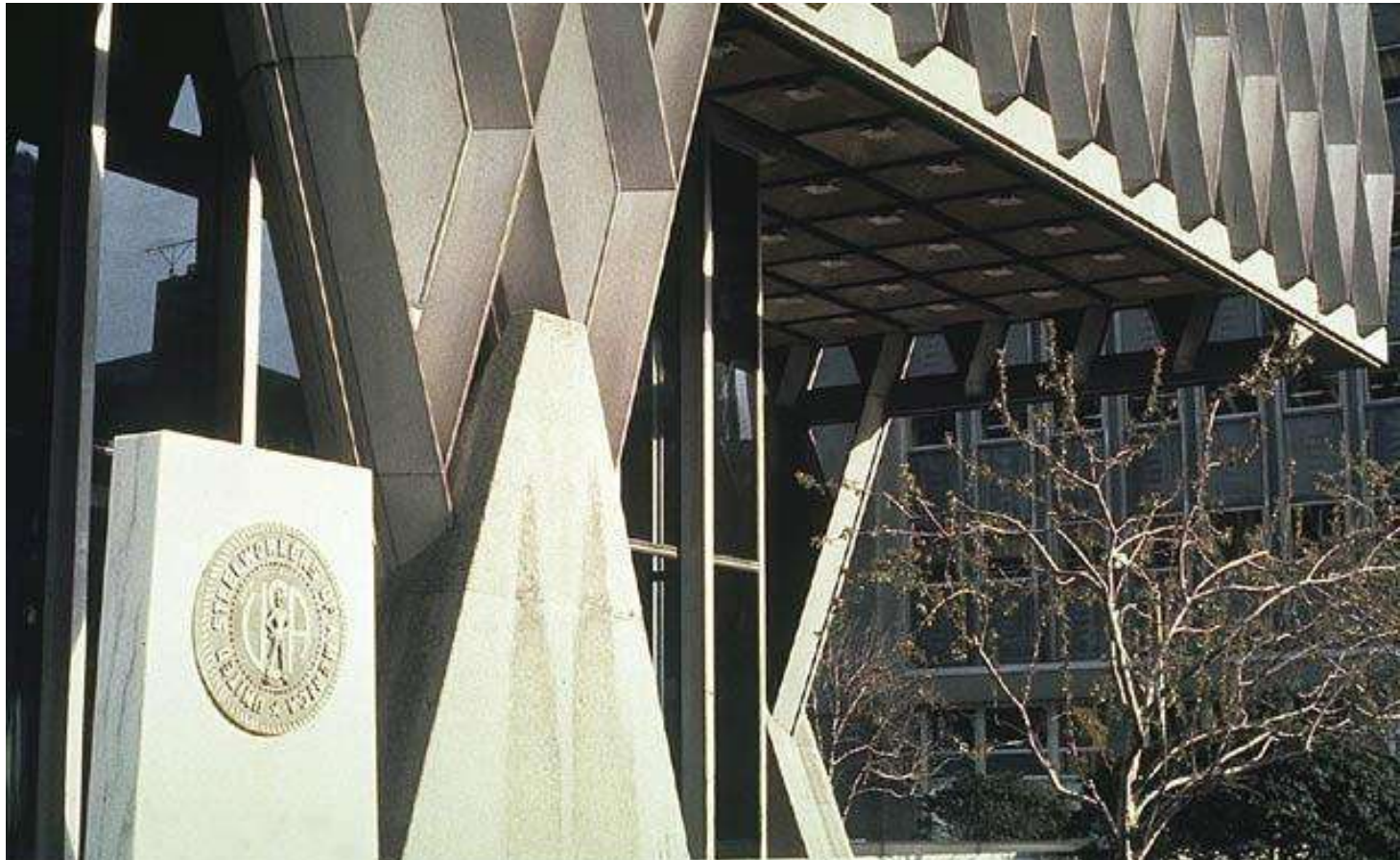
Basit Mesnet



Description: Pont de l'Alma over the River Seine. Detail of internal support. This is a pinned support permitting rotation but no axial movement in the girder. Expansion bearings are fitted at both river bank supports. (Paris, France)

1.6 Mesnet Çeşitleri (d'm)

Basit Mesnet



Description: Detail of the IBM Office Building. Showing the near support point. The building uses steels of varying strengths, with maximum strength at the supports and reducing with increasing elevation above the supports. (Pittsburgh, Pennsylvania)

1.6 Mesnet Çeşitleri (d'm)

Basit Mesnet



İskele
mesnedi
detayı
(basit
mesnet
örneği)

Description: Passerelle Debilly, River Seine. Detail of
near pier support. (Paris, France)

1.6 Mesnet Çeşitleri (d'm)

Konsol Kiriş (Cantilever beam)



Description: U.C. parking structure 'A'. The variable depth cantilever slab supports its own weight, automobile loading, and also any impact due to an automobile hitting the timber wall guard. (University of California, Berkeley)

1.6 Mesnet Çeşitleri (d'm)

Konsol Kiriş



Description: World Trade Center. Further example of building overhang supported on variable depth cantilevers. Note that adjacent cantilevers have common tip displacement. (New York City)

1.6 Mesnet Çeşitleri (d'm)

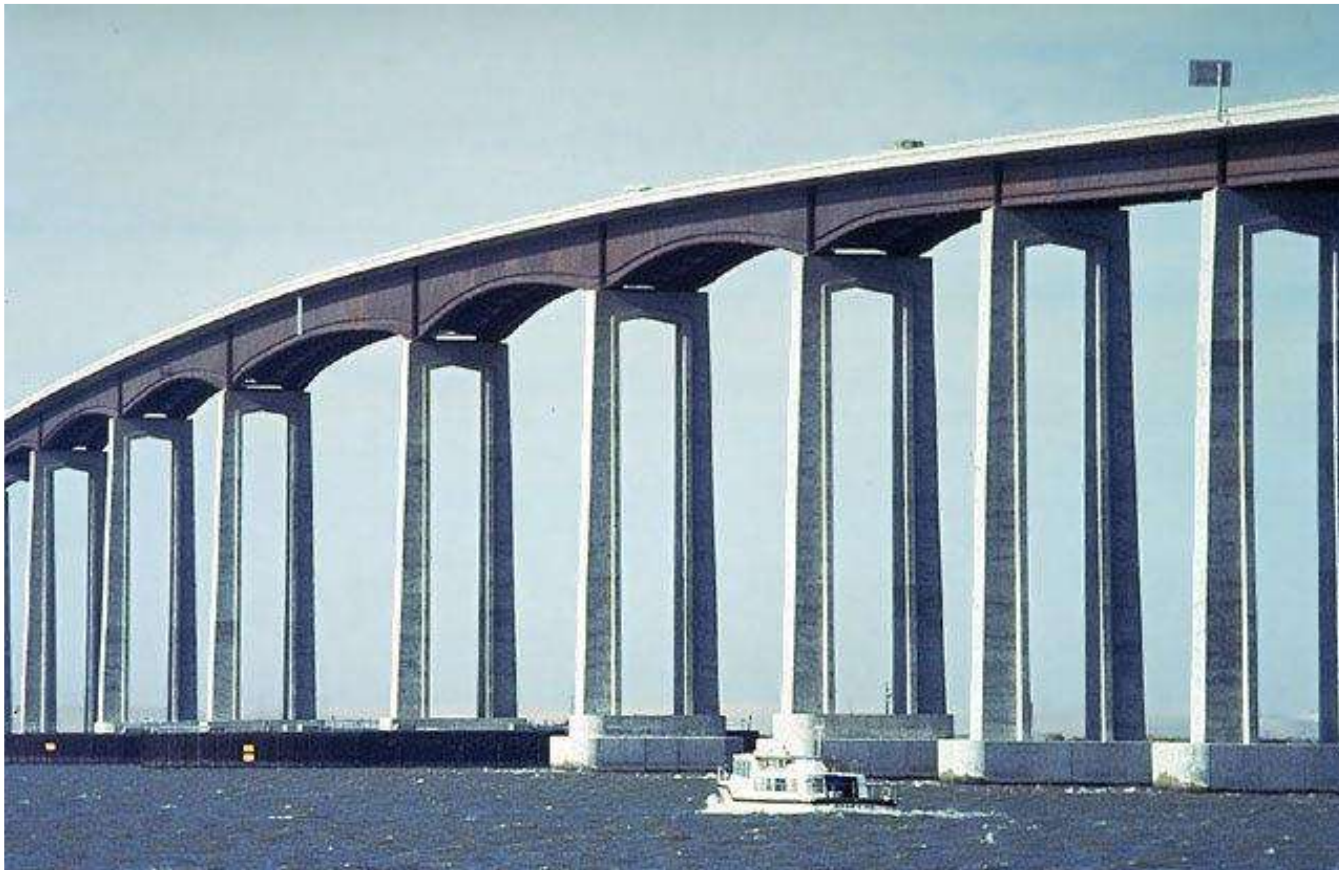
Konsol Kiriş



Description: United Airlines Hangar. The problem of designing a long door opening without columns is common to all hangar design. Here it is accomplished using 142 ft. long variable depth symmetrical steel cantilevers. For design using trusses, see Godden Set D, and using hypar shells see Godden Set E. (San Francisco International Airport)

1.6 Mesnet Çeşitleri (d'm)

Sürekli Kirişler (Continuous Span Beam)



Description: New Antioch Bridge. This high-level bridge completed in 1979 replaced an older truss-type lift bridge crossing the main shipping channel. The bridge consists of continuous spans of variable depth in Cor-Ten steel. Maximum span is 460 ft, and maximum height of roadway above water level is 135 ft. (California)

1.6 Mesnet Çeşitleri (d'm)

Kafes Sistemler (Truss Systems)



Description: Detail of pin-jointed truss connection, approach span to San Francisco-Oakland Bay Bridge. Pin joints are used in older bridges or situations where rotation has to be allowed for due to settlement, or for construction purposes. (San Francisco Bay Area)

1.6 Mesnet Çeşitleri (d'm)

Kafes Sistemler



Description: Crumlin Viaduct, Wales. This early railway viaduct is interesting in that it is constructed entirely from pin-connected iron members. Designed by the engineering firm of Liddell & Gordon, Thomas W. Kennard is credited with the construction, using a modification of the Warren truss. The viaduct was demolished in 1966.

1.6 Mesnet Çeşitleri (d'm)

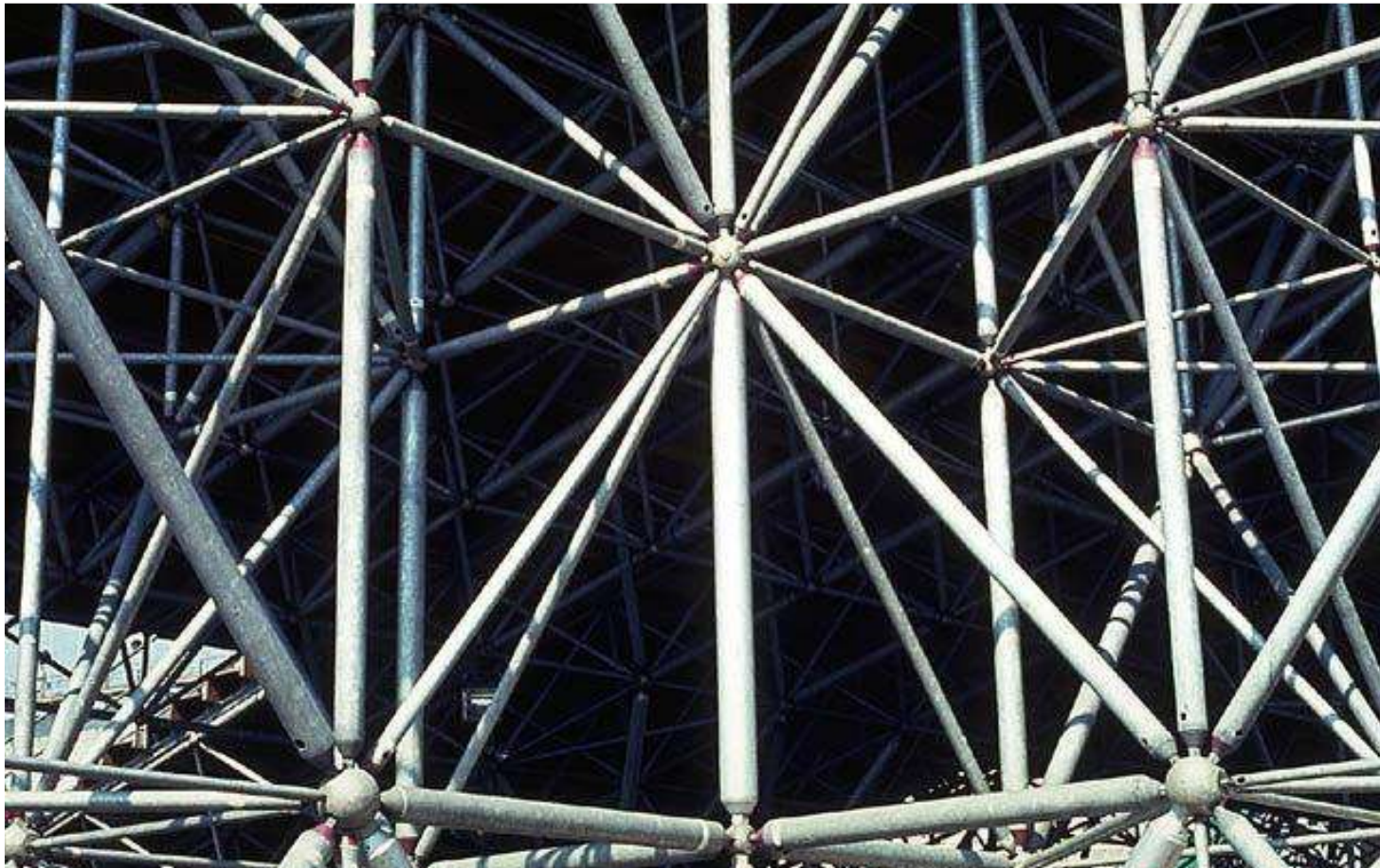
Kafes Sistemler



Description: This crane structure is typical of those used in constructing multi-story buildings, and is an interesting study in the geometry of bracing. The square vertical tower of the crane (the top is shown in this slide) uses K-bracing on all four sides. The boom is triangular in section and uses Warren bracing. The other systems can also be seen.

1.6 Mesnet Çeşitleri (d'm)

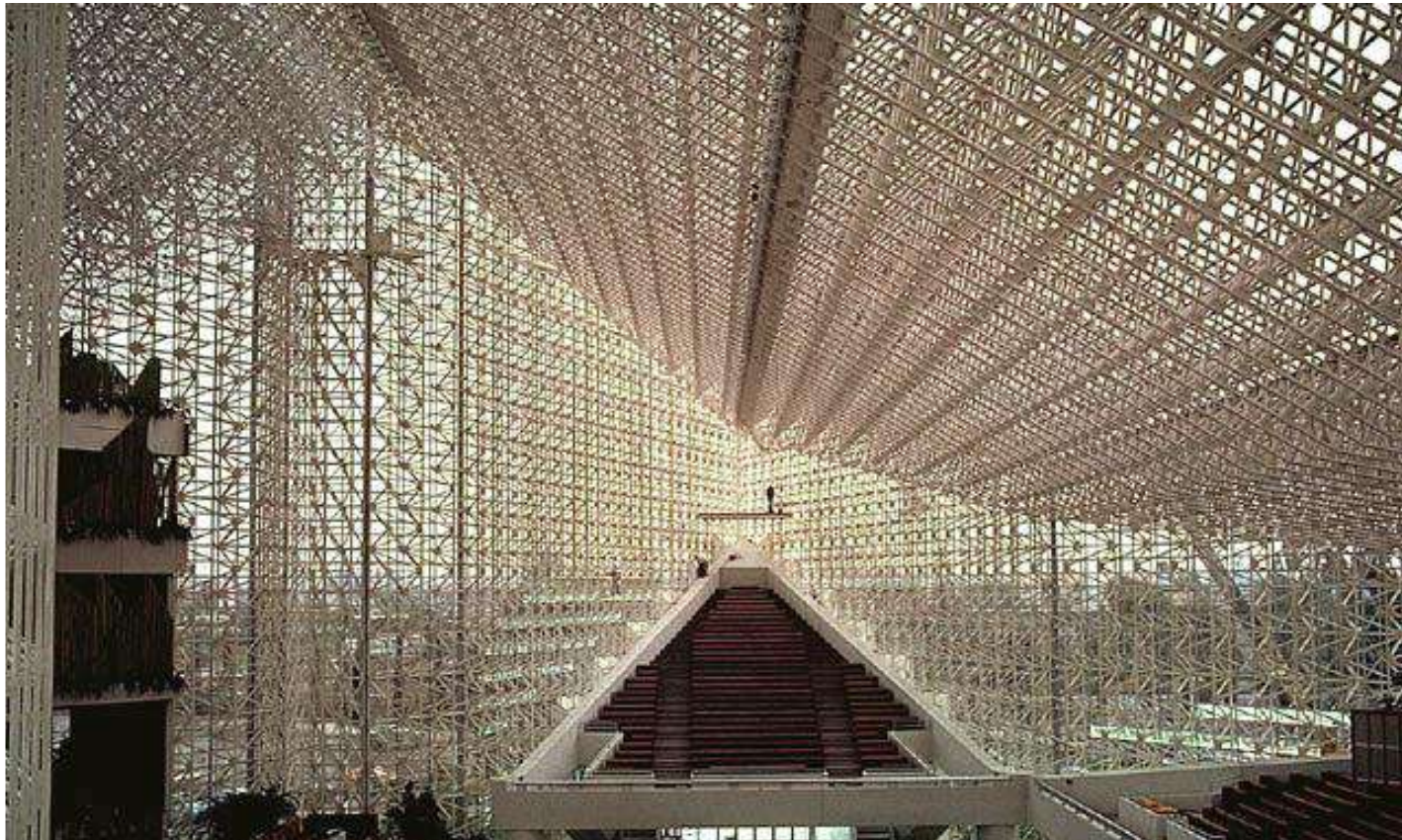
Uzay Kafes Sistem (Space Truss System)



Temporary Grandstand, Edinburgh Castle. All the members of the space frame are pin-jointed at each end. The ball-and-socket joint detail is shown here. (Scotland)

1.6 Mesnet Çeşitleri (d'm)

Uzay Kafes Sistem



Description: Crystal Cathedral. Inside view of long modern church building (completed September 1980) seating 3000. Building consists of a space frame completely covered with reflective glass. This view is along the 412-ft. length of the interior and shows the full 210-ft. width and the 25-ft. apex height. (Garden Grove, California)



STATİK

BÖLÜM 1. GİRİŞ VE GENEL PRENSİPLER

ÖRNEK SORU ÇÖZÜMLERİ

1. Aşağıda verilen sayıları üç anlamlı rakama (three significant figures) yuvarlayınız.

- a) 4.65735 m (Cevap: 4.66 m)
- b) 55.578 sn (Cevap: 55.6 sn)
- c) 4555 N (Cevap: 4.56 kN)
- d) 2768 kg (Cevap: 2.77 Mg (mega-gram))

2. Aşağıda verilen sayıları üç anlamlı rakama (three significant figures) yuvarlayınız.

- a) 4.65735 m (Cevap: 4.66 m)
- b) 55.578 sn (Cevap: 55.6 sn)
- c) 4555 N (Cevap: 4.56 kN)
- d) 2768 kg (Cevap: 2.77 Mg (mega-gram))

3. Aşağıda verilen birim kombinasyonlarını uygun ön-ekler (prefix) kullanarak doğru SI birim formunda yazınız.

- a) μMN [Cevap: $\mu\text{MN} = 10^{-6}(10^6) \text{ N} = \text{N}$]
- b) $\text{N}/\mu\text{m}$ [Cevap: $\text{N}/\mu\text{m} = \text{N}/[(10^{-6})\text{m}] = (10^6) \text{ N/m} = \text{MN/m}$]
- c) MN/ksn^2 [Cevap: $\text{MN}/\text{ksn}^2 = 10^6 \text{ N}/[(10^3)^2 \text{ sn}^2] = \text{N}/\text{sn}^2$]
- d) kN/msn [Cevap: $\text{kN}/\text{msn} = 10^3 \text{ N}/10^{-3} \text{ sn} = 10^6 \text{ N/sn} = \text{MN/sn}$]



4. Dünyada bulunan $3.65(10^6)$ kg kütleyle sahip bir roketin ağırlığını SI birim sisteminde bulunuz. Eğer roket yer çekim ivmesi $g_m=1.62 \text{ m/s}^2$ olan ayda olsaydı, roketin aydaki ağırlığını ve kütlesini SI birim sisteminde ve üç anlamlı rakam şeklinde bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} \text{a) } W_e &= mg = [3.65(10^6) \text{ kg}] (9.81 \text{ m/s}^2) \\ &= 35.81(10^6) \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 \\ &= 35.8 \end{aligned}$$

$$W_m = W_e \left(\frac{g_m}{g} \right) = (35.81 \text{ MN}) \left(\frac{1.62 \text{ m/s}^2}{9.81 \text{ m/s}^2} \right) = 5.91$$

b) Kütle bulunduğu yerden bağımsız olduğu için;

$$m_m = m_e = 3.65(10^6) \text{ kg} = 3.65 \text{ Gg}$$

5. Pascal (Pa) aslında bir basınç birimi olarak çok küçük bir birimi ifade eder. $1 \text{ Pa}=1 \text{ N/m}^2$ ve deniz seviyesindeki atmosfer basıncının $1 \text{ ATM}=101.325 \text{ kN/m}^2$ olduğunu bildiğimize göre $1 \text{ ATM}'yi$ Pa biriminde ifade ediniz.

Çözüm: $1 \text{ ATM}=101.325 \text{ kN/m}^2=101325 \text{ Pa}=101 \text{ kPa}$

6. Bir nesneye ait olan aşağıda verilen kütleleri N biriminde yazınız. Uygun ön ek kullanınız ve sonuçlarınızı üç anlamlı rakam şeklinde yazınız.

(a) 10 kg, (b) 0.5 g, and (c) 4.50 Mg?

Çözüm:

$$\text{a) } W = (9.81 \text{ m/s}^2)(10 \text{ kg}) = 98.1 \text{ N}$$

$$\text{b) } W = (9.81 \text{ m/s}^2)(0.5 \text{ g})(10^{-3} \text{ kg/g}) = 4.90 \text{ mN}$$

$$\text{c) } W = (9.81 \text{ m/s}^2)(4.5 \text{ Mg})(10^3 \text{ kg/Mg}) = 44.1 \text{ kN}$$



7. a) SI temel birimlerini kullanarak Newton'un Çekim Yasası formülündeki çekim kuvveti olan F 'nin biriminin N olduğunu boyut analizi yaparak gösteriniz.

b) Her birinin kütlesi 200-kg, yarıçapı 300 mm olan ve birbirine temas eden iki küre arasındaki çekim kuvvetini üç anlamlı rakam olacak şekilde hesaplayınız.

Çözüm:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$
$$N = \left(\frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \right) \left(\frac{\text{kg} \cdot \text{kg}}{\text{m}^2} \right) = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$$
$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$
$$= 66.73(10^{-12}) \left[\frac{200(200)}{0.6^2} \right]$$
$$= 7.41(10^{-6}) \text{ N} = 7.41 \mu\text{N}$$

8. 8-kg ve 12-kg kütleli iki cisim birbirinden 800 mm uzaklıkta bulunmaktadır. Bu cisimlerin ağırlıklarını bulunuz. Ayrıca bu cisimler arasındaki çekim kuvvetini bulunuz.

Çözüm:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Where $G = 66.73(10^{-12}) \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$

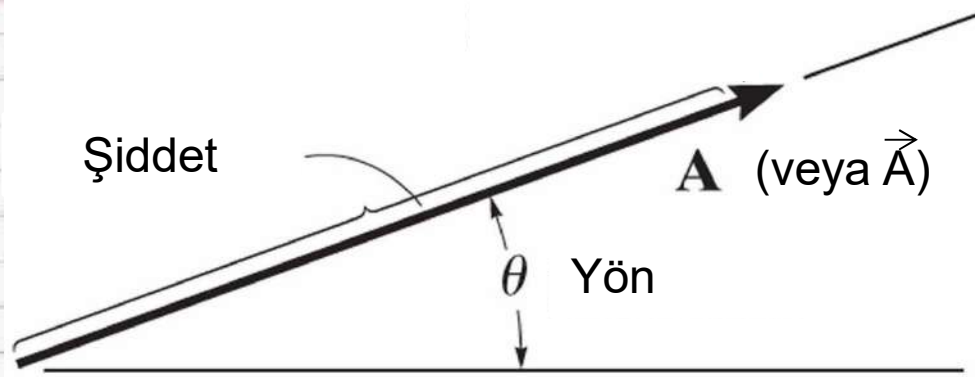
$$F = 66.73(10^{-12}) \left[\frac{8(12)}{(0.8)^2} \right] = 10.0(10^{-9}) \text{ N} = 10.0 \text{ nN}$$
$$W_1 = 8(9.81) = 78.5 \text{ N}$$
$$W_2 = 12(9.81) = 118 \text{ N}$$

Kuvvet Vektörleri

Mühendislik hayatı içindeki tüm fiziksel büyüklükler ya skalar ya da vektörel büyüklükler olarak sınıflandırılabilir:

Skalar: Bir skalar, negatif veya pozitif fiziksel bir büyüklüktür ve sadece şiddet değeri ile tamamen tanımlanabilir. Örnek: uzunluk, kütle, zaman.

Vektör: vektör, tamamen tanımlanabilmesi için, hem şiddet hem de yön gerektiren fiziksel büyüklüktür. Örnek: kuvvet, pozisyon, momentum.
Vektör grafik olarak okla gösterilir:



Okun uzunluğu
şiddetle orantılıdır.

Sabit eksenle yapmış olduğumuz ağırlık etki ağızının yönünü tanımlar.

Bundan sonra vektörler : $\vec{A}$ şeklinde gösterilecek, şiddeti ise A olarak ifade edilecektir.

(Bazı kaynaklarda
şiddet $|\vec{A}|$ olarak
da gösterilir.)

Vektör Operasyonları (İşlemleri) :

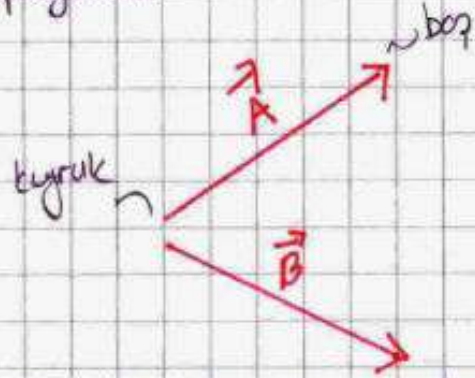
Vektörün bir skaler ile çarpılması veya bölünmesi :



} acıklanıyor
} zekii üstünde yap!

Vektör Toplamı:

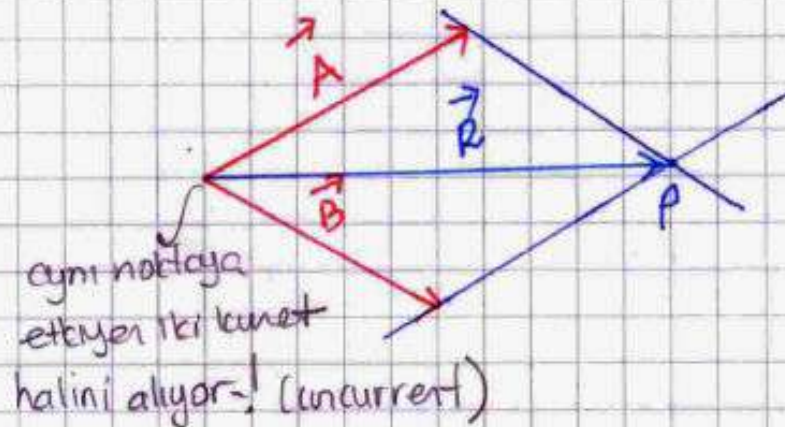
Vektör toplamı paralel kenar kuralına göre yapılır. Aşağıdaki iki vektör toplayalım:



Vektörler uzayda, doğrultuları/ yönleri ve şiddetleri korunarak hareket ettirilebilir.

İki vektörün toplamıdır. (bileşkesidir) -resultant!

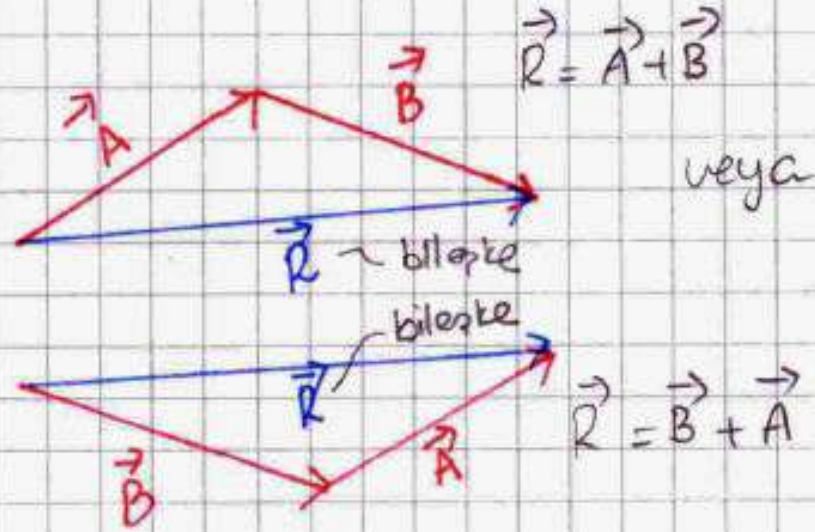
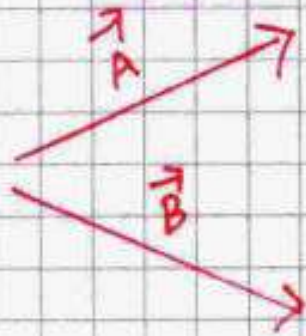
- (1) vektörlerin uç noktalarını birleştirin,
- (2) $\vec{B}$ 'nin başından $\vec{A}$ 'ya paralel bir çizgi, aynı şekilde, $\vec{A}$ 'nın başından $\vec{B}$ 'ye paralel bir çizgi çizin, vektörlerin
- (3) oluşan paralel kenarın diagonalı bu



$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{R} \text{ 'dir.}$$

Skaler toplama dan farklı

veya paralel kenar toplama kuralının asıl bir halı olan üçgen kuralı da toplama için kullanılır. Bu toplama baştan-kuyruğa (head-to-tail) şeklinde toplama da denir.

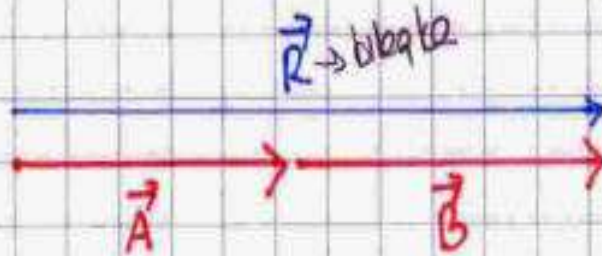


$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} ; \text{ vektör toplama komütatiftir! }$$



özel durum: aynı etki çizgisine ^(collinear) sahip iki vektörün toplanması durumunda,
paralel kollar kuralı cebirsel toplam durumuna indirgenir:

veya skaler
toplam



$$R = A + B \quad (\text{skaler toplam})$$

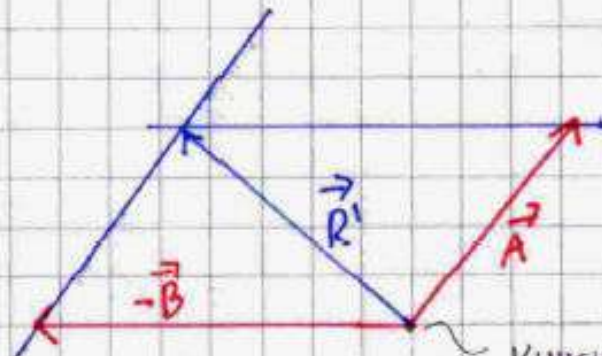
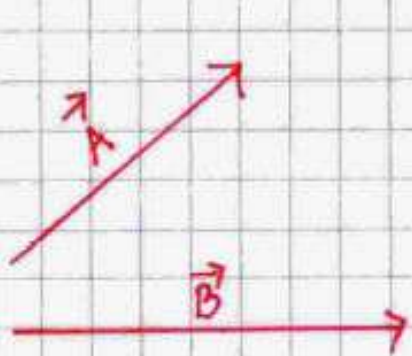
↓ ↓
şiddet şiddet

Vektör Çıkarması : İki vektörün farkının bileşkesi

matema-

tiksel olarak aşağıdaki gibi yazılır:

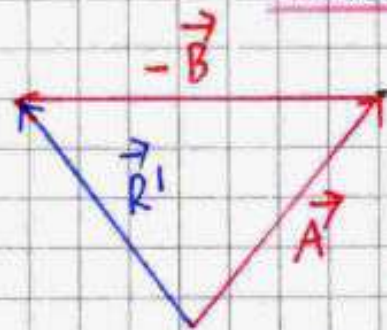
$$\vec{R}' = \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$



veya

Kuyruk-kuyruğa (tail-to-tail)

Paralelkenar kuralı



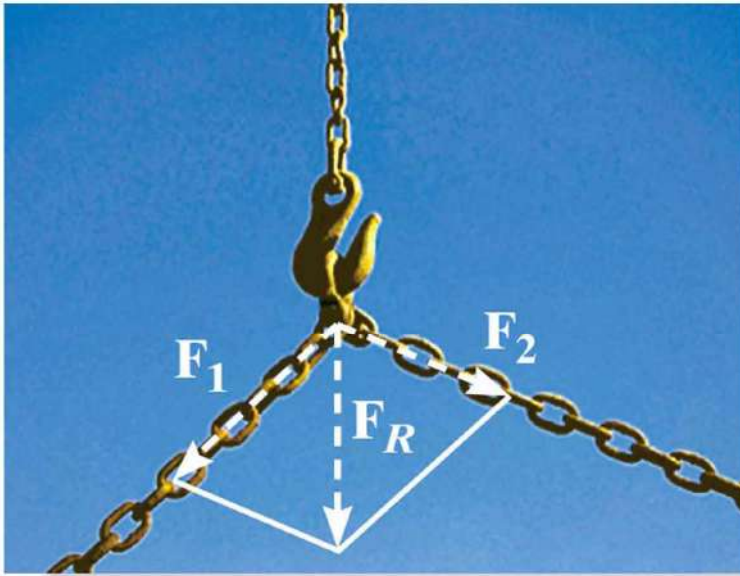
baştan-kuyruğa (head-to-tail)

Üçgen kuralı

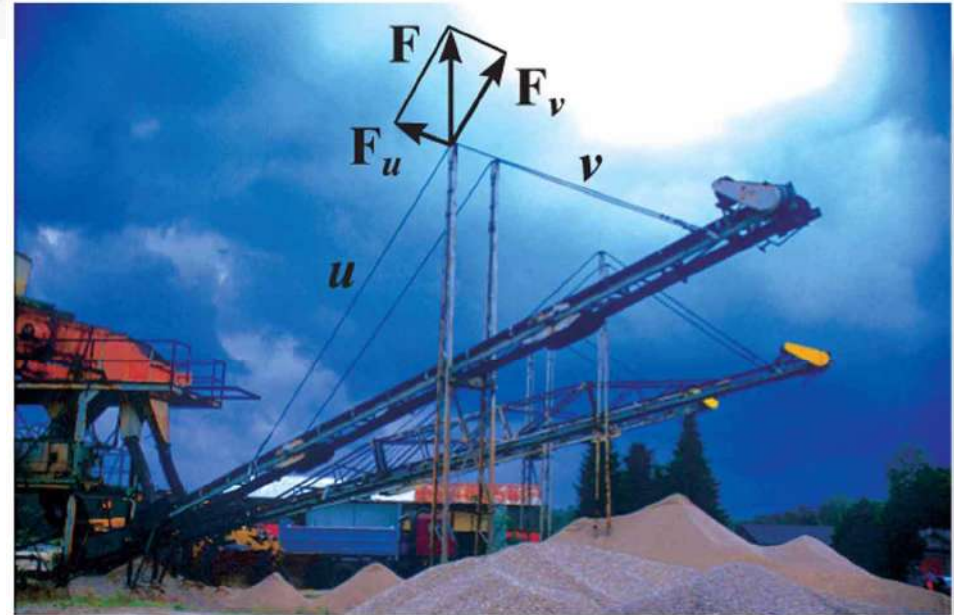
Kuvvetlerin Vektörel Toplamı

Kuvvetler vektörel büyüklüklerdir, aynı şiddetleri, yönleri ve doğrultuları vardır. Bu yüzden kuvvetlerin toplanması paralel kenar kuralına göre yapılır.

Statikte çok sık karşılaşılan problemler: (1) bileşenleri bilinen kuvvetlerin bileşkenini bulmak ve (2) bileşkeni bilinen bir kuvvetin bileşenlerine ayırmaktır.

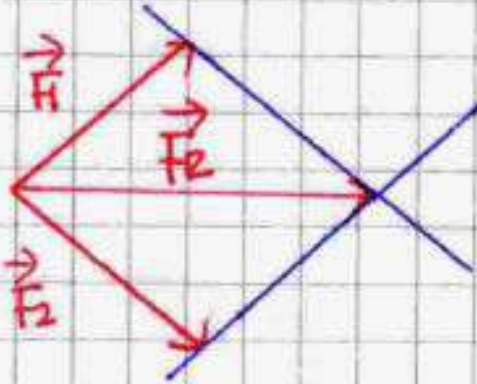
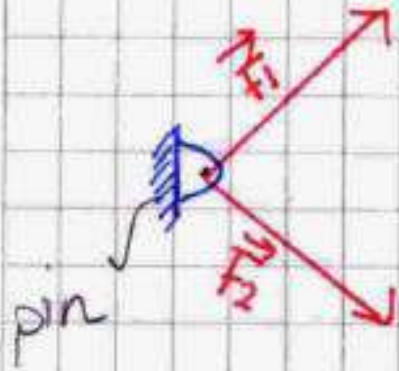


unfig02_01.jpg - The parallelogram law must be used to determine the resultant of the two forces acting on the hook.



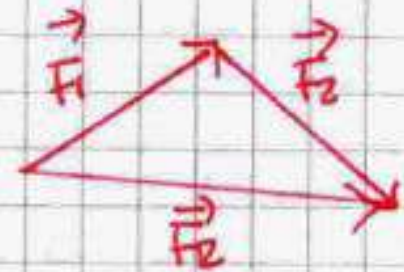
unfig02_02.jpg - Using the parallelogram law force F caused by the vertical member can be resolved into components acting along the suspension cables a and b

Birlikte Kuvvetin Bulunması:



$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

(paralel kuvvetler)

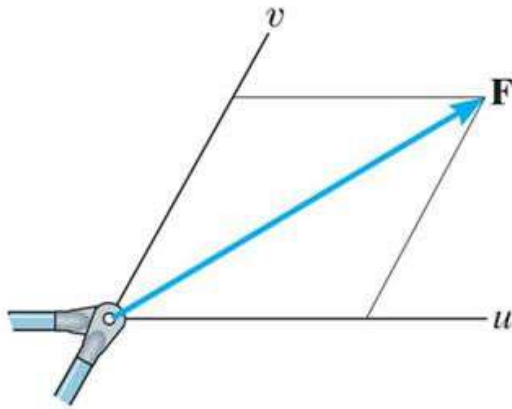


$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

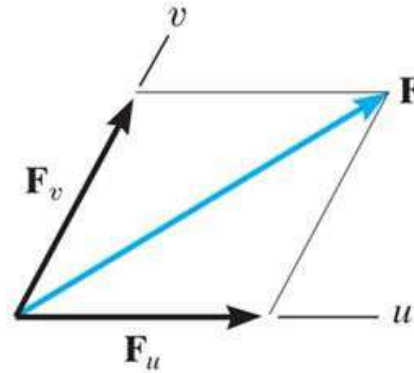
üçgen

Bir kuvvetin bileşenlerine ayrılması:

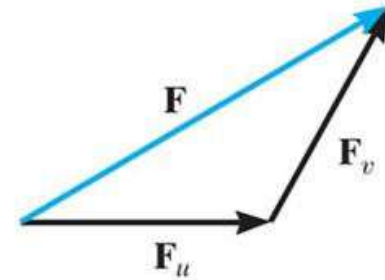
Bazen bir kuvveti cebme ve itme etkisini anlamak için herhangi iki eksen üzerinde bileşenlerine ayırmak gerekebilir:



(a)



(b)

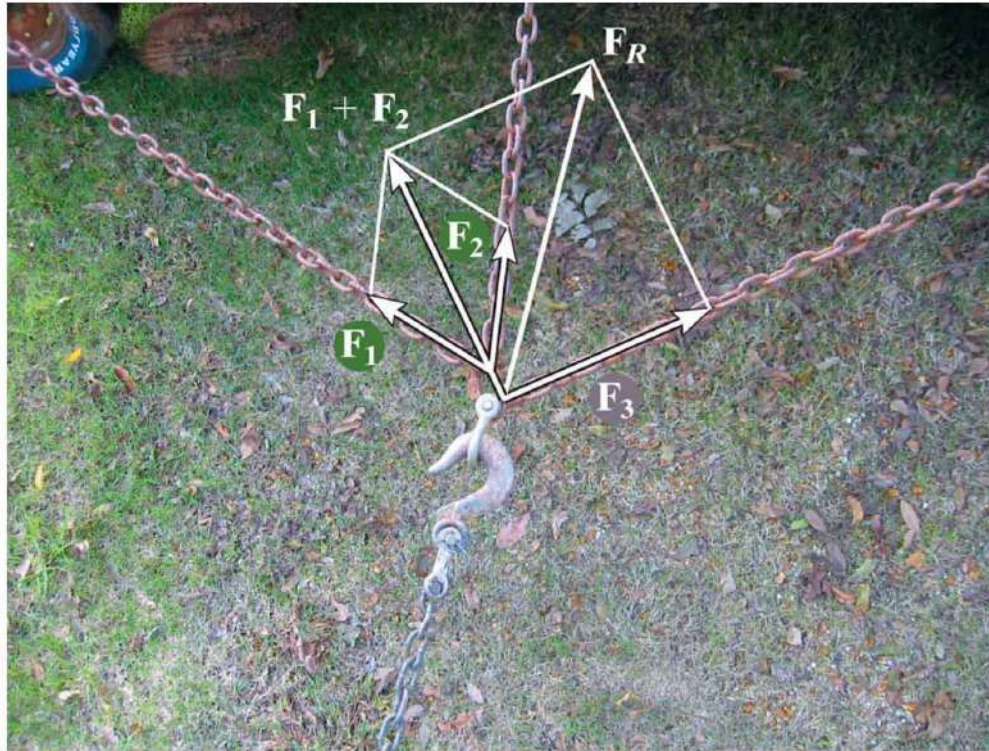


(c)

İkiden fazla kuvvetin Toplanması

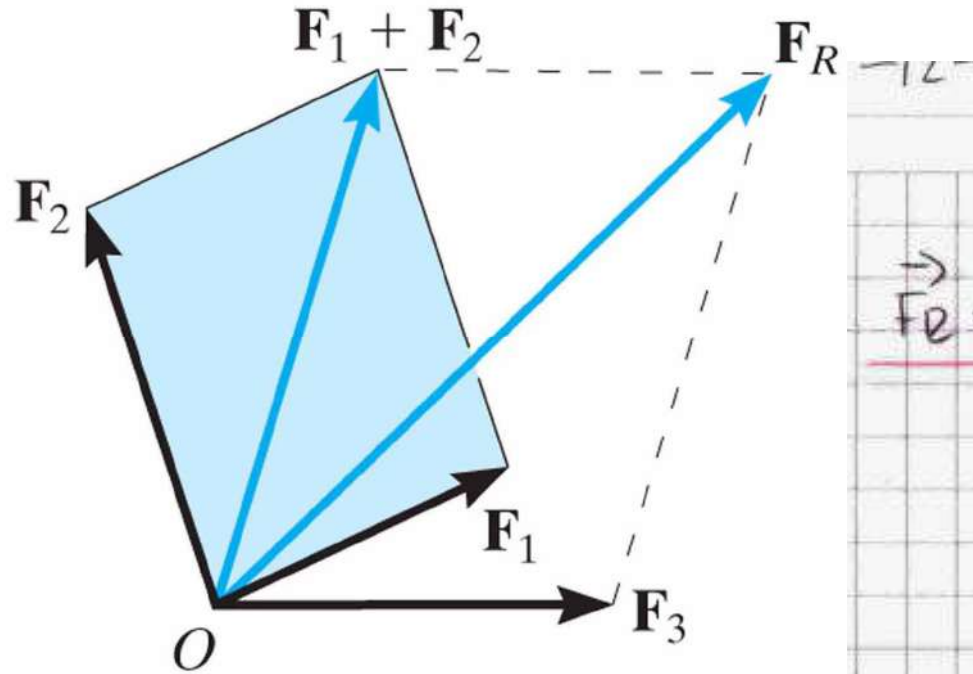
İkiden fazla kuvvet toplanacaksa, paralel kenar kuralı birden fazla
uygulanarak hesap yapılabilir

İkiden Fazla Kuvvetin Toplanması



unfig02_03.jpg - The resultant force $\mathbf{F_R}$ on the hook requires the addition of $\mathbf{F_1} + \mathbf{F_2}$, then this resultant is added to $\mathbf{F_3}$.

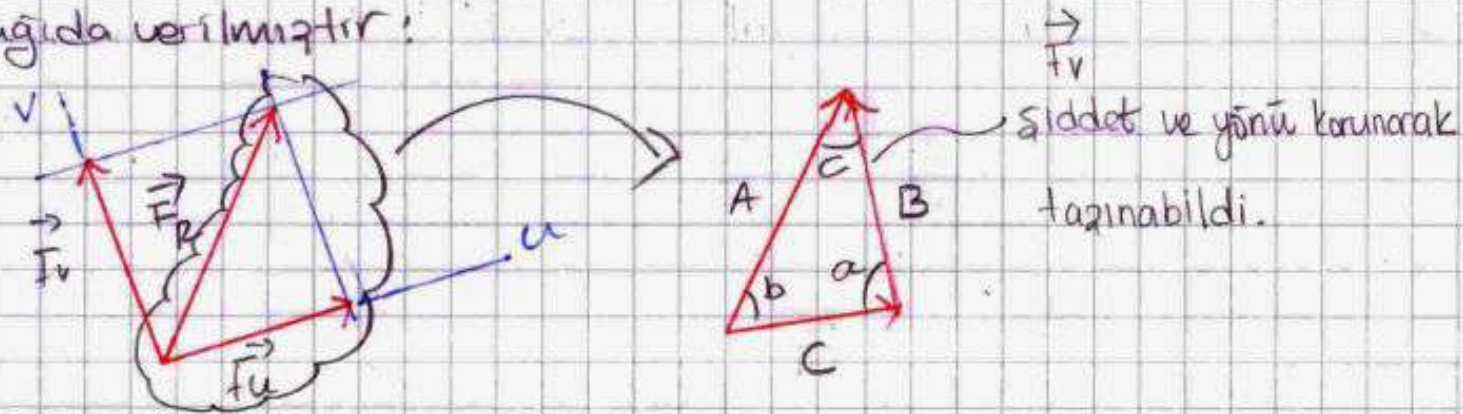
İkiden Fazla Kuvvetin Toplanması



$$\vec{F}_R = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) + \vec{F}_3$$

Paralelkenar kuralı ile vektör toplama işlemleri ve birleşik kuvvetin şiddetini bulma işlemleri ($F_R = |\vec{F}_R|$) yoğun geometrik ve trigonometrik işlemler gerektirir. İleriki bölümlerde daha kolay bir yöntem gösterilecektir.

Paralel kenar kuralı ile bileşke kuvvetin şiddetini bulmak veya
bileşelerin şiddetini bulmak için gerekli trigonometrik bağıntılar
 aşağıda verilmiştir:



Kosinüs Yasası → Bileşke kuvvetin şiddetini bulmak için kullandılır:

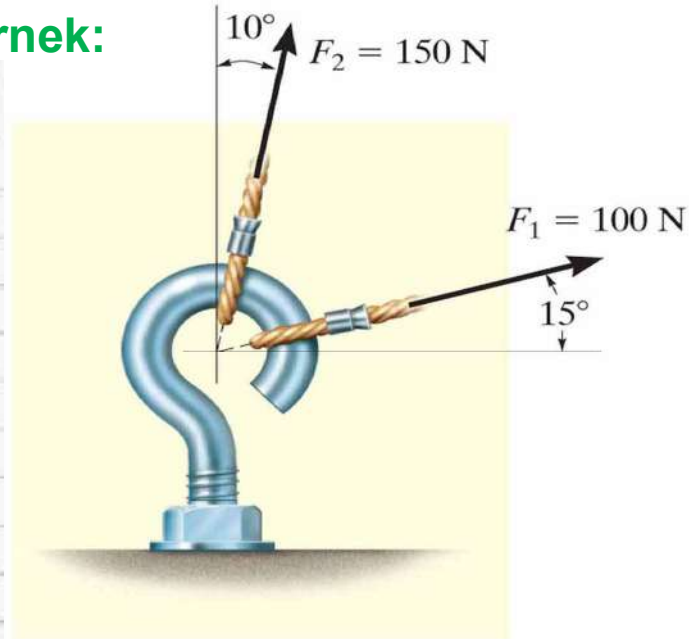
$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos(c) \text{ veya } B^2 = A^2 + C^2 - 2AC \cos(b)$$

$$A^2 = B^2 + C^2 - 2BC \cos(a)$$

Sinüs Yasası → Bileşelerin şiddetini bulmak için kullandılır:

$$\frac{A}{\sin a} = \frac{B}{\sin b} = \frac{C}{\sin c}$$

Örnek:

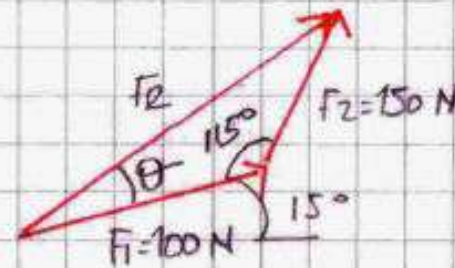
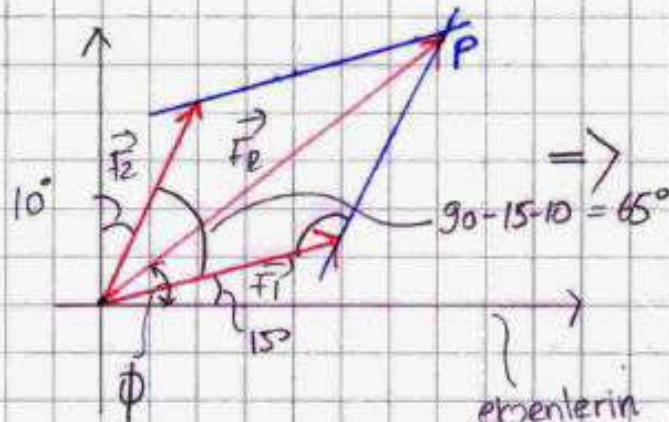


(a)

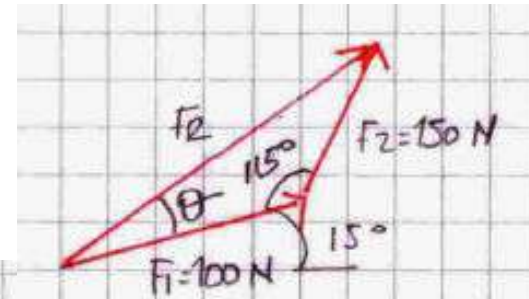
-13-

$\vec{F}_1$ ve $\vec{F}_2$ kuvvetlerinin bileşkesini ve yönünü bulunuz.

Paralelkenar kuralı kullanılarak bu iki vektör bulunabilir



Seçimin problemin çözümünün kolay olması için önemli!



Kosinüs teoreminden:

$$F_R = \sqrt{(100\text{ N})^2 + (150\text{ N})^2 - 2(100\text{ N})(150\text{ N})\cos 115^\circ} = 212.6\text{ N} \\ \approx 213\text{ N}$$

Sinüs teoreminden θ açısı bulunur:

$$\frac{212.6\text{ N}}{\sin 115} = \frac{150}{\sin \theta} \Rightarrow \sin \theta = \frac{150\text{ N}}{212.6\text{ N}} \cdot \sin 115^\circ \Rightarrow \theta = \sin^{-1}(0.639)$$

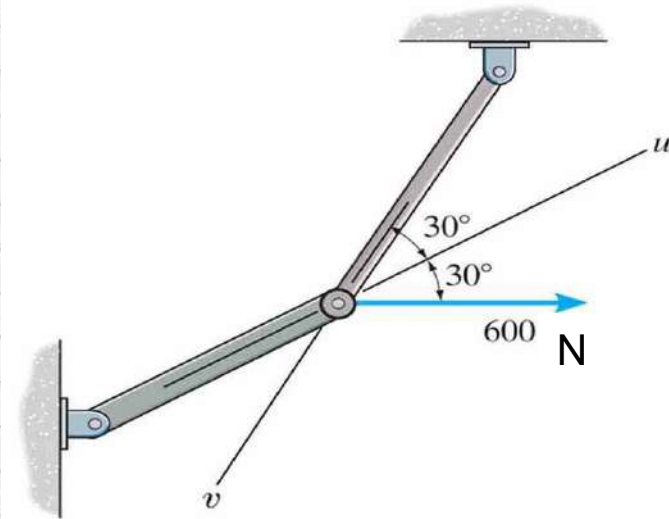
↗ derece
sinüsinden!

$$\theta = 39.8^\circ$$

Bileşke kuvvetin yönü:

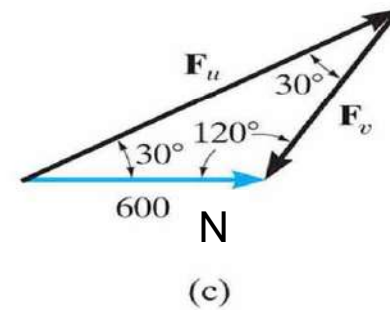
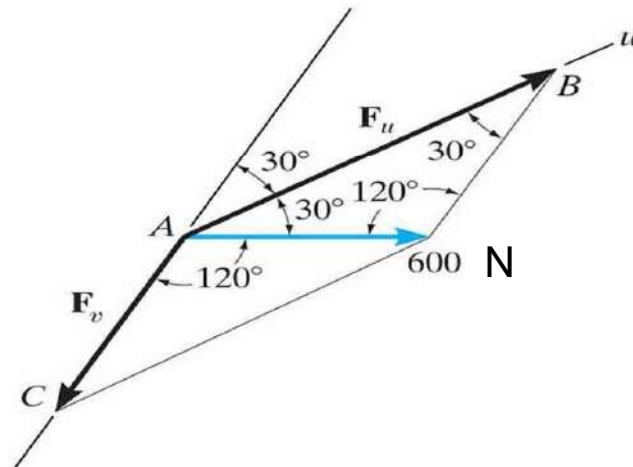
$$\phi = \theta + 15^\circ = 39.8^\circ + 15^\circ = 54.8^\circ$$

Örn:



600 N' luk kuvveti
 u ve v eksenlerindeki
 bileşenlere ayırınız.
 Bu bileşenler, arabuklarda oluşan
 kuvvetlere eşit olacaktır.

u ve v eksenlerinin kuvvetlerini oluşturanca paralel kenarı çizelim.



(c)

Sinüs Yoluyla bileşenler bulunur.

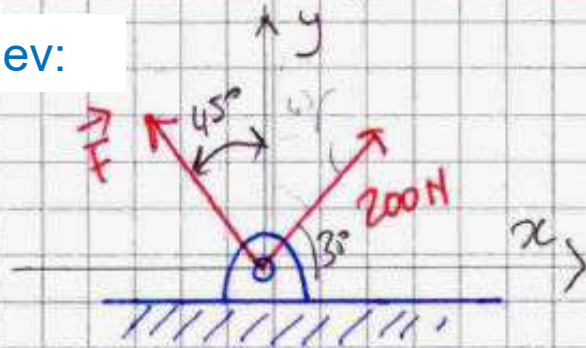
$$\frac{600}{\sin 30} = \frac{F_u}{\sin 120} = \frac{F_v}{\sin 30}$$

$$\Rightarrow F_v = 600$$

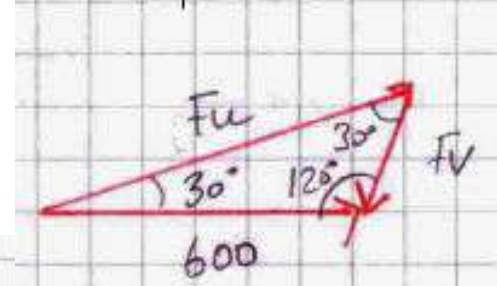
$$F_u = \frac{\sin 120}{\sin 30} 600 = 1039 \text{ N}$$

Dikkat edilirse, bileşenlerden biri, bileşkeден büyüktür.

Ödev:



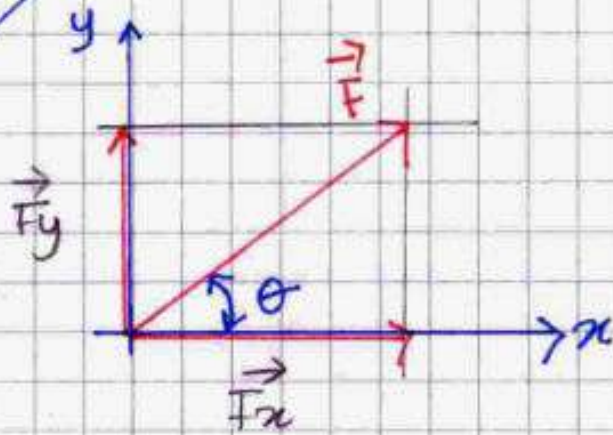
Bu iki kuvvetin bileşkesinin ($\vec{F}_2$) y -ekseninde olmaları için $\vec{F}$ kuvvetinin şiddetinin ne olması gerektiği bulunur.



Aynı Düzlemindeki Kuvvet Sistemlerinin Toplanması (Kartezyen Koordinatlar)

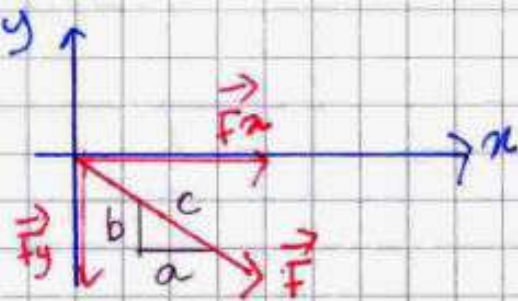
Eğer bir kuvvet x ve y eksenlerindeki bileşenlerine ayrılırsa, bu bileşenlere kartezyen bileşenler denir.

Skalar Notasyonu:



$$\left. \begin{aligned} F_x &= F \cdot \cos \theta \\ F_y &= F \cdot \sin \theta \end{aligned} \right\} \text{skalar gösterim.}$$

$\vec{F}$ 'in yönü θ açısı ile tanımlanmak yerine "birçok eğim üçgeni" ile de gösterilebilir:



$$\left. \begin{aligned} F_x &= F \left(\frac{a}{c} \right) \text{ veya } \frac{F_x}{F} = \frac{a}{c} \\ F_y &= F \left(\frac{b}{c} \right) \text{ veya } \frac{F_y}{F} = \frac{b}{c} \end{aligned} \right\} \text{Bazılar uyarılar!}$$

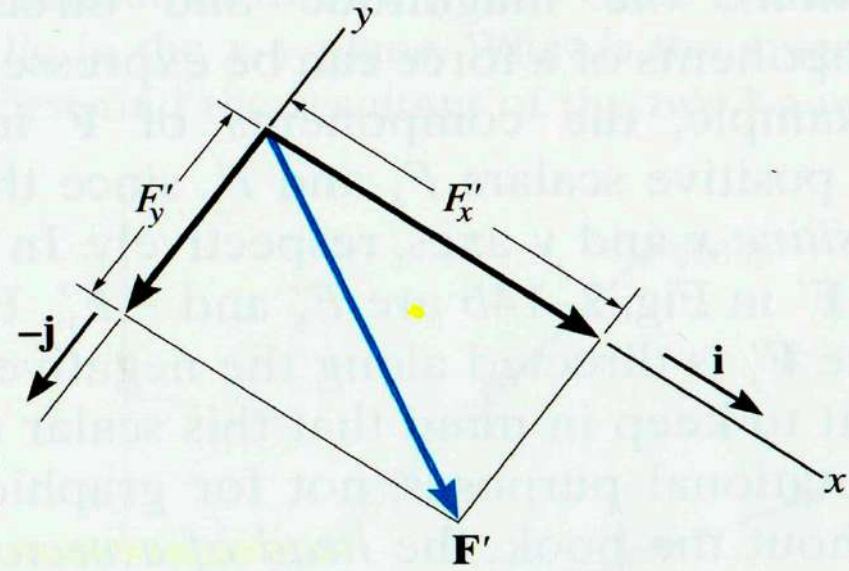
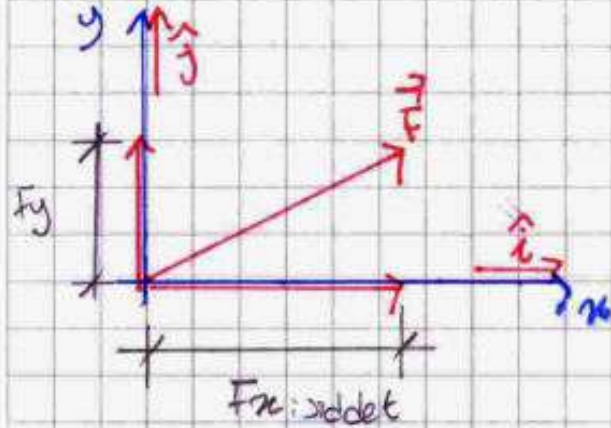
↓
Bunun yönü negatif, çünkü $-y$ yönü de giril-
tirdi.

Not: (-) işareti, sadece hesaplama yapılırken kullanılmalı. Yön belir-
tirken değil!

Kartezyen Notasyonu:

Bir kuvvet vektörünün, x ve y bileşenlerini kartezyen birim vektörlerle göstermek mümkündür.

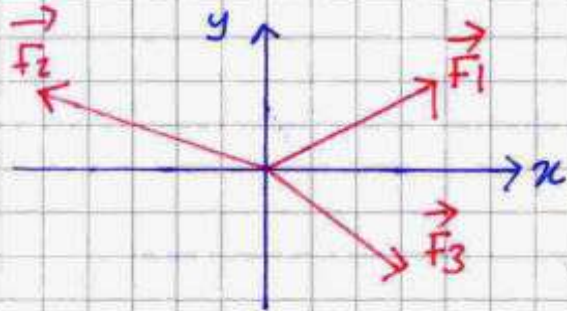
Kartezyen birim vektör notasyonu: x -ekseni $\hat{i}$
 y -ekseni $\hat{j}$ $\rightarrow$



Bu durumda, $\vec{F}$ kuvveti kartezyen koordinatlarda:

$$\vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} \quad \text{olarak gösterilir.}$$

Aynı Düzlemdaki (Coplanar) Kuvvetlerin Bileşenleri (Kartezyen vektör notasyonu kullanılarak)



$$\vec{F}_1 = F_{1x}\hat{i} + F_{1y}\hat{j}$$

$$\vec{F}_2 = -F_{2x}\hat{i} + F_{2y}\hat{j}$$

$$\vec{F}_3 = F_{3x}\hat{i} - F_{3y}\hat{j}$$

Bileşke Kuvvet:

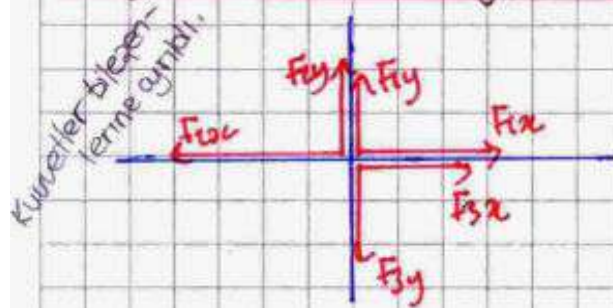
$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \quad (\text{DİKKAT: Vektörel Toplam})$$

$$= F_{1x}\hat{i} + F_{1y}\hat{j} - F_{2x}\hat{i} + F_{2y}\hat{j} + F_{3x}\hat{i} - F_{3y}\hat{j} \quad (\text{ortak parantez})$$

$$= (F_{1x} - F_{2x} + F_{3x})\hat{i} + (F_{1y} + F_{2y} - F_{3y})\hat{j}$$

$$= F_{Rx}\hat{i} + F_{Ry}\hat{j} \quad \text{olarak hesaplanır.}$$

Eğer skalar notasyonu kullanılıyorsa,

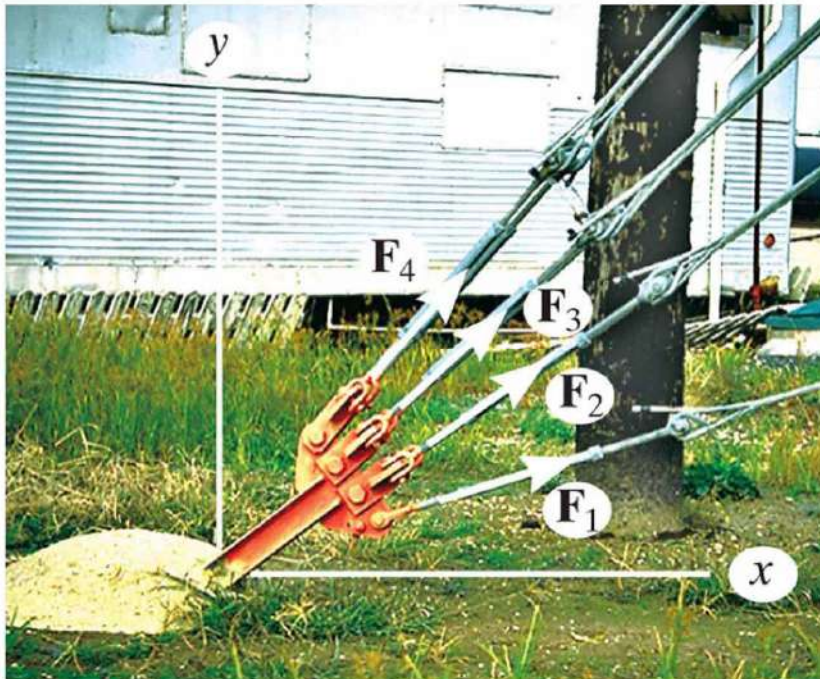


$$\begin{aligned} F_{Rx} &= F_{1x} - F_{2x} + F_{3x} \\ F_{Ry} &= F_{1y} + F_{2y} - F_{3y} \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \text{olarak bulunurdu!} \end{array} \right.$$

(aynı SONUÇ!)

Aynı düzlemde bulunan herhangi bir sayıdaki kuvvet vektörlerinin
bileşkesinin (R) x ve y eksenlerindeki bileşenleri aşağıdaki şekilde
bulunabilir (cebrîsel toplanır)

$$\left. \begin{aligned} F_{Rx} &= \sum_i F_{x,i} \\ F_{Ry} &= \sum_i F_{y,i} \end{aligned} \right\} i=1,2,\dots,M$$



İkiden Fazla Kuvvetin
Toplanması

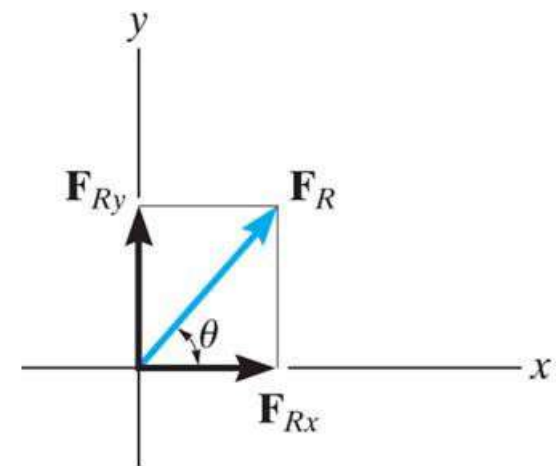
$$\left. \begin{aligned} F_{Rx} &= \sum_i F_{x,i} \\ F_{Ry} &= \sum_i F_{y,i} \end{aligned} \right\} i=1,2,\dots,M$$

Bilgiler bulunduktan sonra, $\vec{F}_R$ vektörünün şiddeti aşağıdaki gibi bulunur:

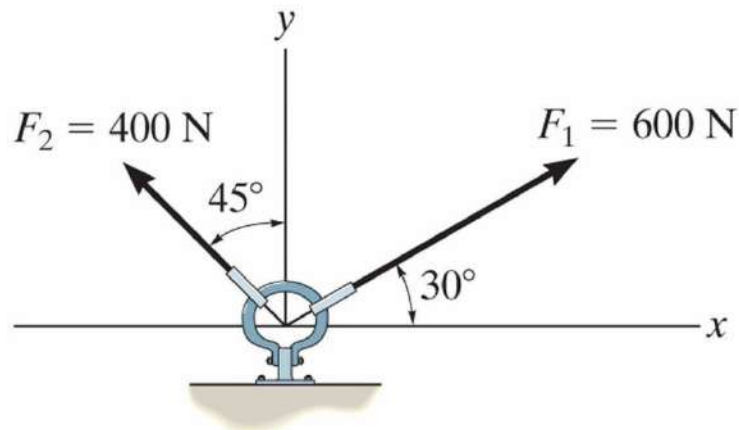
$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2}$$

Ayrıca, $\vec{F}_R$ vektörünün yanı da bulunabilir:

$$\theta = \tan^{-1} \left| \frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} \right|$$



Örnek:



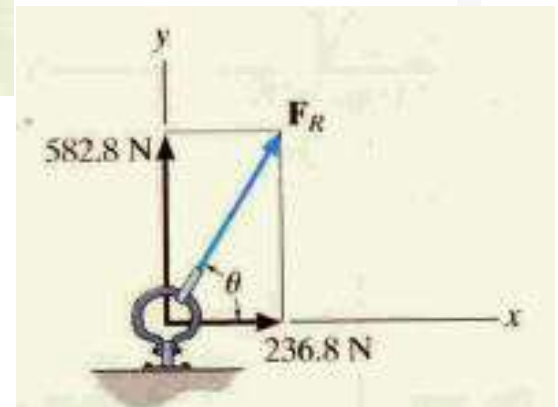
Sekilde gösterilen kuvvetlerin bileşkesini
biri vektörler kullanarak bulunuz
yöntemi

$$\mathbf{F}_1 = \{600 \cos 30^\circ \mathbf{i} + 600 \sin 30^\circ \mathbf{j}\} \text{ N}$$

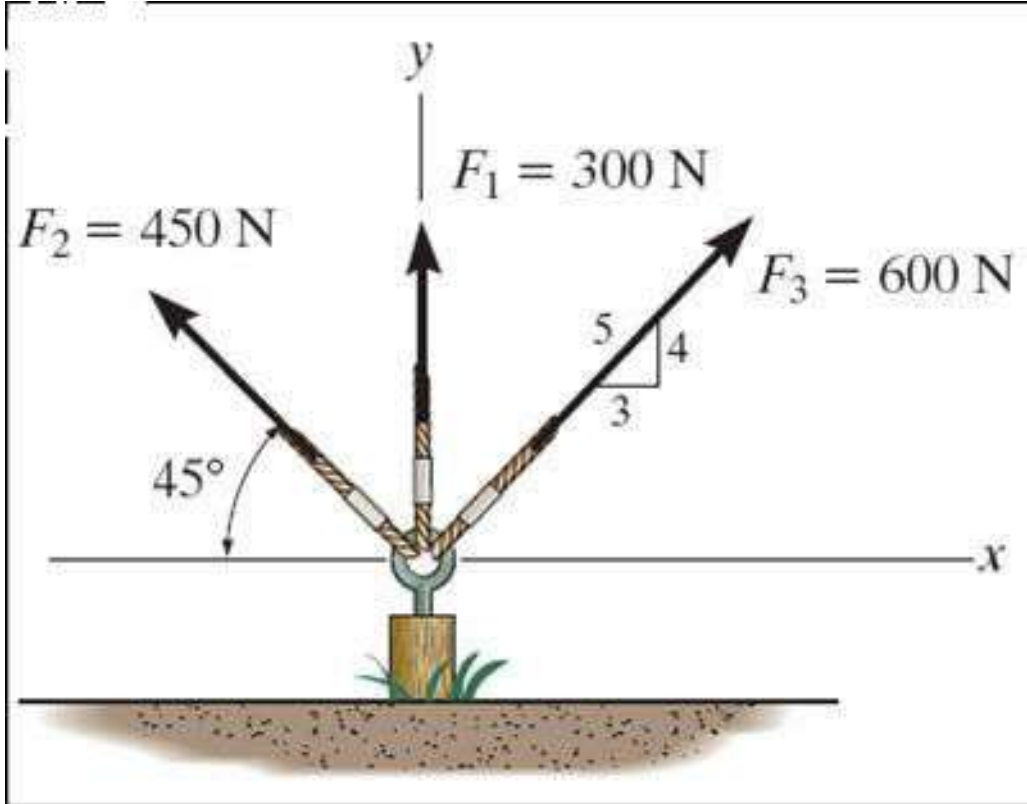
$$\mathbf{F}_2 = \{-400 \sin 45^\circ \mathbf{i} + 400 \cos 45^\circ \mathbf{j}\} \text{ N}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_R &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = (600 \cos 30^\circ \text{ N} - 400 \sin 45^\circ \text{ N})\mathbf{i} \\ &\quad + (600 \sin 30^\circ \text{ N} + 400 \cos 45^\circ \text{ N})\mathbf{j} \\ &= \{236.8\mathbf{i} + 582.8\mathbf{j}\} \text{ N}\end{aligned}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{582.8 \text{ N}}{236.8 \text{ N}}\right) = 67.9^\circ$$

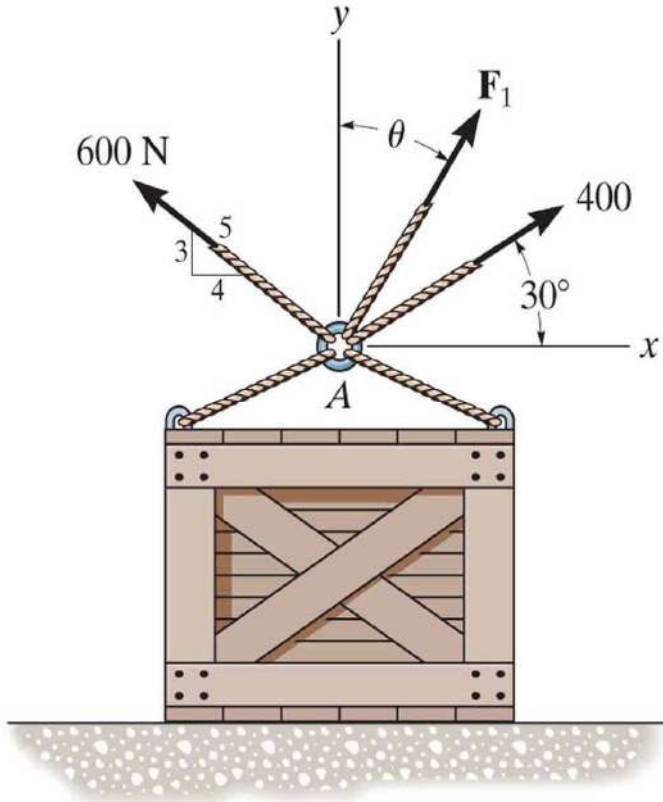


Ödev:



Aynı düzlemde bulunan bu üç kuvvetin bileşkesinin şiddetini ve yönünü bulunuz.

Ödev:



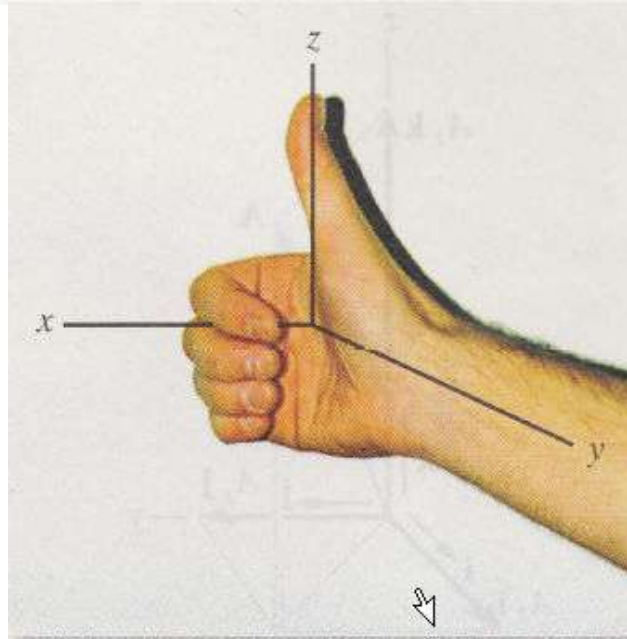
Etkiyen kuvvetlerin bileşkesinin
y eksenini boyunca olması ve şiddetinin
de 800 N olması için F_1 kuvvetinin
şiddetini, θ açısının ne olması gerektiği-
ni bulunuz.

İpucu: iki bilinmeyen var, bu durumda iki denklemler bulunmalı!

Üç Boyutlu Kartzyen Vektörler

Üç boyutlu vektörle işlemler, vektörlerin kartzyen bileşenlerine ayrılması ile çok daha kolaylaşmaktadır.

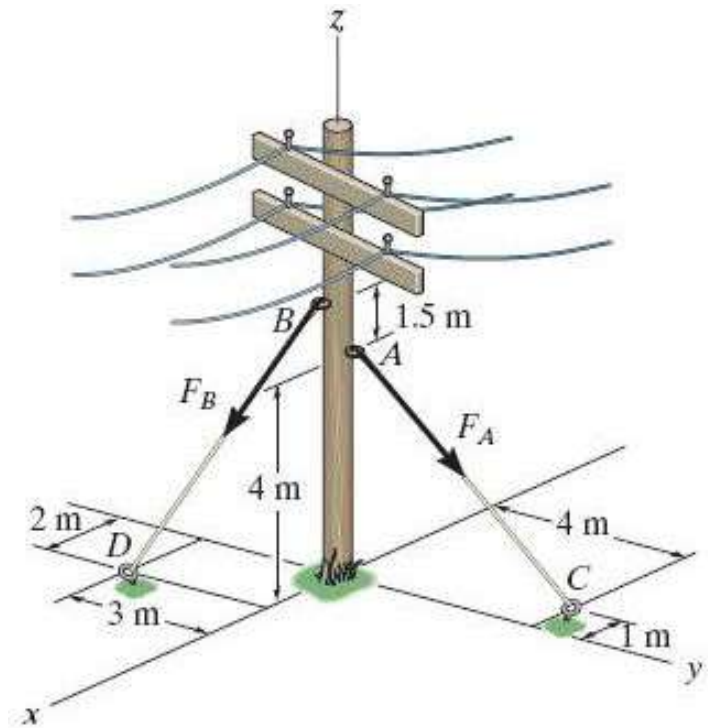
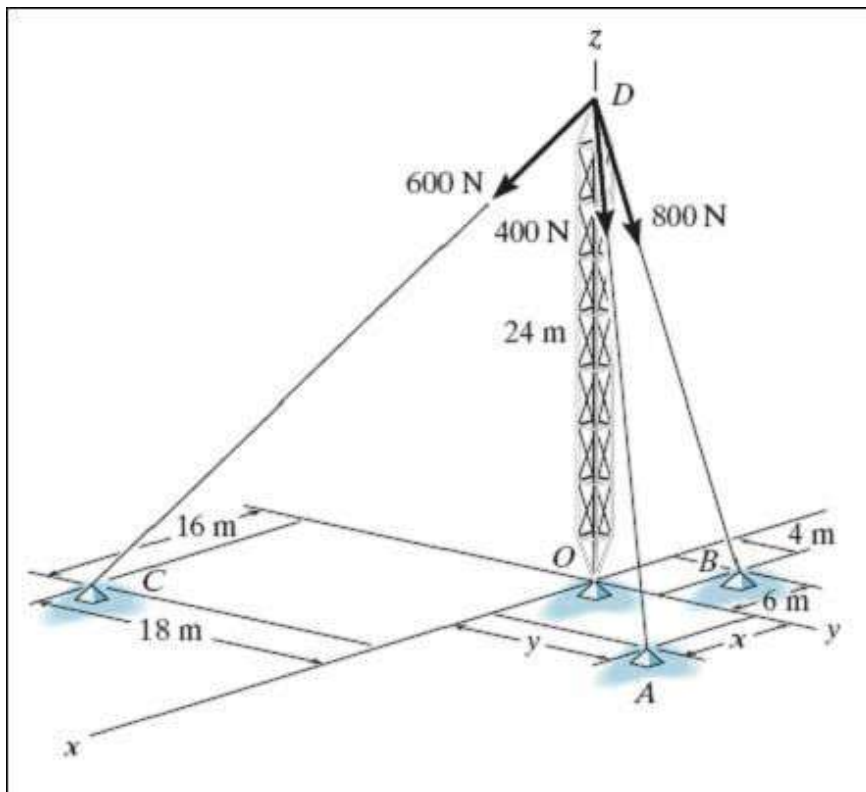
Sağ-el Koordinat Sistemi:



Sağ El Kuralı Yönler

Bu bölümde geliştireceğimiz vektör cebri vektörleri, sağ-el kuralına uygun olacaktır.

ÖRNEK UYGULAMALAR

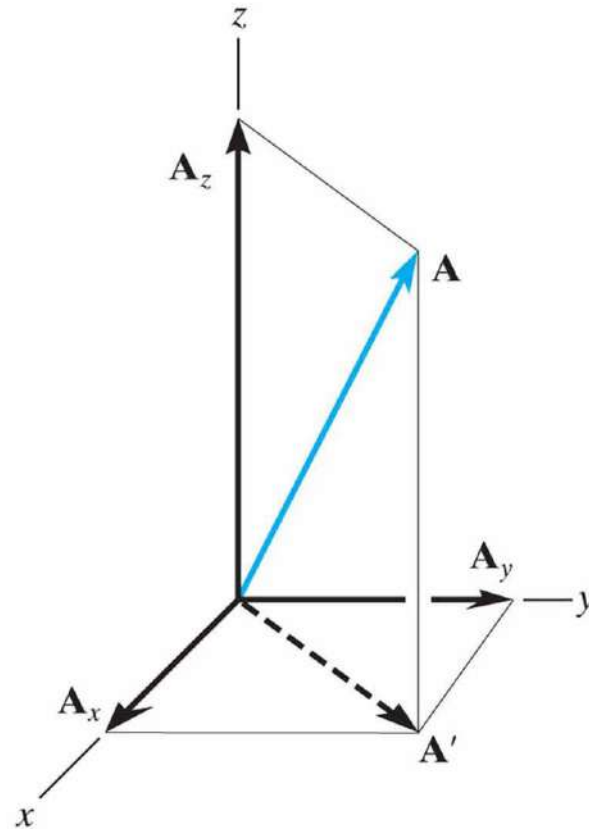


Üç Boyutlu Bir Vektörün Kartezyen Bileşenleri

$$\vec{A} = \vec{A}' + \vec{A}_z \quad \text{ve} \quad \vec{A}' = \vec{A}_x + \vec{A}_y \Rightarrow \vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z$$

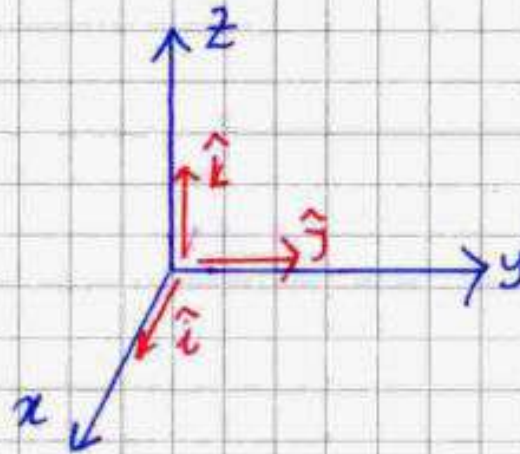
İki kez paralel kenar kuralı uygulandı.

Kartezyen bileşenler!



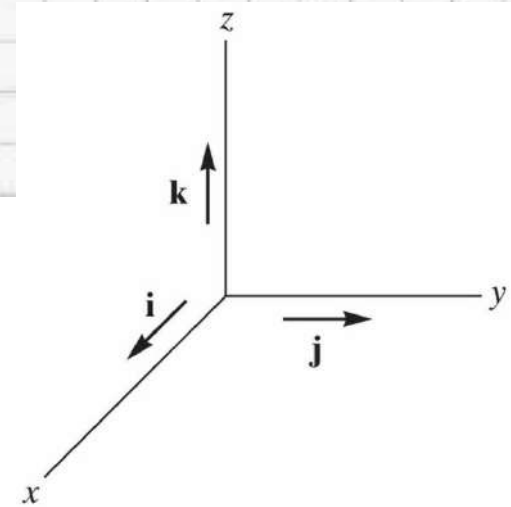
Kartezyen Birim Vektörler:

3 boyutlu Kartezyen koordinat sisteminde, $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ birim vektörleri, x, y ve z yönlerini belirtmek için kullanılır:

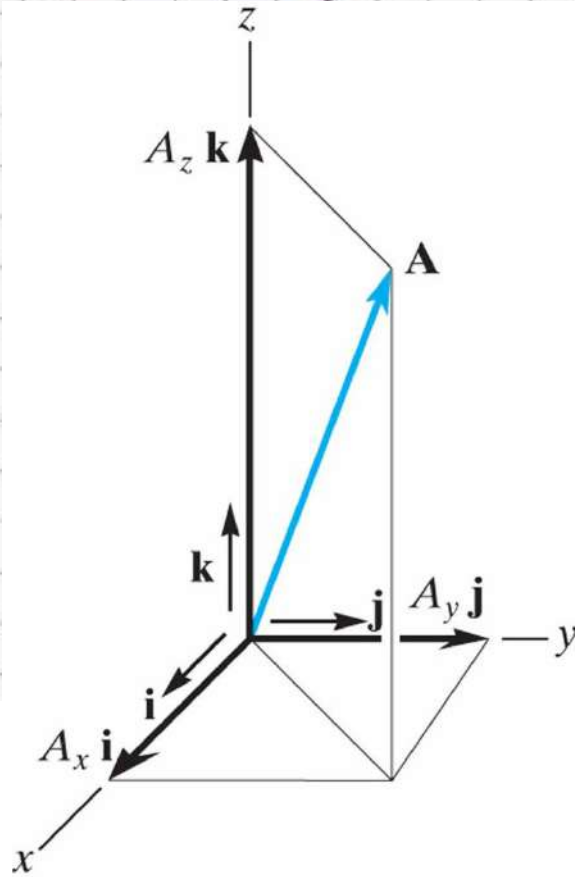


} positive birim vektörler

Kitaptaki
gösterim



Kartzyen Birim vektörle Bir vektörün Gösterilmesi



$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

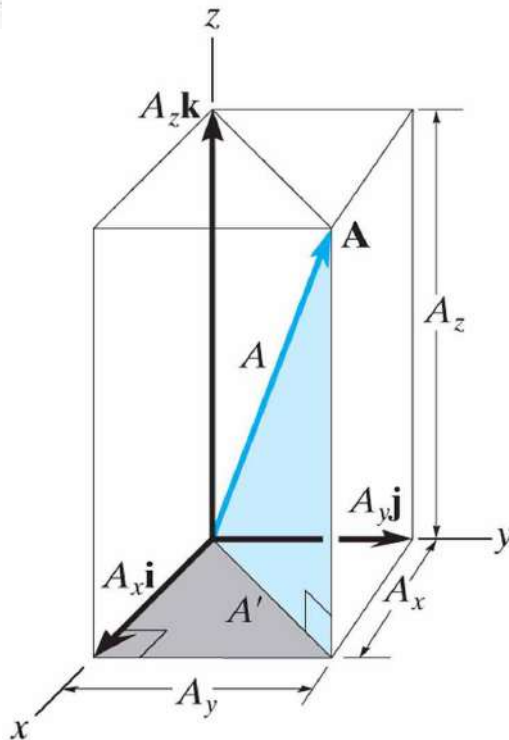
Vektörleri bu şekilde ifade etmenin birçok avantajı vardır (şiddet ve yön ayrıştırılarak yazıldı)

Bir vektörün şiddeti :

$$\left. \begin{aligned} A &= \sqrt{A'^2 + A_z^2} \\ A' &= \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \end{aligned} \right\} \text{Buradan}$$

$$\underline{A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}$$

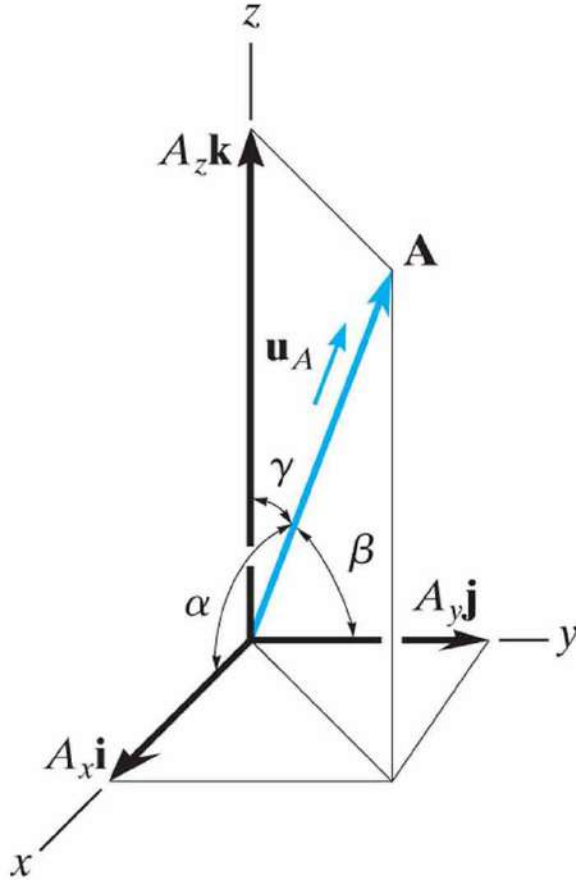
} Şiddet
Her zaman pozitif ve reel
bir sayıdır.



3D Vektörün Şiddetinin Bulunması

Kartezyen vektörün Yönleri:

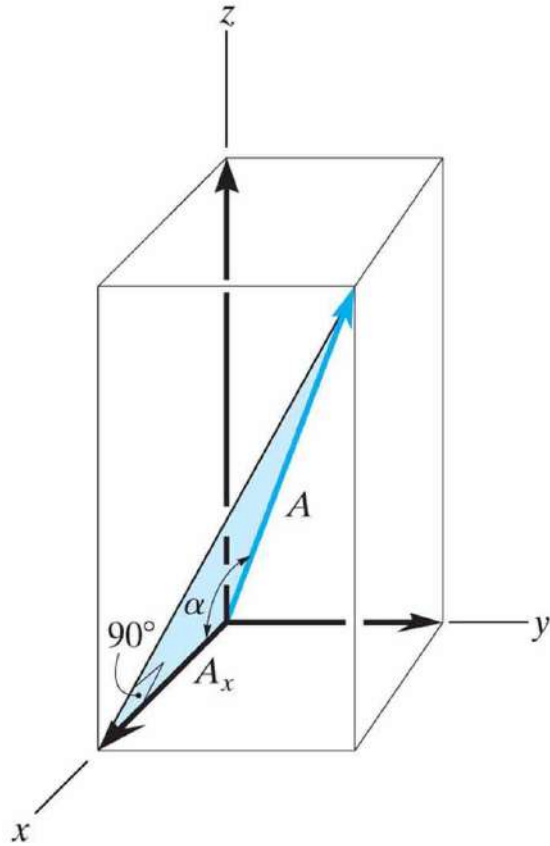
Herhangi bir vektörün yönleri, pozitif x, y ve z eksenleri ile yapmış olduğu açılarla ifade edilir.



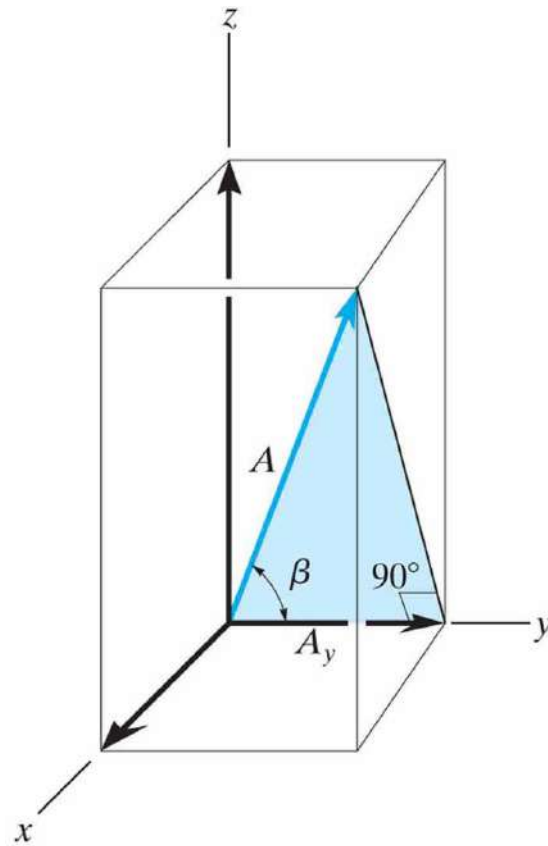
Üç Boyutlu (3D) Kartezyen
Vektörün Yönleri (Yön veya Doğrultu Kosinüsleri)
Direction Cosines

$$\mathbf{u}_A = \frac{\mathbf{A}}{A} = \frac{A_x}{A} \mathbf{i} + \frac{A_y}{A} \mathbf{j} + \frac{A_z}{A} \mathbf{k}$$

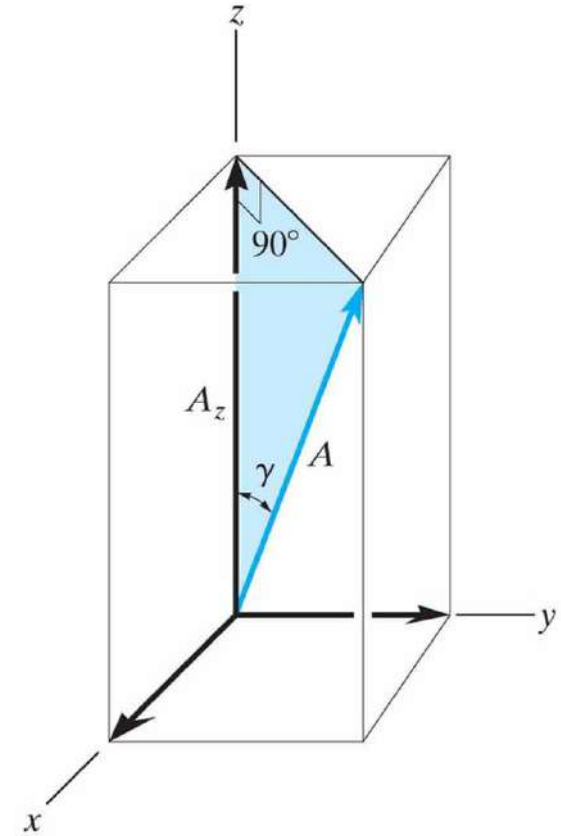
Mavi Renkli Dik Üçgenlerden Yön Kosinüsleri Bulunur:



$$\cos \alpha = \frac{A_x}{A}$$



$$\cos \beta = \frac{A_y}{A}$$



$$\cos \gamma = \frac{A_z}{A}$$

Dikkat ediline, bu açılar her zaman $0^\circ - 180^\circ$ arasında bulunur.

Bu acıların bulunmasının kolay bir yolu ; A vektörünün doğrultusundaki birim vektörün bileşenlerine bakmaktır.

$$\vec{u}_A = \frac{\vec{A}}{A} = \frac{A_x}{A} \hat{i} + \frac{A_y}{A} \hat{j} + \frac{A_z}{A} \hat{k} \quad \parallel \quad \text{Bu vektörün şiddeti bir birimdir}$$

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

$$\vec{u}_A = \cos \alpha \hat{i} + \cos \beta \hat{j} + \cos \gamma \hat{k} \quad \parallel$$

Bu ifadelerden, aşağıdaki çıkarımı yapmak mümkündür:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.0 \quad (\text{Birim vektör!}) \rightarrow$$

(iki tane yön kosinüsü biliniyorsa, üçüncüsü yukarıdaki ifadeden bulunur)

Eğer bir vektörün şiddeti ve "yön kosinüsleri" biliniyorsa,
 $\vec{A}$ vektörü, kartezyen koordinatlarda kolayca ifade edilebilir!

$$\vec{A} = A \vec{u}_A$$

↗ şiddet

↘ yön kosinüslerinden oluşan birim vektör

$$= A \cos \alpha \hat{i} + A \cos \beta \hat{j} + A \cos \gamma \hat{k}$$

$$= A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

Kartezyen Vektörlerin Toplanması

İki vektörü toplama, vektörlerin Kartezyen bileşenler ile ifade edilmesi durumunda son derece kolaylaşmaktadır:

Örnek:

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k} \quad \text{and}$$

$$\mathbf{B} = B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k}, \quad \text{then}$$

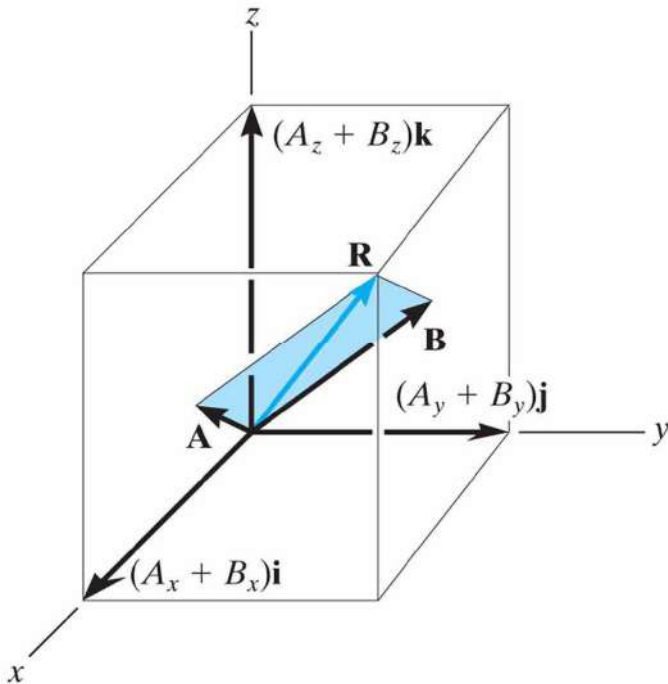
$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x) \mathbf{i} + (A_y + B_y) \mathbf{j} + (A_z + B_z) \mathbf{k}$$

or

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = (A_x - B_x) \mathbf{i} + (A_y - B_y) \mathbf{j} + (A_z - B_z) \mathbf{k}.$$

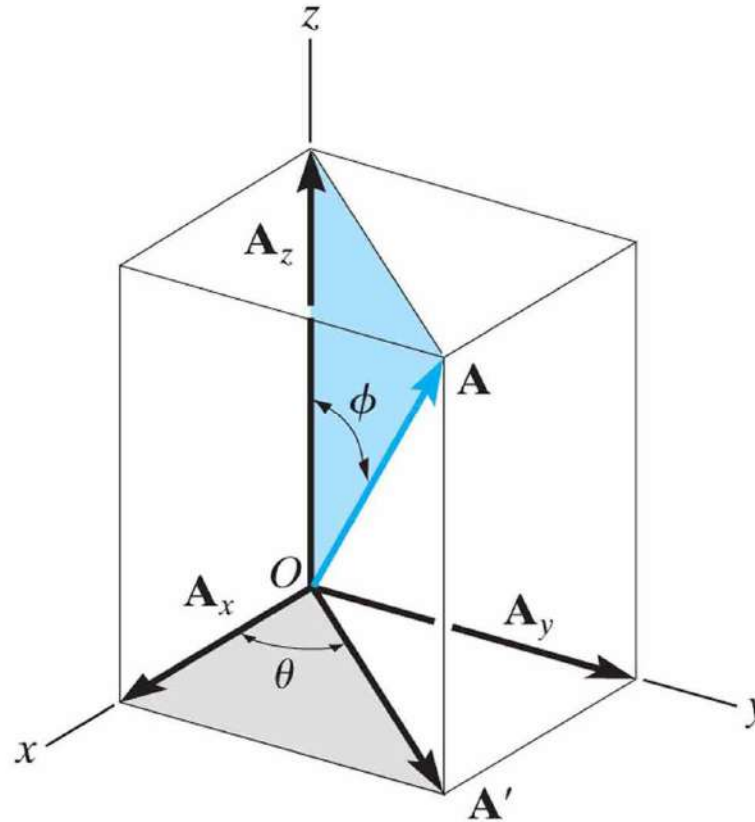
Genel Formülasyon

$$\mathbf{F}_R = \Sigma \mathbf{F} = \Sigma F_x \mathbf{i} + \Sigma F_y \mathbf{j} + \Sigma F_z \mathbf{k}$$

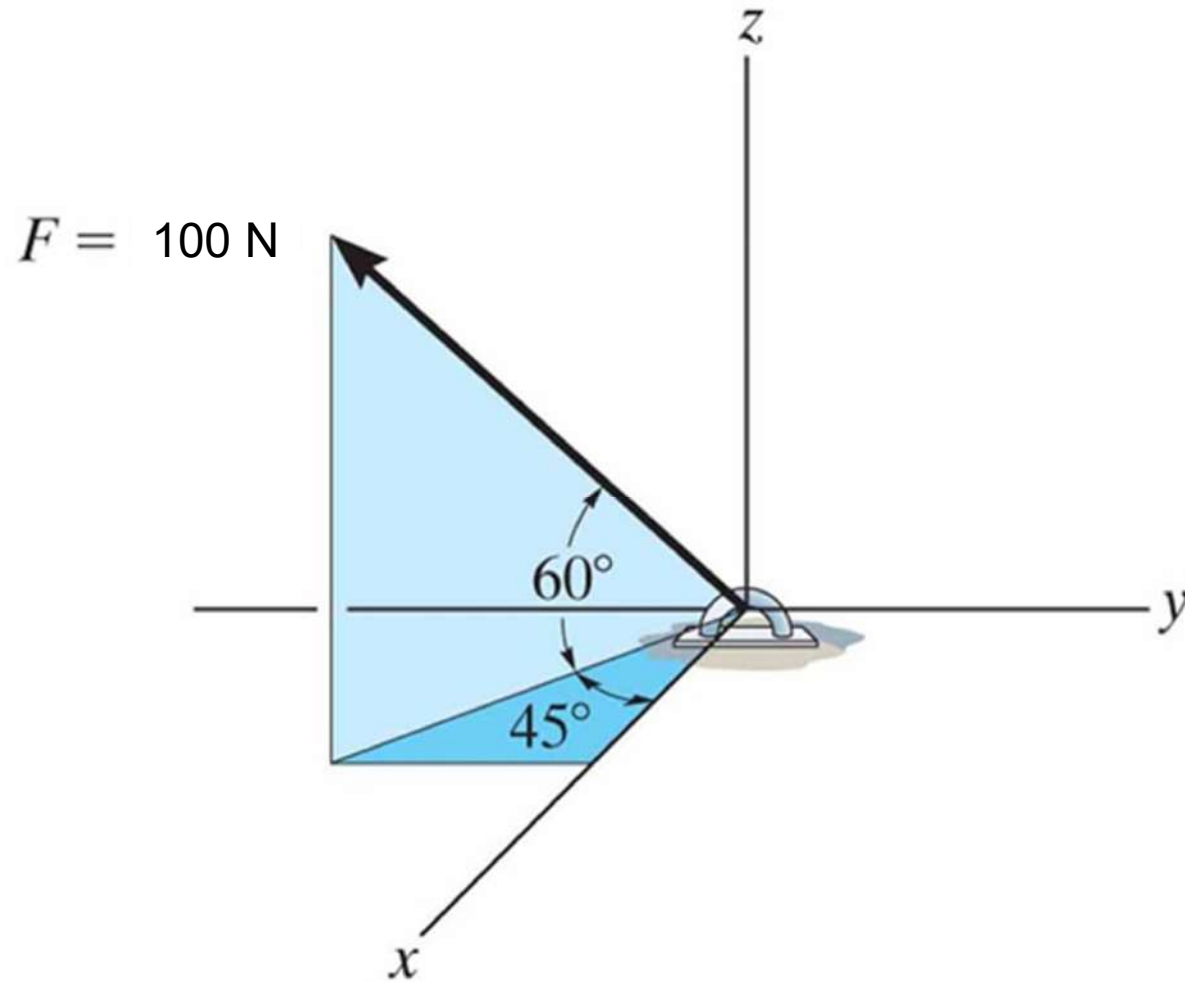


Bazen 3D bir kuvvet vektörünü
kartezyen olarak ifade etmek için
doğrultu kosinüsleri verilmeyebilir.

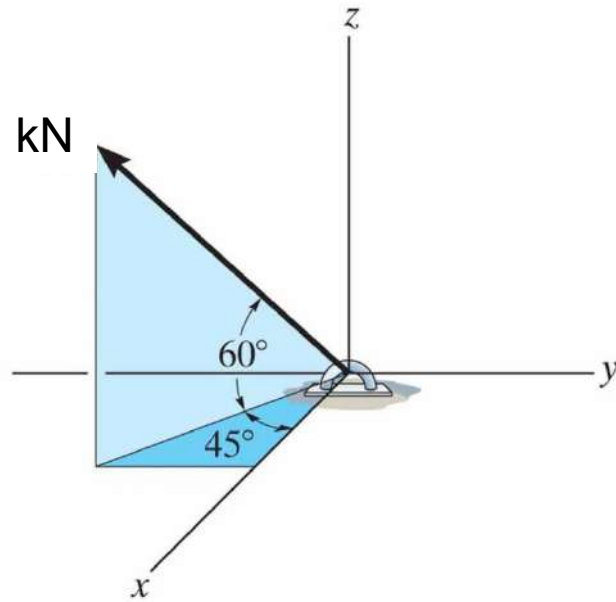
Örnek:



Örnek: 100 N'luk üç boyutlu kuvvet vektörünü **kartezyen vektör** formatında yazınız ve **doğrultu kosinüslerini** hesaplayınız.

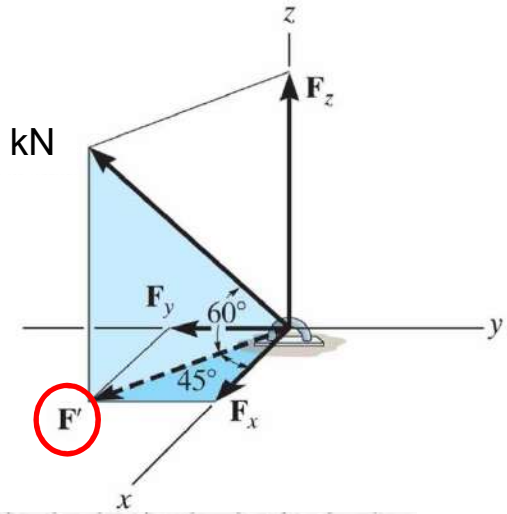


$$F = 100 \text{ kN}$$



F kuvvetini, katkılarını vektör olarak ifade ediniz.

$$F = 100 \text{ kN}$$



$$\vec{F}' = \vec{F}_x + \vec{F}_y \quad \text{ve} \quad \vec{F} = \vec{F}' + \vec{F}_z$$

$$F_z = 100 \times \cos 30 = 86.6 \text{ kN}$$

$$F' = 100 \times \cos 60 = 50 \text{ kN} \quad \left(\vec{F} \text{ kuvvetinin, } (x-y \text{ düzlemindeki bileşeni}) \right)$$

$$F_x = F' \times \cos 45 = 50 \times \cos 45 = 35.4 \text{ kN}$$

$$F_y = F' \times \sin 45 = 50 \times \sin 45 = 35.4 \text{ kN}$$

$$\begin{aligned} \vec{F} &= F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k} \\ &= 35.4 \hat{i} - 35.4 \hat{j} + 86.6 \hat{k} \end{aligned}$$

$$F = \sqrt{35.4^2 + 35.4^2 + 86.6^2} = 100 \text{ kN}$$

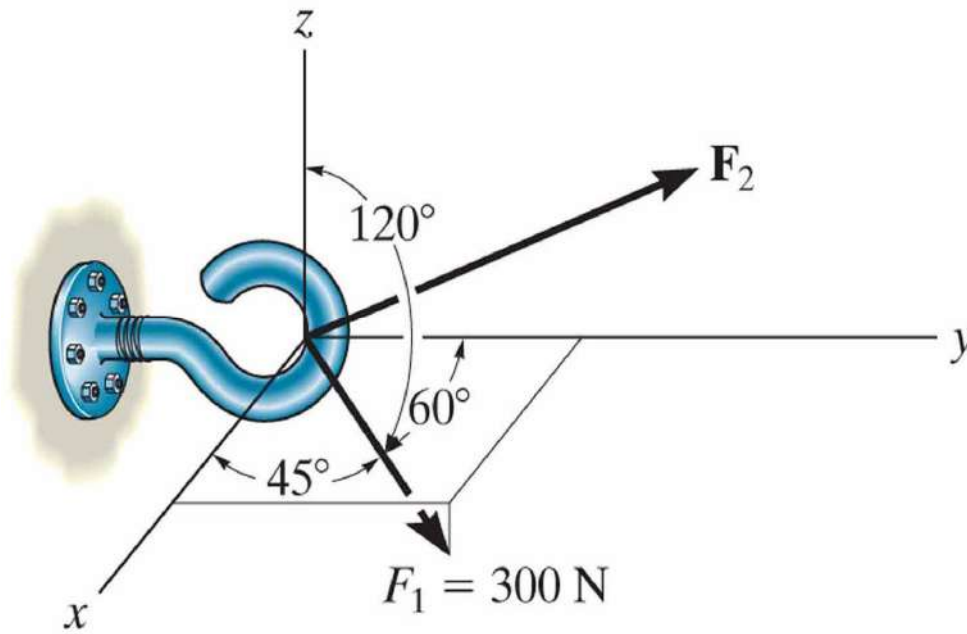
$\vec{F}$ kuvvetinin "yön kosinüsleri" de bulunabilir:

$$\begin{aligned}\vec{u}_F = \frac{\vec{F}}{F} &= \frac{F_x}{F} \hat{i} + \frac{F_y}{F} \hat{j} + \frac{F_z}{F} \hat{k} \\ &= \frac{35.4}{100} \hat{i} - \frac{35.4}{100} \hat{j} + \frac{86.6}{100} \hat{k} \\ &= 0.354 \hat{i} - 0.354 \hat{j} + 0.866 \hat{k} \quad (\text{Birim vektör!})\end{aligned}$$

Doylece,

$$\alpha = \cos^{-1}(0.354) = 69.3^\circ, \quad \beta = \cos^{-1}(-0.354) = 111^\circ, \quad \gamma = \cos^{-1}(0.866) = 30^\circ$$

Ödev:



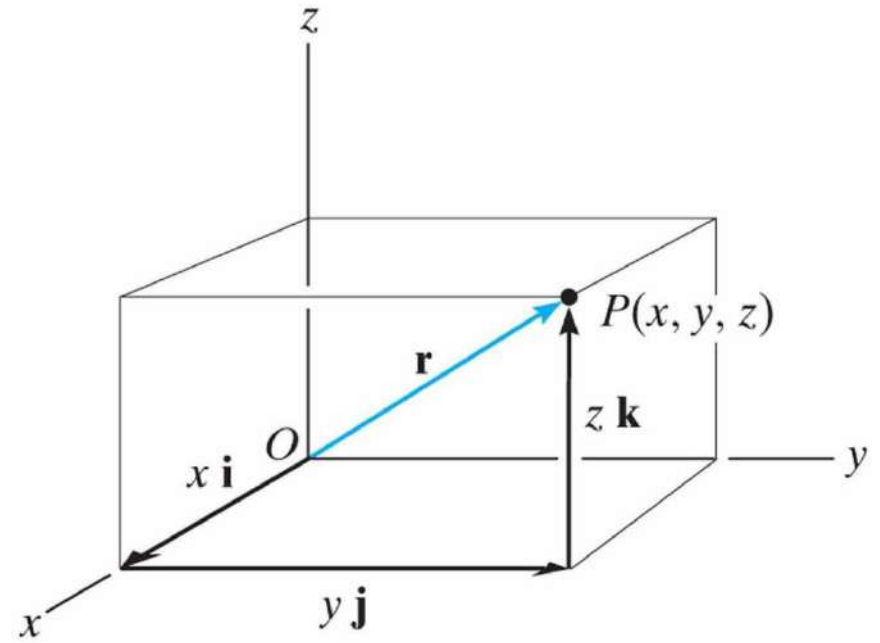
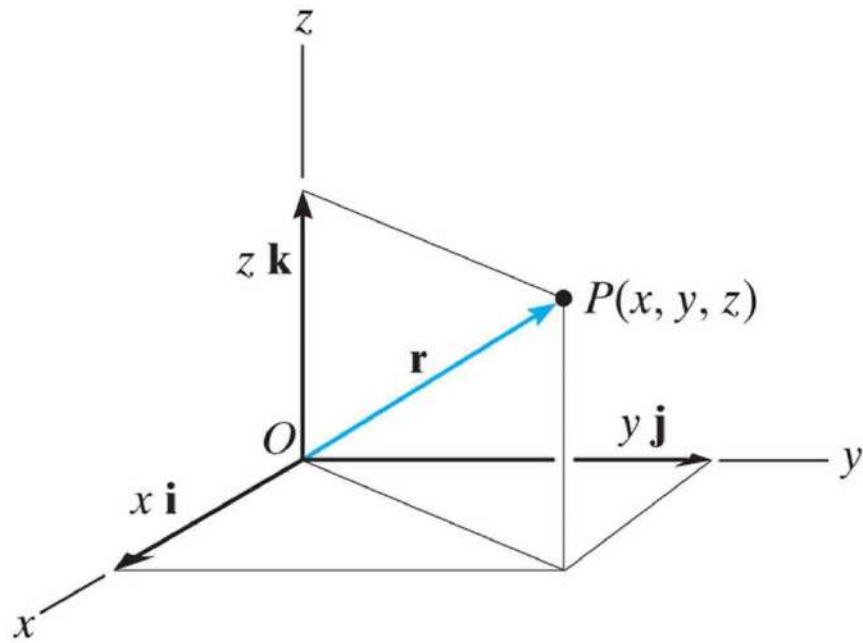
$\vec{F}_1$ ve $\vec{F}_2$ kuvvetlerinin bileşkennin şiddeti 800 N ve yönü de z -ekseni doğrultusunda olduğuna göre, $\vec{F}_2$ vektörünün şiddetini ve "doğrultu" kosinüslerini bulunuz.

$$F_2 = 700 \text{ N} \text{ ve } \alpha = 108^\circ, \beta = 21.8^\circ, \gamma = 77.6^\circ$$

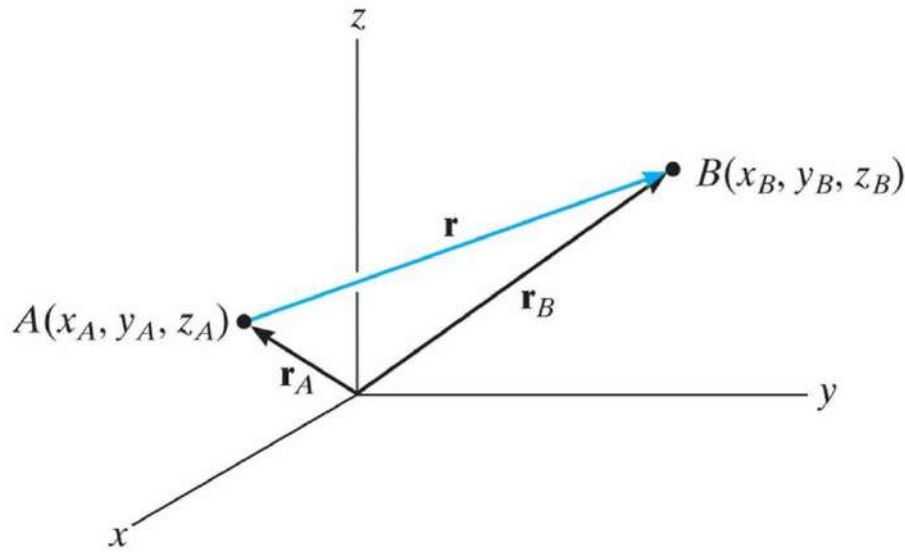
Pozisyon Vektörleri

İki nokta arasında uçan bir kare vektörünün gösteren formülasyonunda kullanılabılır.

Pozisyon vektörü, uzaydaki bir noktanın, diğer bir noktaya göre relatif pozisyonunu tanımlayan sabit bir vektördür:



Daha genel bir durum olarak pozisyon vektörünü A ve B gibi iki nokta arasında da gösterilebilir.



$\vec{r}$ veya $\vec{r}_{AB}$ olarak gösterilir
ilki nereden başladığını nereye gittiğini

$\vec{r}_A$ ve $\vec{r}_B$ ise tek bir noktada gösterilmekte
anlatır, orijin "0" den başlanmaktadır

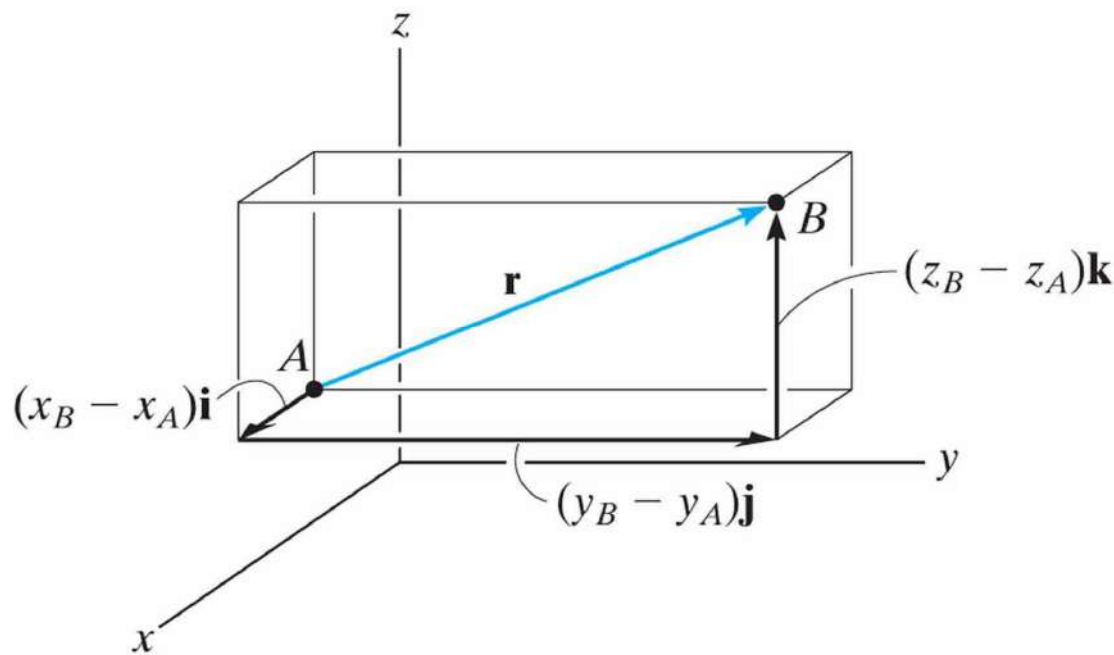
$$\vec{r}_B = \vec{r} + \vec{r}_A \quad (\text{vektör toplama}),$$

$$\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A \quad \text{dur, } \underline{\text{kartezyen koordinatlarla ifade edildiği}} \\ \underline{\text{durumda ise;}}$$

$$\vec{r} = (x_B - x_A)\hat{i} + (y_B - y_A)\hat{j} + (z_B - z_A)\hat{k}$$

$$\vec{r} = (x_B - x_A)\hat{i} + (y_B - y_A)\hat{j} + (z_B - z_A)\hat{k}$$

A noktesinin koordinatları, B nok. koor. larından çıkarıldı.



A'dan bakılarak, B'ye
ulaşıyor!

A ve B noktalarının, oluşturulan koordinat sistemine göre, koordinatları biliniyorsa, A'dan B'ye giden pozisyon vektörü bulunabilir ve bu yöndeki birim vektör kolaylıkla elde edilir:

$\vec{r} : A'dan B'ye$

$\vec{u} = \frac{\vec{r}}{r}$; birim vektör, bu birim vektörün bileşenleri, α, β ve

γ yönlerini vermektedir.

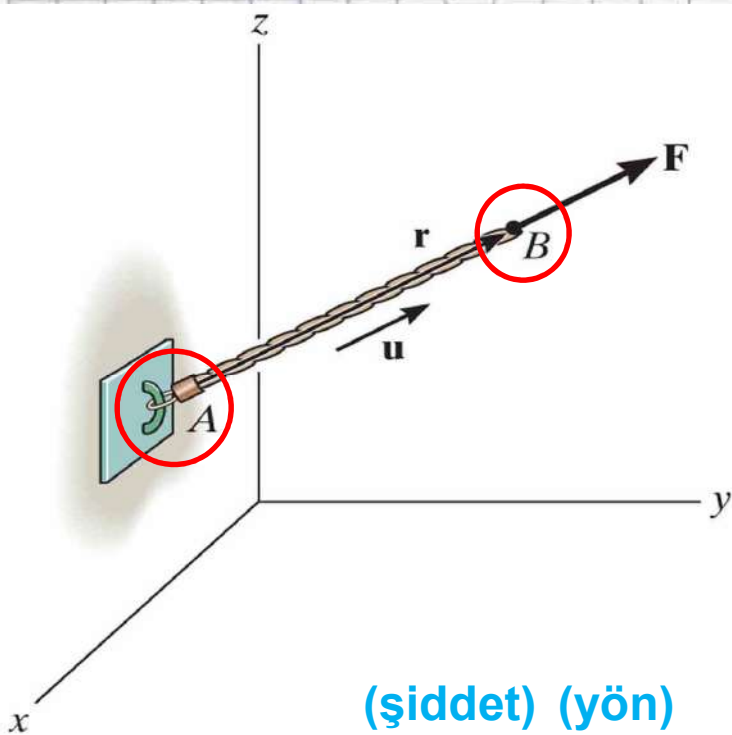


Bir Koordinat
Sistemine Göre
Pozisyon Vektörünün
Bulunması

İki Nokta Arasında Uzanan Kuvvet Vektörü



Üç boyutlu uygulamalarda her zaman karşımıza çıkan bir problem, etki aldığı iki nokta ile belirlenmiş bir kuvvetin vektörel ifadesidir.



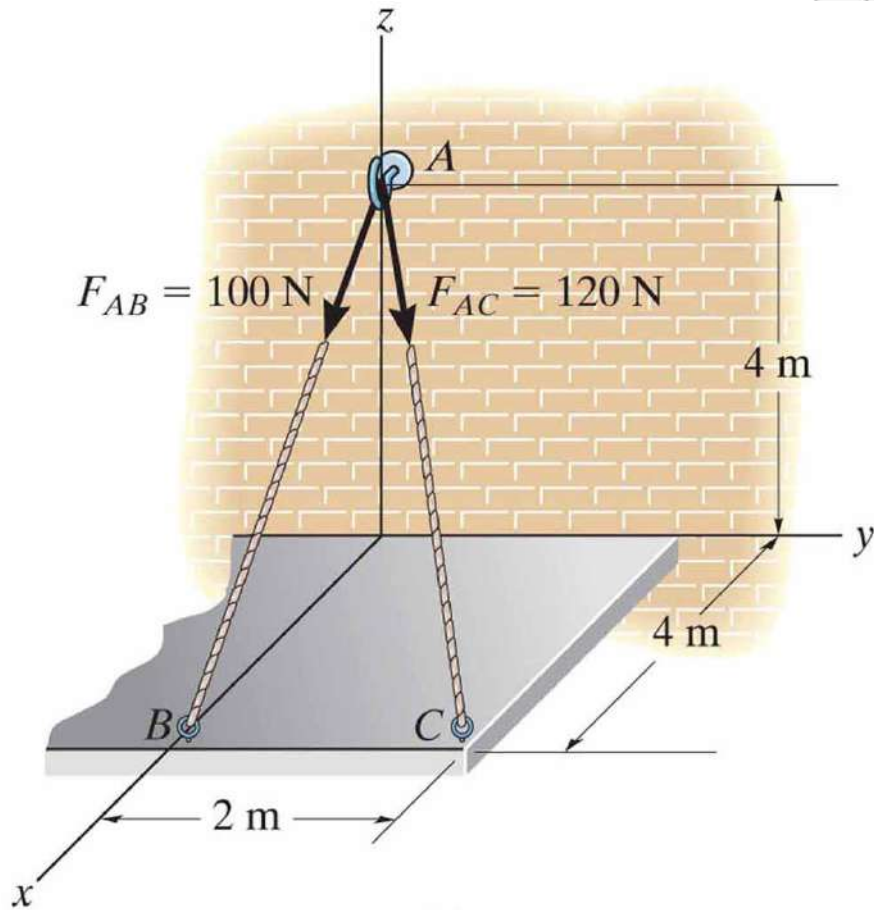
Doktrunu A ve B noktalarıyla belirlenmiş, F kuvveti F kuvvetinin etkayen vektör olarak ifadesi şu şekilde yapılır

(şiddet) (yön)

$$\vec{F} = \underbrace{F}_{\text{Birimli}} \underbrace{\vec{u}}_{\text{Birimli}} = F \left(\frac{\vec{r}}{r} \right) = F \left(\frac{(x_B - x_A)\hat{i} + (y_B - y_A)\hat{j} + (z_B - z_A)\hat{k}}{\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}} \right)$$

↓
kuvvet biriminde
→
Birimli

Ödev:

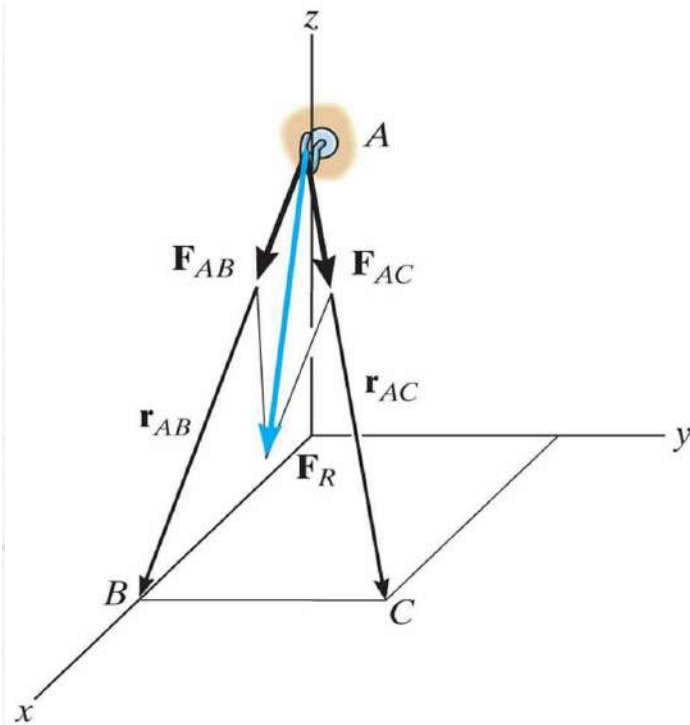


Şekilde gösterilen cıvı, AB ve AC zincirleriyle tutulmaktadır ve zincirlerde oluşan kuvvet değerleri verilmiştir. Bu durumda, A noktasına etki eden bileşke kuvveti gösteren vektör olarak ifade edin.

$$A \rightarrow \{0, 0, 4 \text{ m}\}$$

$$B \rightarrow \{4, 0, 0\}$$

$$C \rightarrow \{4, 2, 0\}$$



$$\vec{r}_{AB} = (x_B - x_A)\hat{i} + (y_B - y_A)\hat{j} + (z_B - z_A)\hat{k}$$

$$\vec{r}_{AB} = 4\hat{i} - 4\hat{k}; \quad r_{AB} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 5.66 \text{ m}$$

$$\vec{r}_{AC} = 4\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}; \quad r_{AC} = \sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2}$$

$$= 6 \text{ m}$$

$$\vec{F}_{AB} = F_{AB} \cdot \frac{\vec{r}_{AB}}{r_{AB}} = 100 \cdot \frac{4\hat{i} - 4\hat{k}}{5.66} = 70.7\hat{i} - 70.7\hat{k} \text{ N}$$

$$\vec{F}_{AC} = F_{AC} \cdot \frac{\vec{r}_{AC}}{r_{AC}} = 120 \cdot \frac{4\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}}{6} = 80\hat{i} + 40\hat{j} - 80\hat{k} \text{ N}$$

$$\vec{F}_R = \vec{F}_{AB} + \vec{F}_{AC} = (70.7 + 80)\hat{i} + 40\hat{j} + (-70.7 - 80)\hat{k}$$

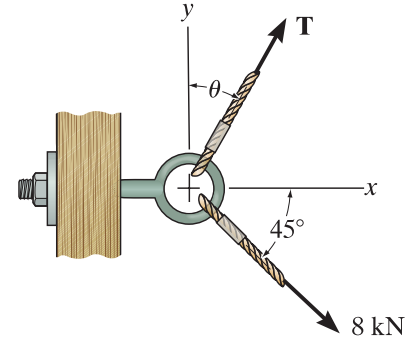
$$\vec{F}_R = 150.7\hat{i} + 40\hat{j} - 150.7\hat{k}$$

N

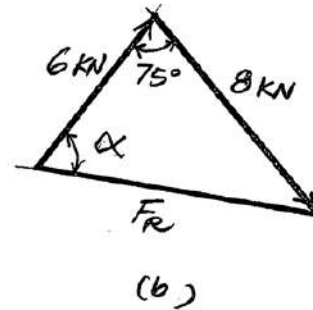
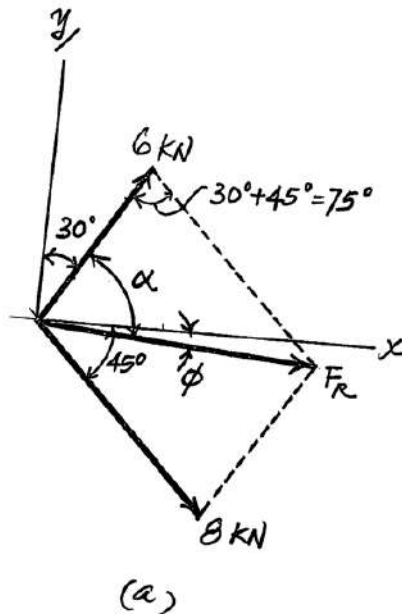
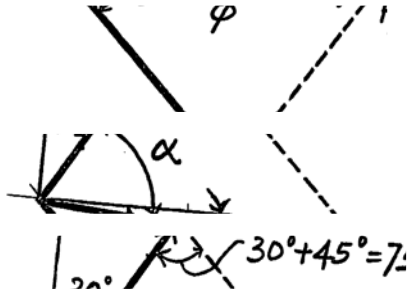
STATİK

BÖLÜM 2. KUVVET VEKTÖRLERİ ÖRNEK SORU ÇÖZÜMLERİ

1. Eğer $\theta = 30^\circ$ ve $T = 6 \text{ kN}$ ise sisteme etki eden bileşke kuvveti (resultant force) ve bileşke kuvvetin pozitif x-eksenine göre yönünü bulunuz.

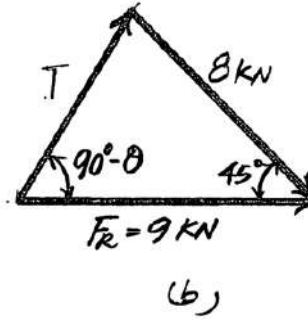
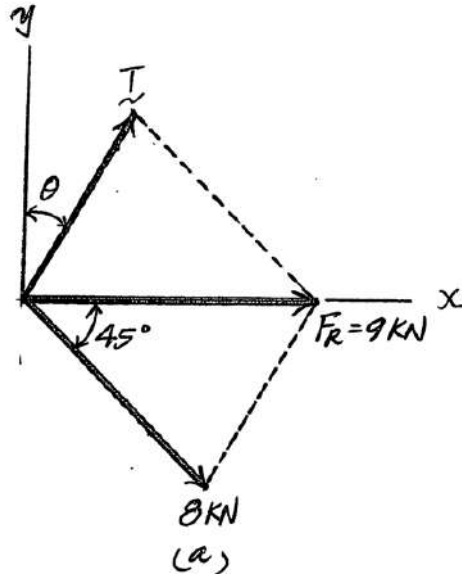
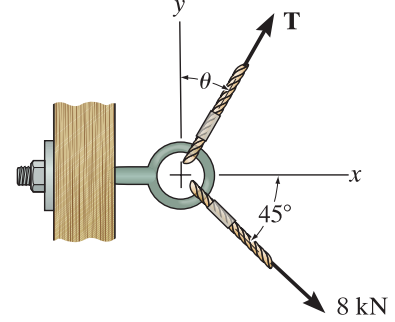


ÇÖZÜM:



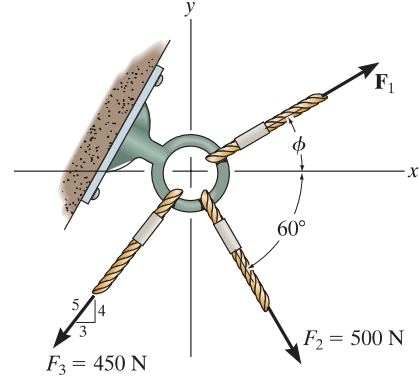
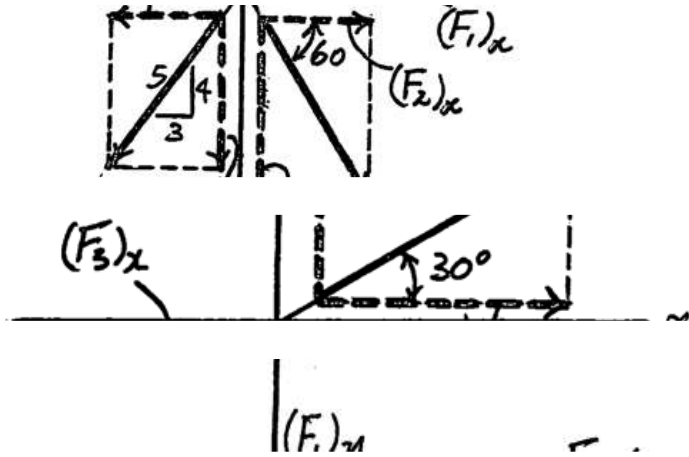
2. Eğer pozitif x-ekseni üzerinde oluşan bileşke kuvvetin büyüklüğü 9 kN ise T kuvvetinin büyüklüğünü ve θ açısını hesaplayınız.

ÇÖZÜM:



3. Eğer $F_1=600$ N ve $\phi = 30^\circ$ ise sisteme etki eden bileşke kuvveti ve bileşke kuvvetin pozitif x-eksenine göre yönünü bulunuz.

ÇÖZÜM:



Components: By referring to Fig. a, the x and y components of each force can be written as

$$\begin{aligned} \vec{F}_1)_x &= 600 \cos 30^\circ = 519.62 \text{ N} & (\vec{F}_1)_y &= 600 \sin 30^\circ = 300 \text{ N} \\ \vec{F}_2)_x &= 500 \cos 60^\circ = 250 \text{ N} & (\vec{F}_2)_y &= 500 \sin 60^\circ = 433.0 \text{ N} \\ \vec{F}_3)_x &= 450 \left(\frac{3}{5} \right) = 270 \text{ N} & (\vec{F}_3)_y &= 450 \left(\frac{4}{5} \right) = 360 \text{ N} \end{aligned}$$

Free: Summing the force components algebraically along the x and y axes,

$$\begin{aligned} \sum (F_R)_x &= \sum F_x; & (F_R)_x &= 519.62 + 250 - 270 = 499.62 \text{ N} \rightarrow \\ \sum (F_R)_y &= \sum F_y; & (F_R)_y &= 300 - 433.01 - 360 = -493.01 \text{ N} \downarrow \end{aligned}$$

Resultant of the resultant force F_R is

$$F_R = \sqrt{(F_R)_x^2 + (F_R)_y^2} = \sqrt{499.62^2 + 493.01^2} = 701.91 \text{ N} \approx 702 \text{ N}$$

Ans.

angle θ of F_R , Fig. b, measured clockwise from the x-axis, is

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{(F_R)_y}{(F_R)_x} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{493.01}{499.62} \right) = 44.6^\circ$$

Ans.

4. Bileşke kuvvetin düşey pozitif y-ekseni üzerinde ve şiddetinin 800 N olabilmesi için F_1 kuvvetinin büyüklüğünü ve θ açısını bulunuz.

ÇÖZÜM:

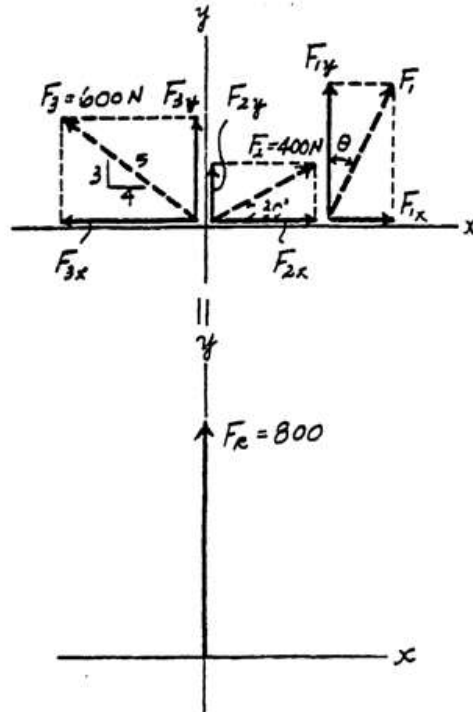
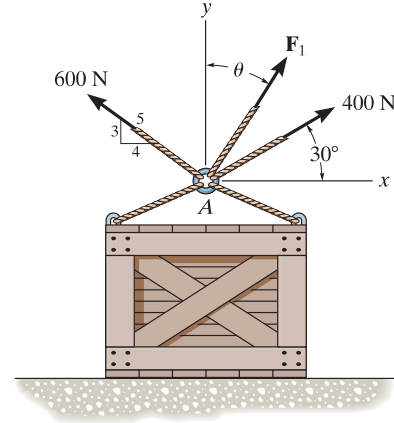
$$+ \uparrow F_R = \Sigma F_y; \quad F_R = 800 = F_1 \cos \theta + 400 \sin 30^\circ + 600 \left(\frac{3}{5} \right)$$

$$F_1 \cos \theta = 240 \quad [2]$$

Using Eq. [1] and [2] yields

$$\theta = 29.1^\circ \quad F_1 = 275 \text{ N} \quad \text{Ans}$$

$$F_1 \cos \theta = 240$$



Engineering Mechanics: Statics in SI Units, 12e

3

Düzlemde Denge

Bu bölümde öğrenilecek konular

- Bir parçacık için Serbest Cisim Diyagramı (SCD) (Free-Body Diagram - FBD) kavramı
- Denge denklemlerini kullanarak düzlemde denge problemlerinin çözümü

Bölüm içerisindeki konu başlıkları

1. Düzlemdeki bir parçacığın denge şartları
2. Serbest Cisim Diyagramı (SCD) (The Free-Body Diagram)
3. Aynı düzlemde bulunan sistemler (Coplanar systems)
4. Üç boyutlu kuvvet sistemleri

3.1 Düzlemdeki bir parçacığın denge şartları

- Bir parçacık şu durumlarda dengededir:
 - Durgun haldeyse
 - Sabit bir hızla hareket ediyorsa,
- Newton'un birinci hareket yasasına göre;

$$\sum \mathbf{F} = 0$$

Burada, $\sum \mathbf{F}$ parçacığa etkiyen tüm kuvvetlerin vektörel toplamıdır.

3.1 Düzlemdeki bir parçacığın denge şartları (d'm)

- Newton'un ikinci hareket yasası

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

- Kuvvet, Newton'un birinci hareket yasasına uyduğunda;

$$m\mathbf{a} = 0$$

Öyleyse, $\mathbf{a} = 0$ olmalıdır.

- Bu durumda şu söylenebilir: Parçacık ya sabit bir hızla hareket ediyordur ya da durağan haldedir.

3.2 Serbest Cisim Diyagramı (SCD)

- Bir cisim üzerine etki eden tüm bilinmeyen kuvvetlerin ($\sum \mathbf{F}$) en iyi gösterimi SCD'nin çizimi ile mümkündür.
- Bu konuda iki temel konu vardır:
 - Yaylar
 - Kablo ve Makaralar

3.2 Serbest Cisim Diyagramı (SCD) (d'm)

- Yaylar

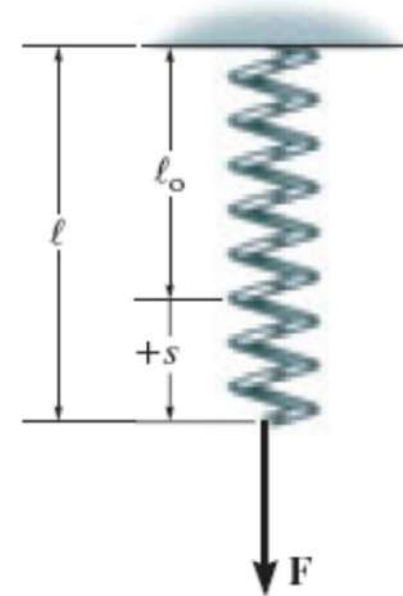
- Lineer (Doğrusal) Elastik Yaylar:

Uzunluktaki değişim yaya etki eden kuvvetle doğru orantılıdır.

- *Yay sabiti veya Yay rijitliği k* : Yayın elastisitesini tanımlar

- Yay uzadığında veya kısaldığında yay kuvvetinin büyüklüğü şöyle hesaplanır:

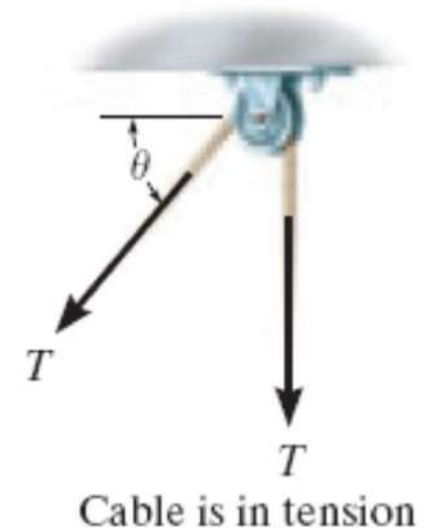
$$\rightarrow F = k.s$$



3.2 Serbest Cisim Diyagramı (SCD) (d'm)

- Kablo ve Makaralar

- Kabloların (veya halatların) ihmal edilebilir ağırlığı olduğu ve uzamadığı kabul edilmektedir.
- Çekme daima kablo doğrultusunda etkimektedir.
- Çekme kuvveti denge durumu için sabit bir büyüklüğe sahip olmalıdır.
- Her θ açısı için, kablo sabit bir T çekme kuvvetine maruzdur.



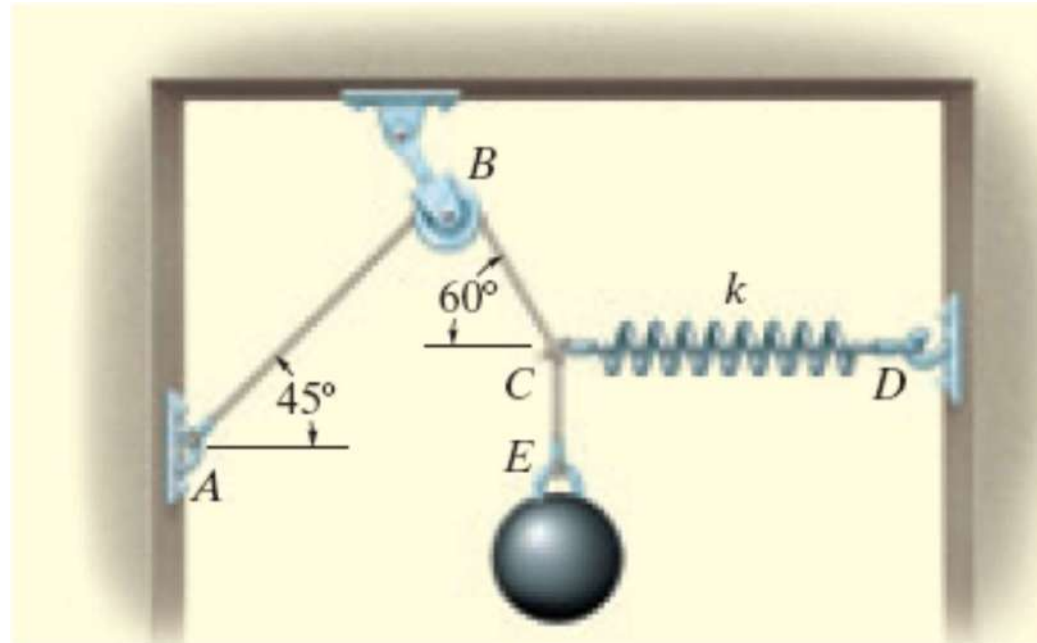
3.2 Serbest Cisim Diyagramı (SCD) (d'm)

SCD Çizim İşlemleri:

1. Şeklin anahatlarını çiziniz
2. Bütün kuvvetleri çizimde gösteriniz
 - Aktif ve etkin kuvvetler (active forces): hareket ettiren kuvvetler
 - Tepki kuvvetleri (reactive forces): hareketi engelleyen kısıtlamalar
3. Her kuvvetin tanımlanması
 - Uygun büyüklük ve yön ile belirlenen kuvvetler
 - Büyüklük ve yönleri temsil etmek için harflerin kullanımı

Örnek 3.1

6-kg kütleli bir küre şekildeki gibi mesnetlenmiştir. Kürenin, CE halatının ve C düğüm noktasının SCD'sini çiziniz.



Çözüm

Kürenin SCD'si

Kürenin ağırlığı ve CE halat kuvveti olmak üzere iki kuvvet etkimektedir.

$$\text{Ağırlık: } W = 6^{\text{kg}} (9.81^{\text{m/s}^2}) = 58.9 \text{ N}$$

CE halatının SCD'si

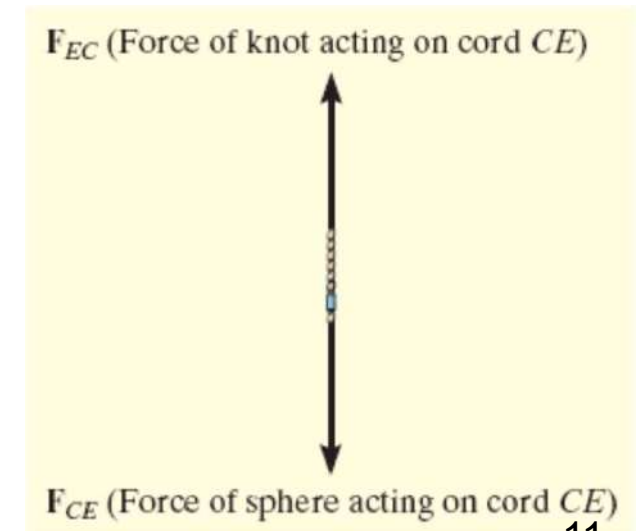
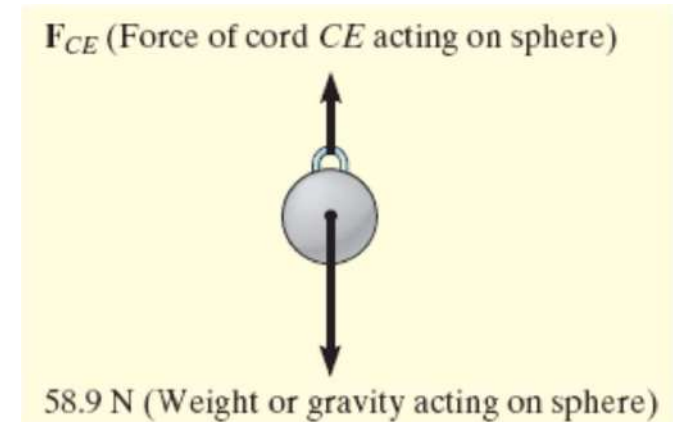
İki kuvvet etkimektedir: küre ve düğüm noktası

Newton'un 3. hareket yasasına göre;

F_{CE} eşittir fakat ters yönlüdür.

F_{CE} ve F_{EC} halatta çekme kuvvetleridir.

Denge için, $F_{CE} = F_{EC}$

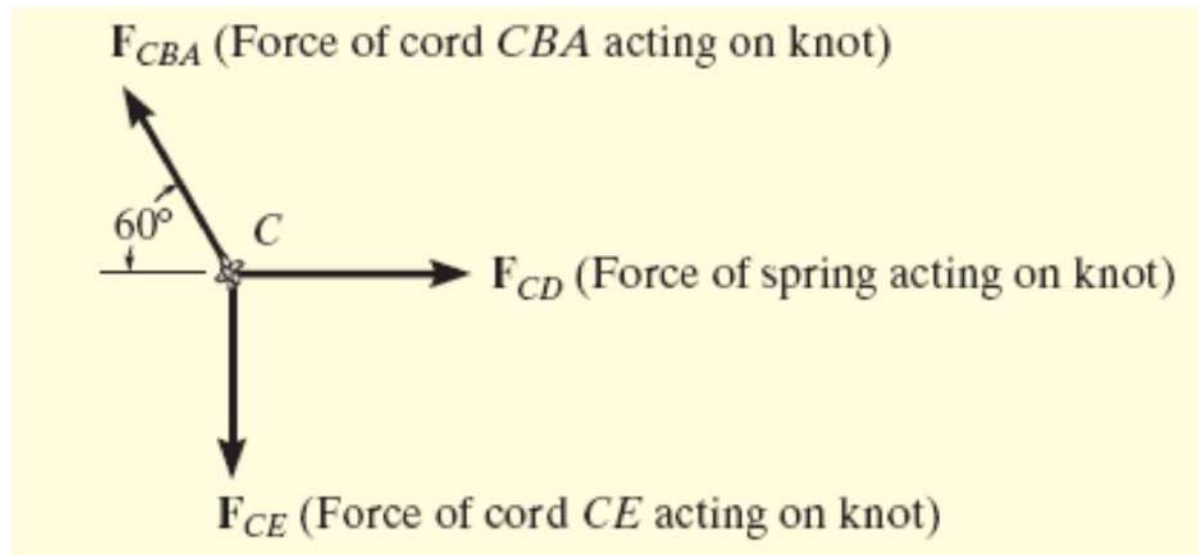


Çözüm (d'm)

C düğüm noktasının SCD'si

Üç kuvvet etkimektedir: CBA halat kuvveti, CE halat kuvveti and CD yay kuvveti

- Küre ağırlığının düğüm noktasına direkt olarak etki etmediğini, ancak CE halatı vasıtasıyla etki ettiğini bilmek önem arz etmektedir.



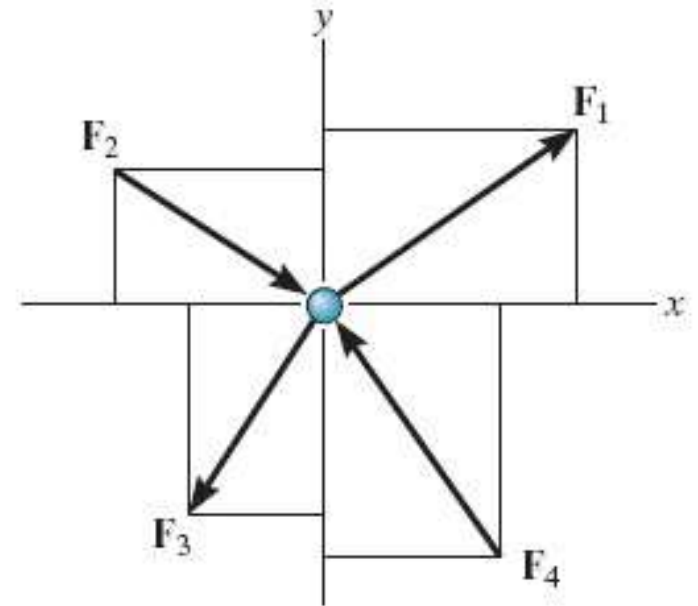
3.3 Aynı Düzlemde Bulunan Sistemler (Coplanar Systems)

- Bir parçacık x-y düzleminde aynı düzlem içerisinde bulunan kuvvetlere maruzdur.
- Denge için i ve j bileşenlerini içeren çözüm yapılır.

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

- Skaler denge denklemleri, x ve y bileşenlerinin cebirsel toplamalarının sıfıra eşit olmasını gerektirmektedir.



3.3 Aynı Düzlemde Bulunan Sistemler (Coplanar Systems) (d'm)

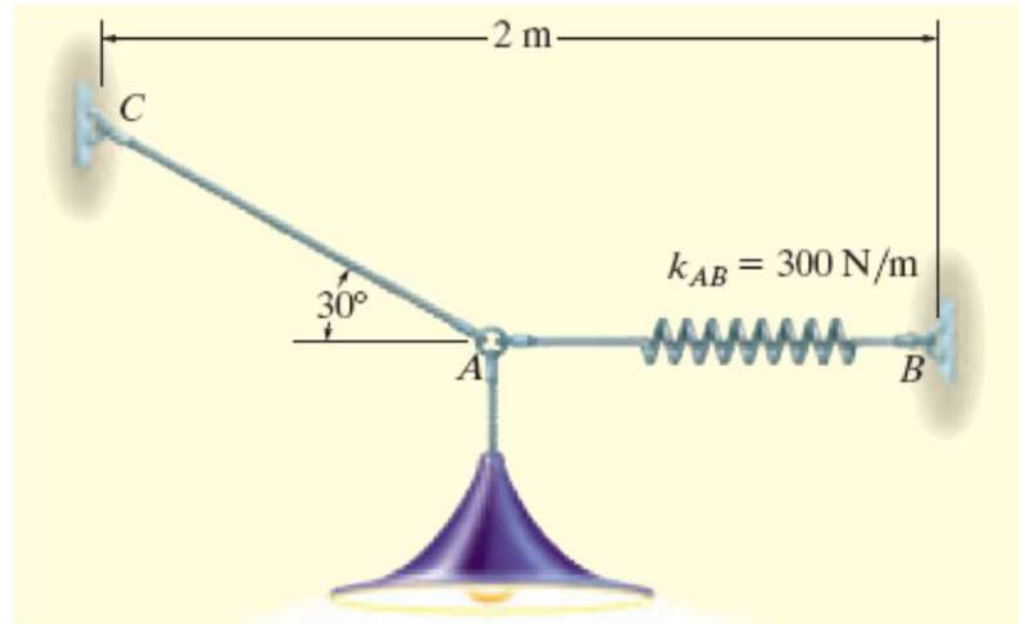
- Analiz Prosedürleri:
 1. SCD'nin çizimi
 - x ve y eksenlerini tesis ediniz
 - Bilinmeyen ve bilinen tüm kuvvetleri isimlendiriniz
 2. Denge denklemlerinin kurulması
 - Yay kuvveti için $F = k \times s$ formülünü uygulayınız
 - Negatif bileşke kuvvet elde edildiğinde işareti dikkate alınmalıdır
 - Aşağıdaki denge denklemlerini uygulayınız

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

Örnek 3.4

8 kg'lık bir lambanın asılı kalabilmesi için AC kablosunun gerekli boyunu bulunuz. AB yayının uzamamış orijinal boyu $l'_{AB} = 0.4$ m ve yay $k_{AB} = 300$ N/m rijitliğe sahiptir.



Çözüm

A noktası için SCD

Üç kuvvet etkimektedir: AC kablo kuvveti, AB yay kuvveti ve lambanın ağırlığı.

Eğer AB kablosundaki kuvvet biliniyorsa, yay kuvveti **$F = k \times s$** formülü ile bulunabilir.

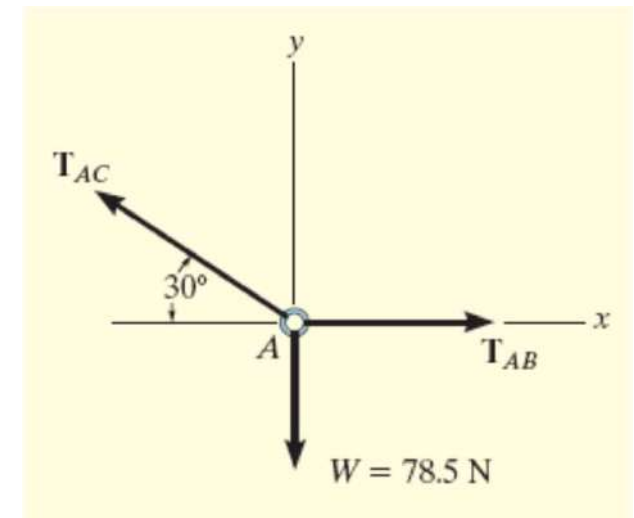
$$+\rightarrow \quad \sum F_x = 0; \quad T_{AB} - T_{AC} \cos 30^\circ = 0$$

$$+\uparrow \quad \sum F_y = 0; \quad T_{AC} \sin 30^\circ - 78.5 \text{ N} = 0$$

Bu iki denklem çözüldüğünde;

$$T_{AC} = 157.0 \text{ N}$$

$$T_{AB} = 136.0 \text{ N}$$



Çözüm (d'm)

$$T_{AB} = k_{AB}s_{AB}; 136.0 \text{ N} = 300 \text{ N/m} (s_{AB})$$

$$s_{AB} = 0.453 \text{ m}$$

Uzamış AB boyu,

$$l_{AB} = l'_{AB} + s_{AB}$$

$$\begin{aligned} l_{AB} &= 0.4 \text{ m} + 0.453 \text{ m} \\ &= 0.853 \text{ m} \end{aligned}$$

Yatay BC uzunluğu:

$$2 \text{ m} = l_{AC} \cos 30^\circ + 0.853 \text{ m}$$

$$l_{AC} = 1.32 \text{ m}$$

3.4 Üç Boyutlu Sistemler

- Bir parçacığın dengesi için;

$$\sum \mathbf{F} = 0$$

- $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ ve $\mathbf{k}$ bileşenleri ile çözümlendiğinde şu şekilde yazılabilir:

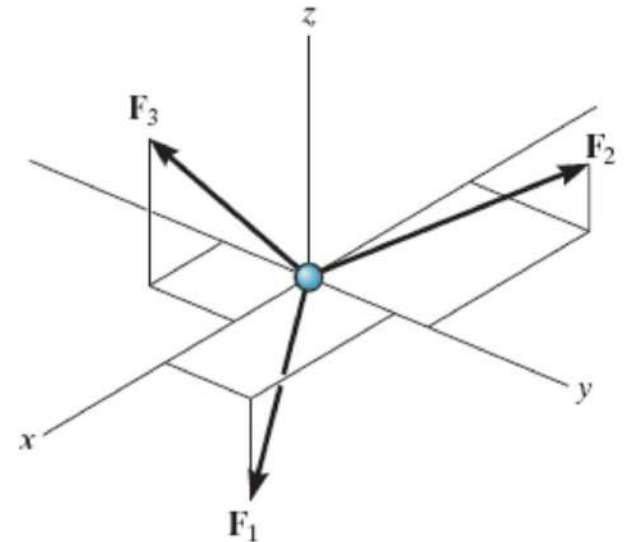
$$\sum F_x \mathbf{i} + \sum F_y \mathbf{j} + \sum F_z \mathbf{k} = 0$$

- X, y, ve z eksenlerindeki kuvvetlerin cebirsel toplamalarını gösteren üç skaler denklem şunlardır:

$$\sum F_x \mathbf{i} = 0$$

$$\sum F_y \mathbf{j} = 0$$

$$\sum F_z \mathbf{k} = 0$$



3.4 Üç Boyutlu Sistemler (d'm)

Analiz Prosedürleri

SCD çizimi

- x, y ve z eksenlerini tesis ediniz
- Bilinmeyen ve bilinen tüm kuvvetleri isimlendiriniz

Denge denklemlerinin kurulması

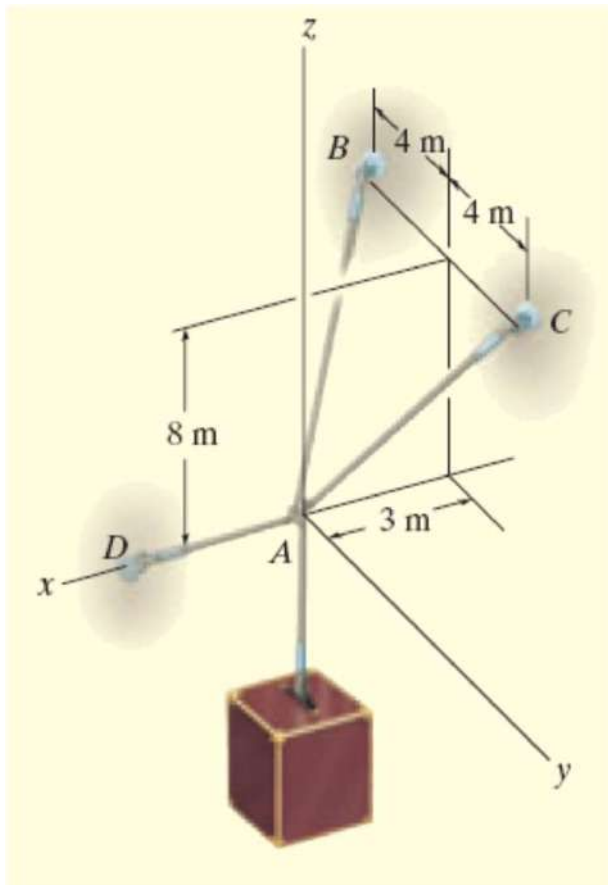
- $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$ ve $\sum F_z = 0$ denge denklemlerini uygulayınız
- $\sum \mathbf{F} = 0$ 'da vektörleri yerine koyunuz ve **i**, **j**, **k** bileşenlerini yazınız = 0
- Negatif işaretli sonuçlar SCD'de gösterilen ilgili kuvvetin yönünün ters olması gerektiğini ifade eder

Örnek 3.7

40 kN'luk sandığın taşınması için mesnetlik eden her bir kabloda oluşan kuvvetleri bulunuz.

Çözüm: A noktasında SCD'yi çizelim.

Kablolarda üç bilinmeyen kuvvet vardır. Koordinatlar: B(-3,-4,8), C(-3,4,8)



$$\mathbf{F}_B = F_B \left[\frac{-3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}}{2 \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + (8)^2}} \right]$$
$$= -0.318F_B\mathbf{i} - 0.424F_B\mathbf{j} + 0.848F_B\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}_C = F_C \left[\frac{-3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 8\mathbf{k}}{2 \sqrt{(-3)^2 + (4)^2 + (8)^2}} \right]$$
$$= -0.318F_C\mathbf{i} + 0.424F_C\mathbf{j} + 0.848F_C\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}_D = F_D\mathbf{i}$$

$$\mathbf{W} = \{-40\mathbf{k}\} \text{ lb}$$

Çözüm

Denge Denklemleri

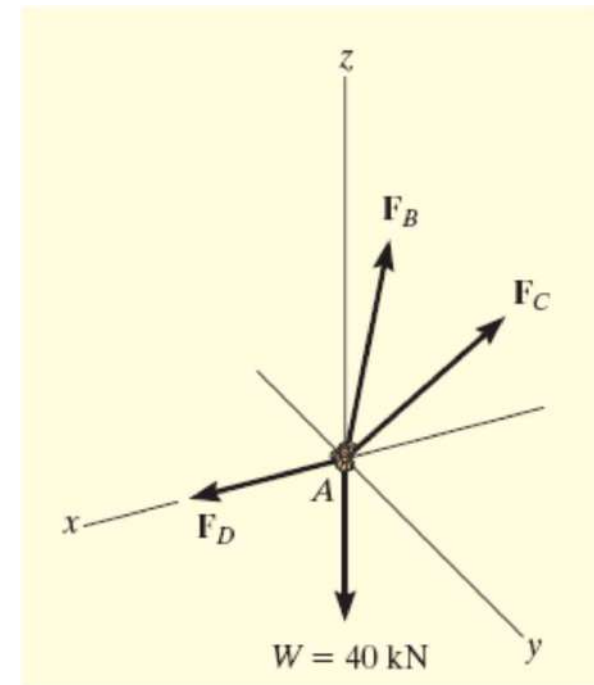
Her bir kuvveti Kartezyen vektör olarak ifade edelim.

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_B &= F_B(\mathbf{r}_B / r_B) \\ &= -0.318F_B\mathbf{i} - 0.424F_B\mathbf{j} + 0.848F_B\mathbf{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_C &= F_C(\mathbf{r}_C / r_C) \\ &= -0.318F_C\mathbf{i} - 0.424F_C\mathbf{j} + 0.848F_C\mathbf{k}\end{aligned}$$

$$\mathbf{F}_D = F_D\mathbf{i}$$

$$\mathbf{W} = -40\mathbf{k}$$



Çözüm (d'm)

Sistemin dengede olması için,

$$\begin{aligned}\sum \mathbf{F} = 0; \quad \mathbf{F}_B + \mathbf{F}_C + \mathbf{F}_D + \mathbf{W} &= 0 \\ -0.318F_B\mathbf{i} - 0.424F_B\mathbf{j} + 0.848F_B\mathbf{k} - 0.318F_C\mathbf{i} \\ &+ 0.424F_C\mathbf{j} + 0.848F_C\mathbf{k} + F_D\mathbf{i} - 40\mathbf{k} = 0\end{aligned}$$

* i, j ve k bileşenlerinin ilgili denklemleri sıfıra eşitlenirse;

$$\sum F_x = 0; \quad -0.318F_B - 0.318F_C + F_D = 0$$

$$\sum F_y = 0; \quad -0.424F_B + 0.424F_C = 0 \rightarrow F_B = F_C$$

$$\sum F_z = 0; \quad 0.848F_B + 0.848F_C - 40 = 0$$

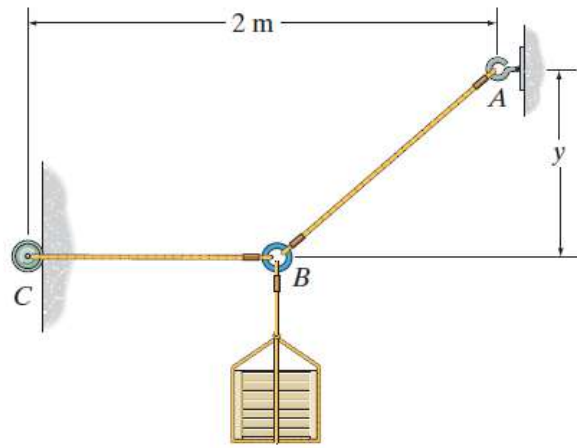
Bu denklemler çözüldüğünde aşağıdaki sonuçlar bulunur:

$$F_B = F_C = 23.6 \text{ kN} \quad F_D = 15.0 \text{ kN}$$

STATİK

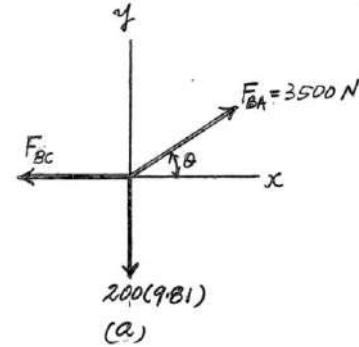
BÖLÜM 3. DÜZLEMDE DENGİ ÖRNEK SORU ÇÖZÜMLERİ

1. Eğer 1.5 m uzunluğundaki AB halatı en fazla 3500 N'luk yük kaldırabiliyorsa, 200-kg kütleli kutunun taşınabilmesi için BC halatındaki kuvveti ve y mesafesini bulunuz.



ÇÖZÜM:

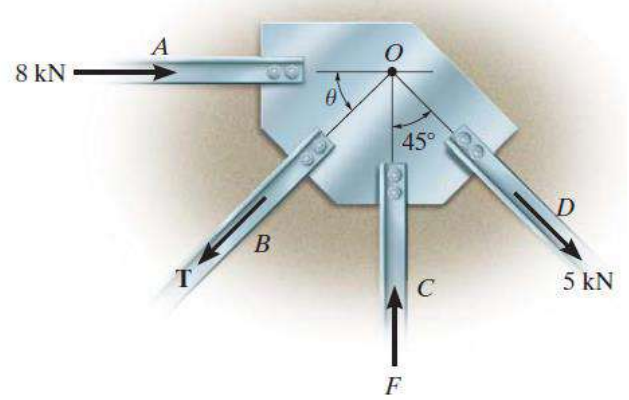
Serbest Cisim Diyagramı (SCD) →



$$\begin{aligned}
 + \uparrow \Sigma F_y &= 0; & 3500 \sin \theta - 200(9.81) &= 0 & \theta &= 34.10^\circ \\
 \rightarrow \Sigma F_x &= 0; & 3500 \cos 34.10^\circ - F_{BC} &= 0 & F_{BC} &= 2898.37 \text{ N} = 2.90 \text{ kN}
 \end{aligned}$$

$$y = 1.5 \sin 34.10^\circ = 0.841 \text{ m} = 841 \text{ mm} \text{ Ans.}$$

2. Şekilde görülen çelik guse plakası (bayrak) dört ayrı kuvvetin etkisindedir. Sistem dengede olduğuna göre B noktasına etki eden T kuvvetini ve θ açısını belirleyiniz. $F = 12 \text{ kN}$ olarak alınız.



ÇÖZÜM:

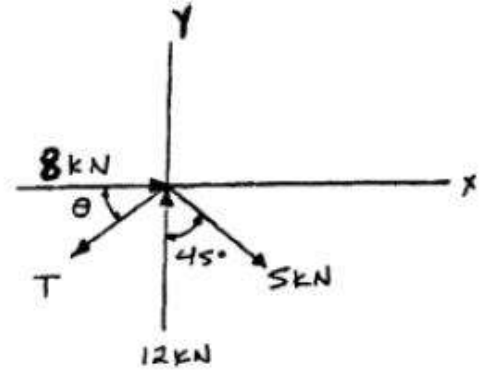
$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad 8 - T \cos \theta + 5 \sin 45^\circ = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 12 - T \sin \theta - 5 \cos 45^\circ = 0$$

Solving,

$$T = 14.3 \text{ kN} \quad \text{Ans}$$

$$\theta = 36.3^\circ \quad \text{Ans}$$



3. Bir kafes sistemin elemanları şekilde görüldüğü gibi bir guse plakasında birleşmektedir. Eğer kuvvetler O noktasında kesişiyorsa, dengedeki sistemde F ve T kuvvetlerini hesaplayınız. $\theta = 90^\circ$ olarak alınız.

ÇÖZÜM:

$$\phi = 90^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) = 53.13^\circ$$

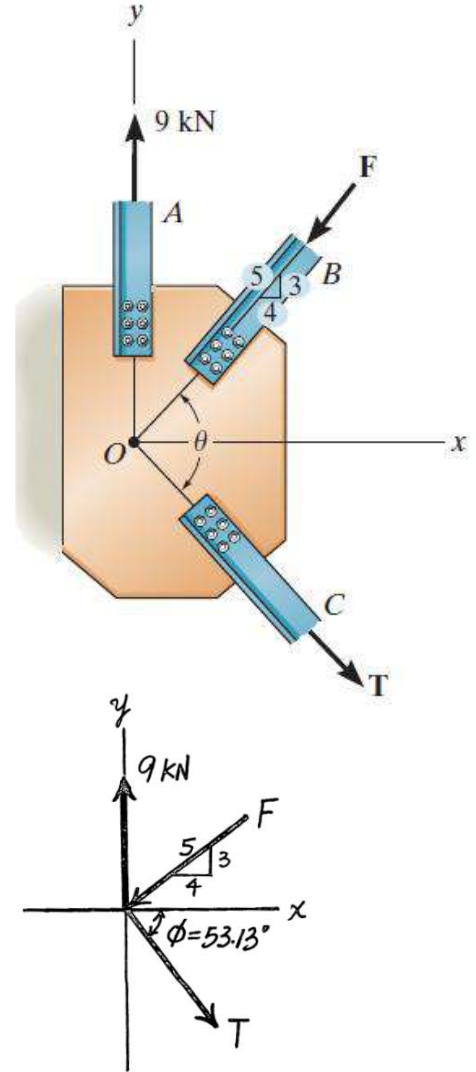
$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad T \cos 53.13^\circ - F \left(\frac{4}{5}\right) = 0$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 9 - T \sin 53.13^\circ - F \left(\frac{3}{5}\right) = 0$$

Solving,

$$T = 7.20 \text{ kN} \quad \text{Ans}$$

$$F = 5.40 \text{ kN} \quad \text{Ans}$$





4. Soru-3'te verilen şekli dikkate alarak dengedeki sistemde C elemanındaki çekme kuvvetini ve onun açısı olan θ 'yı hesaplayınız. $F = 8 \text{ kN}$ olarak alınız.

ÇÖZÜM:

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad T \cos \phi - 8 \left(\frac{4}{5} \right) = 0 \quad (1)$$

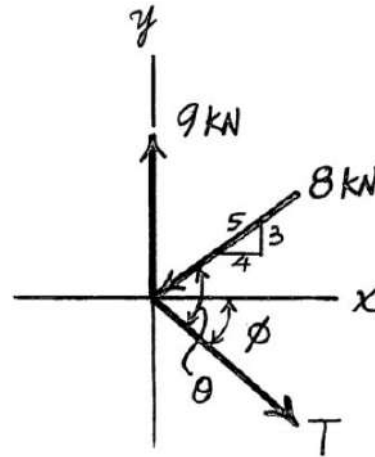
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 9 - 8 \left(\frac{3}{5} \right) - T \sin \phi = 0 \quad (2)$$

Rearrange then divide Eq. (1) into Eq. (2) :

$$\tan \phi = 0.656, \quad \phi = 33.27^\circ$$

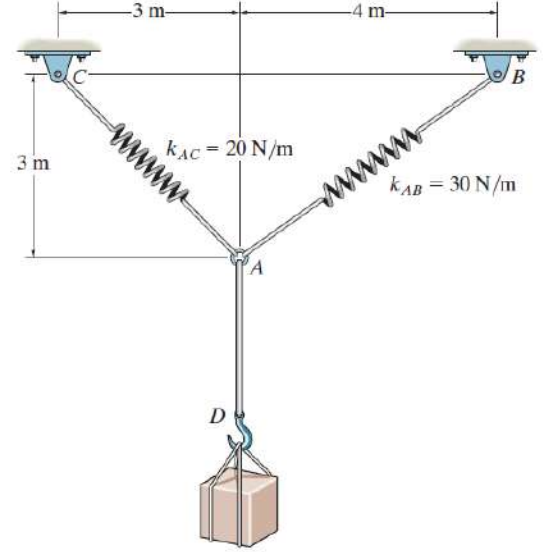
$$T = 7.66 \text{ kN} \quad \text{Ans}$$

$$\theta = \phi + \tan^{-1} \left(\frac{3}{4} \right) = 70.1^\circ \quad \text{Ans}$$





5. 2-kg kütleye sahip bloğun dengede olabilmesi için AC ve AB yaylarında oluşacak uzama miktarını bulunuz. Şekilde yaylar denge pozisyonunda gösterilmiştir.

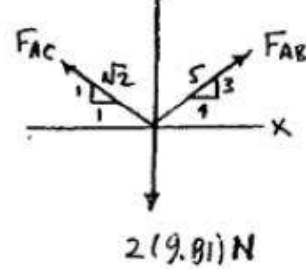


ÇÖZÜM:

$$F_{AD} = 2(9.81)$$



$$\begin{aligned} \rightarrow \Sigma F_x &= 0; & F_{AB} \left(\frac{4}{5} \right) - F_{AC} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) &= 0 \\ + \uparrow \Sigma F_y &= 0; & F_{AC} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) + F_{AB} \left(\frac{3}{5} \right) - 2(9.81) &= 0 \end{aligned}$$



$$F_{AC} = 15.86 \text{ N}$$

$$x_{AC} = \frac{15.86}{20} = 0.793 \text{ m} \quad \text{Ans}$$

$$F_{AB} = 14.01 \text{ N}$$

$$x_{AB} = \frac{14.01}{30} = 0.467 \text{ m} \quad \text{Ans}$$

6. Soru-5’de verilen şekli dikkate alınız. AB yayının uzamamış (orijinal) boyu 3 m’dir. Eğer D noktasındaki blok dengede ise bloğun kütlesini hesaplayınız.

ÇÖZÜM:

$$F = kx = 30(5 - 3) = 60 \text{ N}$$

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad T \cos 45^\circ - 60 \left(\frac{4}{5} \right) = 0$$

$$T = 67.88 \text{ N}$$

$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0; \quad -W + 67.88 \sin 45^\circ + 60 \left(\frac{3}{5} \right) = 0$$

$$W = 84 \text{ N}$$

$$m = \frac{84}{9.81} = 8.56 \text{ kg}$$



7. D noktasında asılı olan 20-kg kütleli metal kürenin dengede durabilmesi için AC ve AB kablolarında gerekli olan kuvvetleri bulunuz. $F = 300 \text{ N}$ ve $d = 1 \text{ m}$ olarak alınız.

ÇÖZÜM:

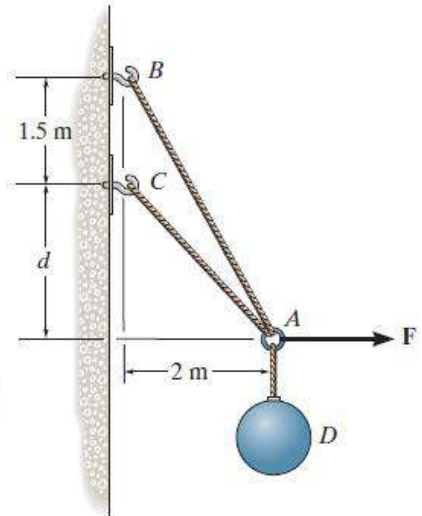
Denge denklemleri:

$$\begin{aligned} \rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad 300 - F_{AB} \left(\frac{4}{\sqrt{41}} \right) - F_{AC} \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \right) &= 0 \\ 0.6247 F_{AB} + 0.8944 F_{AC} &= 300 \end{aligned}$$

[1]

$$\begin{aligned} + \uparrow \Sigma F_y = 0; \quad F_{AB} \left(\frac{5}{\sqrt{41}} \right) + F_{AC} \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right) - 196.2 &= 0 \\ 0.7809 F_{AB} + 0.4472 F_{AC} &= 196.2 \end{aligned}$$

[2]

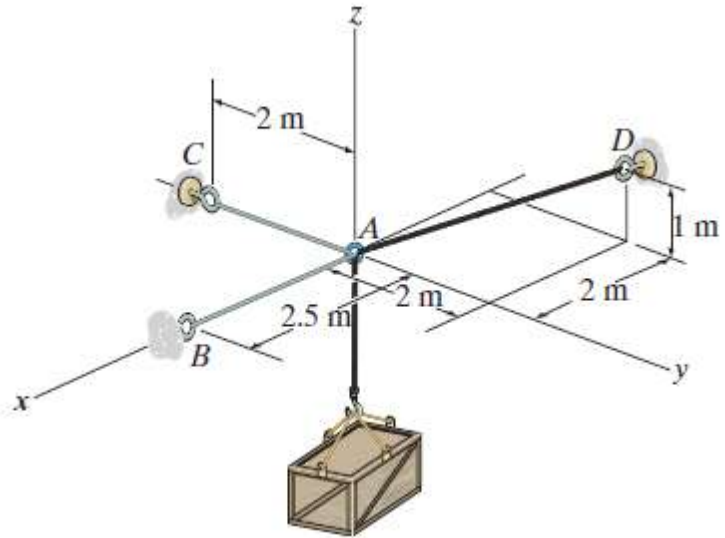
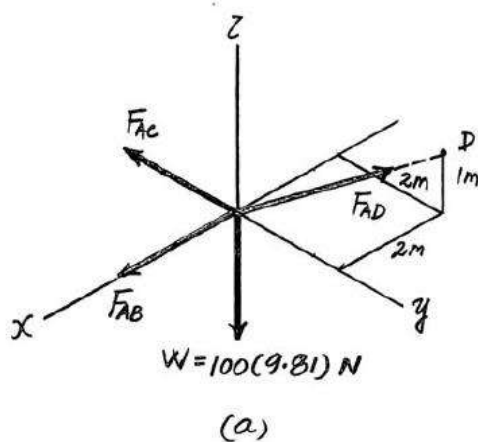


[1] ve [2] denklemleri çözüldüğünde aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

$$F_{AB} = 98.6 \text{ N} \quad F_{AC} = 267 \text{ N}$$

8. Şekilde görülen 100-kg kütleli kutunun dengede olabilmesi için kablolardaki çekme kuvvetlerini bulunuz.

ÇÖZÜM:





- Kuvvet Vektörleri: FBD'si Şekil(a)'da gösterilen kuvvetler Kartezyen formda aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\mathbf{F}_{AB} = F_{AB} \mathbf{i}$$

$$\mathbf{F}_{AC} = -F_{AC} \mathbf{j}$$

$$\mathbf{F}_{AD} = F_{AD} \left[\frac{(-2-0)\mathbf{i} + (2-0)\mathbf{j} + (1-0)\mathbf{k}}{\sqrt{(-2-0)^2 + (2-0)^2 + (1-0)^2}} \right] = -\frac{2}{3}F_{AD}\mathbf{i} + \frac{2}{3}F_{AD}\mathbf{j} + \frac{1}{3}F_{AD}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{W} = [-100(9.81)\mathbf{k}] \text{ N} = [-981\mathbf{k}] \text{ N}$$

- Denge Denklemleri:

$$\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}; \quad \mathbf{F}_{AB} + \mathbf{F}_{AC} + \mathbf{F}_{AD} + \mathbf{W} = \mathbf{0}$$

$$F_{AB} \mathbf{i} + (-F_{AC} \mathbf{j}) + \left(-\frac{2}{3}F_{AD}\mathbf{i} + \frac{2}{3}F_{AD}\mathbf{j} + \frac{1}{3}F_{AD}\mathbf{k} \right) + (-981\mathbf{k}) = \mathbf{0}$$

$$\left(F_{AB} - \frac{2}{3}F_{AD} \right) \mathbf{i} + \left(-F_{AC} + \frac{2}{3}F_{AD} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{1}{3}F_{AD} - 981 \right) \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

- i, j ve k bileşenleri ayrı ayrı sıfıra eşitlenirse;

$$F_{AB} - \frac{2}{3}F_{AD} = 0 \quad (1)$$

$$-F_{AC} + \frac{2}{3}F_{AD} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{1}{3}F_{AD} - 981 = 0 \quad (3)$$

- Denlem(1)-(3) çözülürse:

$$F_{AD} = 2943 \text{ N} = 2.94 \text{ kN}$$

$$F_{AB} = F_{AC} = 1962 \text{ N} = 1.96 \text{ kN}$$

Engineering Mechanics: Statics in SI Units, 12e

4

Kuvvet Sistemleri ve Kuvvetlerin Bileşkesi

Bu bölümde öğrenilecek konular:

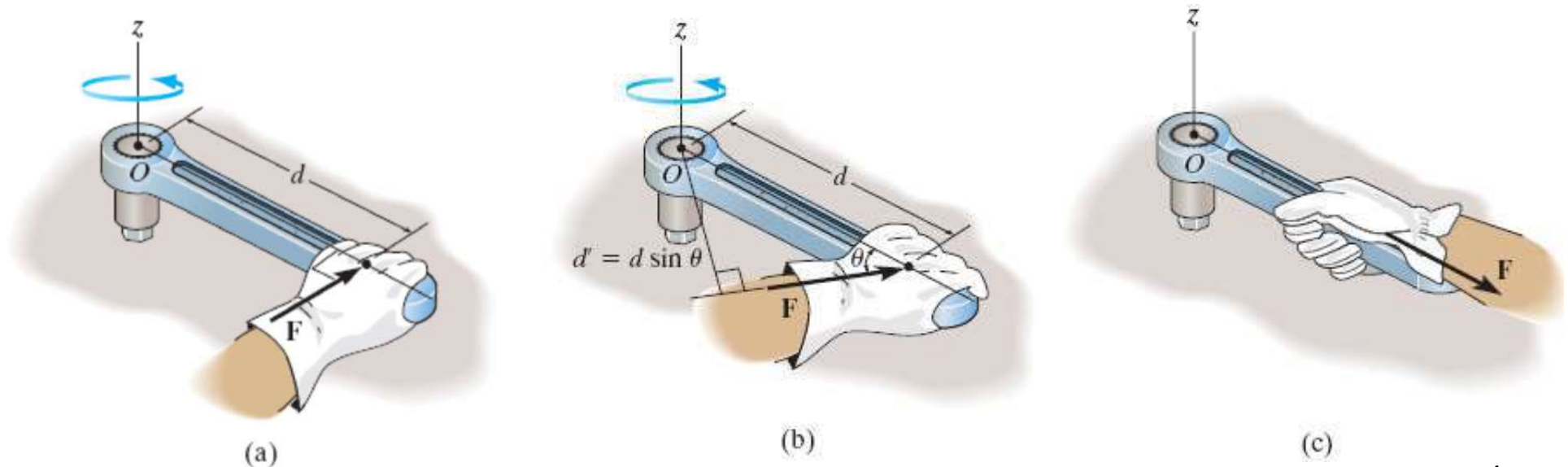
- İki ve üç boyutlu sistemde bir kuvvetin oluşturduğu moment kavramı
- Belirli bir eksene göre bir kuvvetin momentini bulma yöntemi
- Bir kuvvet çiftinin oluşturduğu moment
- Bir noktada kesişmeyen kuvvet sistemlerinin bileşkesi belirleme
- Basit bir yayılı yükü belirli bir konuma sahip olan bileşke kuvvetine dönüştürme

Bölüm alt başlıkları

1. Bir kuvvetin momenti – Skaler form
2. Vektörel Çarpım (Çapraz Çarpım – Cross Product)
3. Bir kuvvetin momenti– Vektör Formülasyonu
4. Moment İlkesi
5. Bir Kuvvetin Belirli Bir Eksene Göre Momenti
6. Bir Kuvvet Çiftinin Momenti
7. Kuvvet ve Kuvvet Çifti Sistemlerinin Basitleştirilmesi
8. Yayılı Yüklèmelerin Bileşkesinin ve Etki Noktasının Bulunması

4.1 Bir kuvvetin momenti – Skaler form

- Kuvvetin bir noktaya veya bir eksene göre momenti demek, o kuvvetin bir cismi bir nokta veya bir eksen etrafında döndürme eğiliminin bir ölçüsüdür.
- Tork (Torque): $\mathbf{F}_x$ kuvveti ya da basit bir moment $(\mathbf{M}_o)_z$ etkisiyle dönme eğilimidir.



4.1 Bir kuvvetin momenti – Skaler form (d'm)

Momentin büyüklüğü (şiddeti):

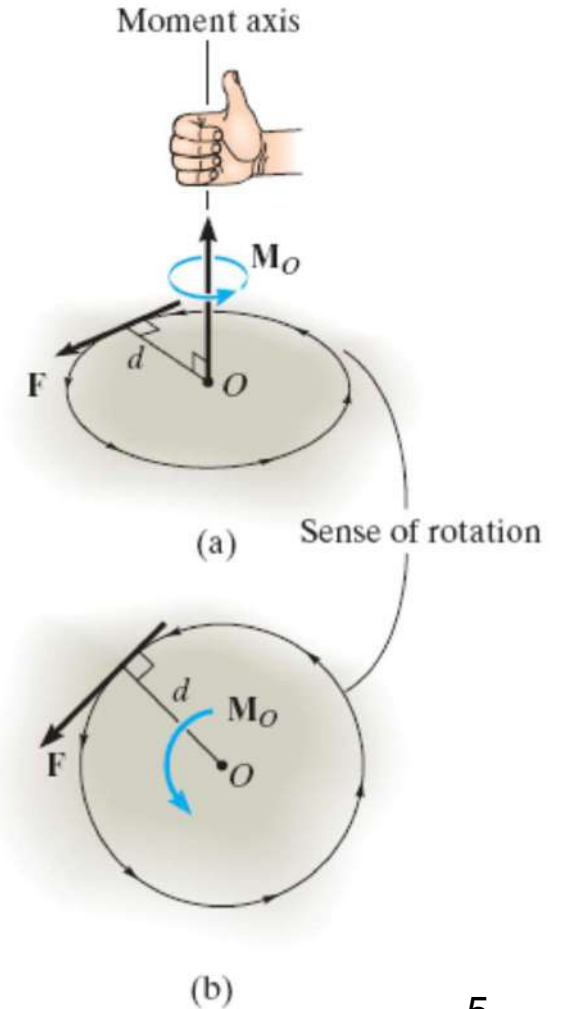
- M_O , momentinin büyüklüğü için;

$$M_O = F.d \quad [Nm]$$

Burada d mesafesi, O noktasından kuvvetin etki çizgisine olan dik mesafeyi ifade eder.

Yön:

- Yön için “sağ el kuralı” uygulanır. Bakınız: Şekil (a)

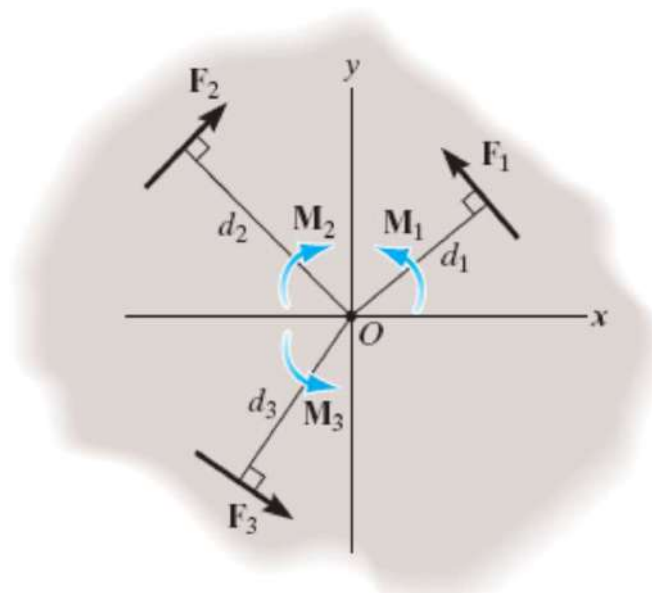


4.1 Bir kuvvetin momenti – Skaler form (d'm)

Bileşke Moment

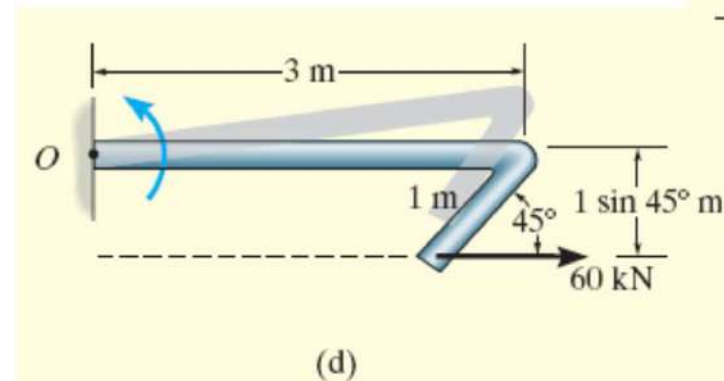
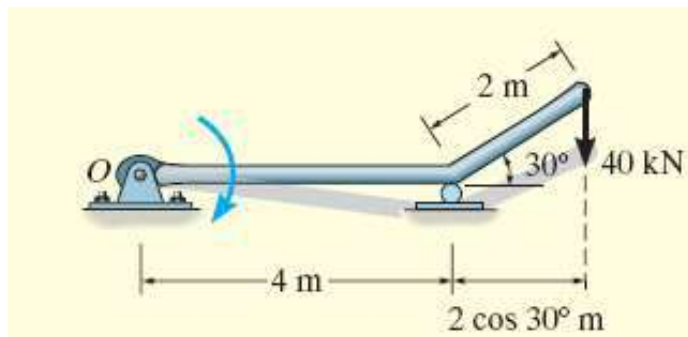
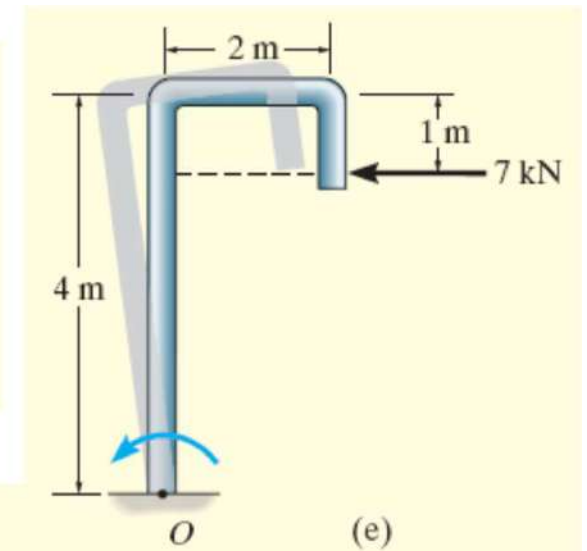
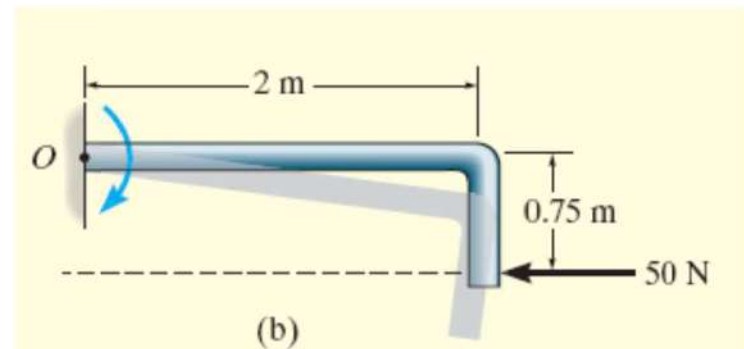
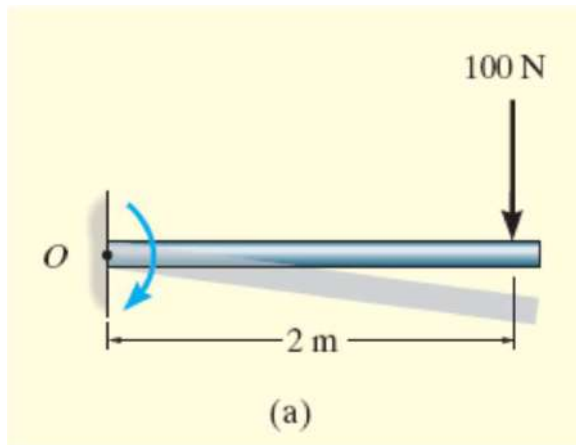
- Bileşke moment, $\mathbf{M}_{R_0}$ = Tüm kuvvetlerin momenti

$$\mathbf{M}_{R_0} = \sum(F.d)$$



Örnek 4.1

Her bir durum için **O** noktasına göre moment değerlerini bulunuz.

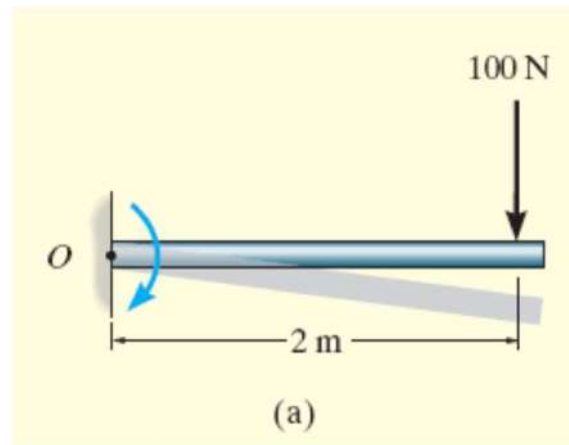


Çözüm

Moment kolu olan **d**'yi bulmak için etkiye çizgisi kesikli çizgiye kadar uzatılır.

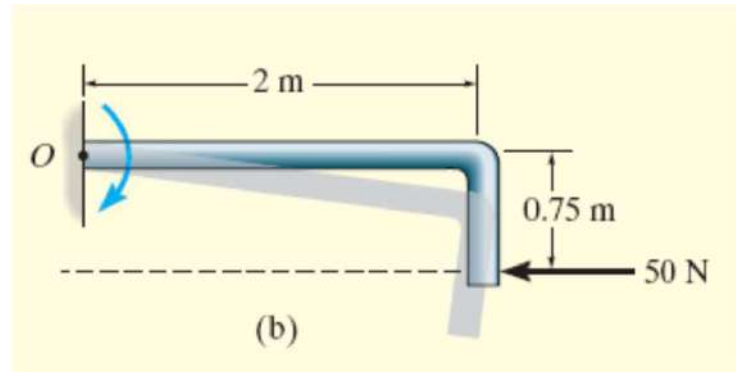
Döndürme eğilimi gölgeli olarak gösterilmiş ve yörünge renkli bir kıvrım olarak şekilde çizilmiştir.

$$(a)M_o = (100N)(2m) = 200N.m(CW) \text{ Saat ibresi yönünde (Clockwise)}$$



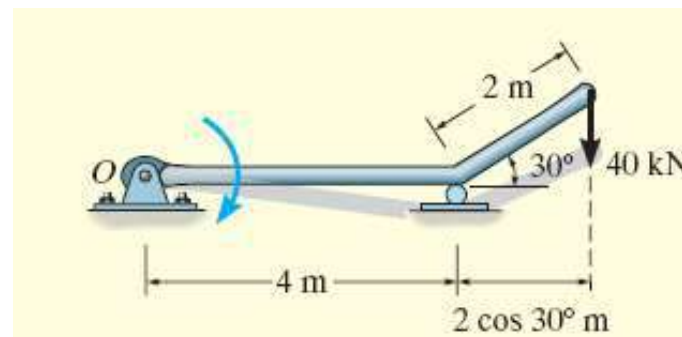
Çözüm

$$(b)M_o = (50N)(0.75m) = 37.5N.m(CW)$$



Saat ibresi yönünde
(ClockWise)

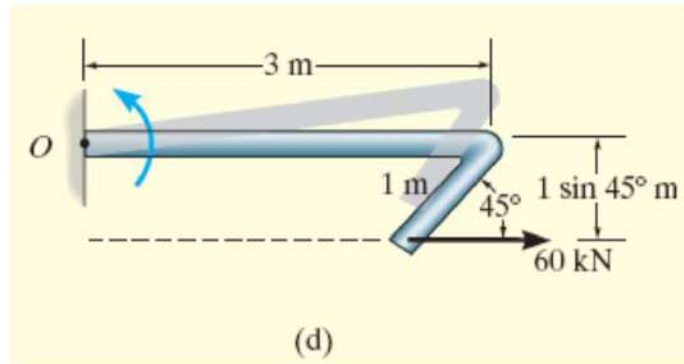
$$(c)M_o = (40kN)(4m + 2 \cos 30^\circ m) = 229kN.m(CW)$$



Saat ibresi yönünde
(ClockWise)

Çözüm

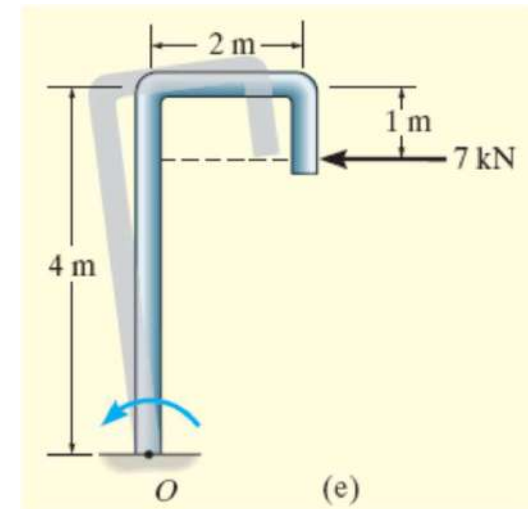
$$(d) M_o = (60 \text{ kN})(1 \sin 45^\circ \text{ m}) = 42.4 \text{ kN.m (CCW)}$$



Saat ibresinin tersi yönünde
(CounterClockWise)

$$(e) M_o = (7 \text{ kN})(4 \text{ m} - 1 \text{ m}) = 21.0 \text{ kN.m (CCW)}$$

Saat ibresinin tersi yönünde
(CounterClockWise)



4.2 Vektörel Çarpım (Çapraz Çarpım- Cross Product)

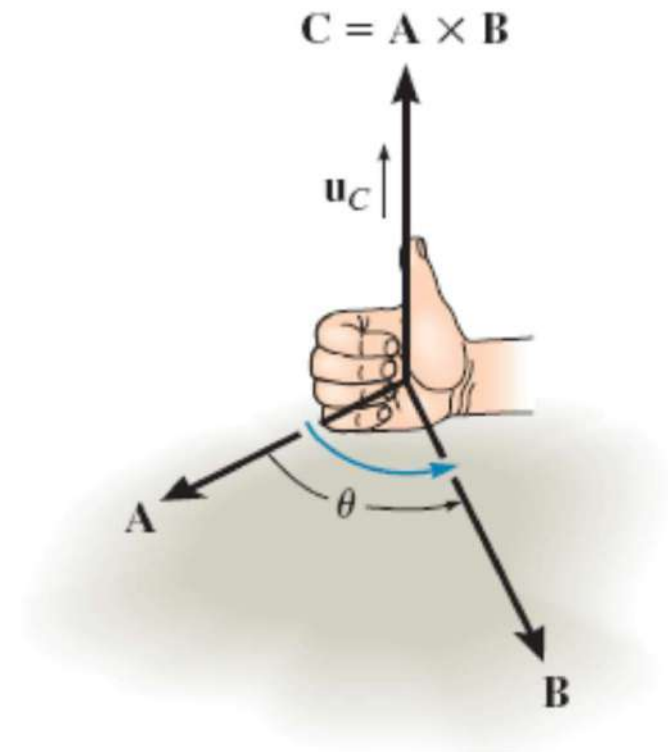
- **A** and **B** vektörlerinin vektörel çarpımı **C** vektörüne eşit ise şu şekilde yazabiliriz:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$$

Büyüklik (Magnitude):

- **C** vektörünün büyüklüğü, **A** ve **B** vektörlerinin büyüklüklerinin çarpımına eşittir.
- θ açısının aralığı: $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$

$$C = AB \sin\theta$$

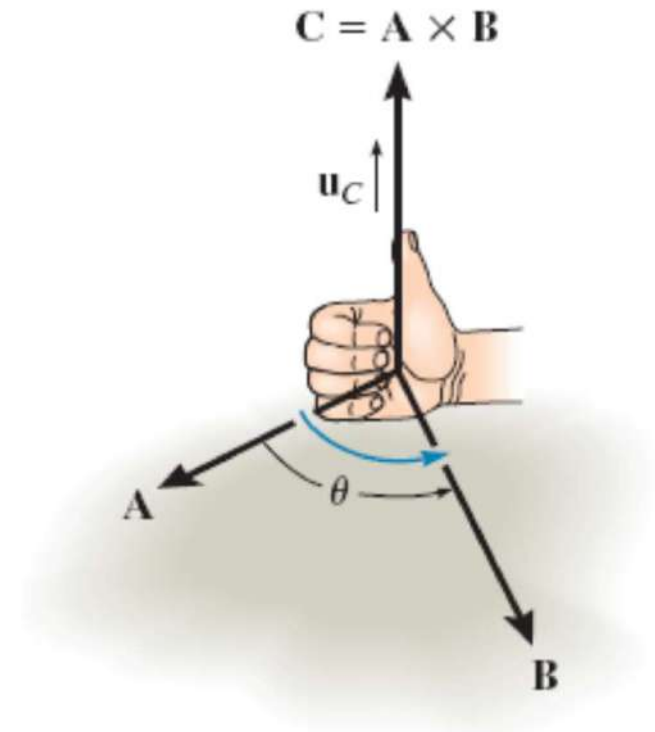


4.2 Vektörel Çarpım (d'm)

Yön:

- **C** vektörü, **A** ve **B** vektörlerinin bulunduğu düzleme dik doğrultuda ve yönü ise sağ el kuralına göre belirlenmektedir.
- Yönü ve büyüklüğü bilinen **C** vektörünün şu şekilde yazılabilir:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = (AB \sin \theta) \mathbf{u}_C$$



4.2 Vektörel Çarpım (d'm)

Vektörel Çarpım ile ilgili bazı özellikler:

1. Değişme özelliği yoktur.

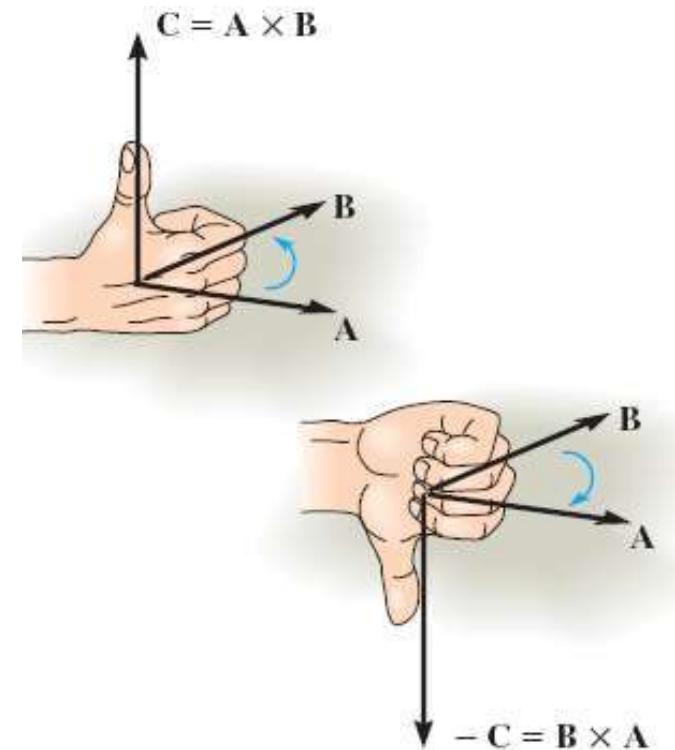
$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \times \mathbf{A}$$

- Ancak eşitlik şöyle olur:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}$$

- $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ vektörel çarpımı $\mathbf{C}$ 'nin yönünün tersi bir yöne sahiptir.

$$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -\mathbf{C}$$



4.2 Vektörel Çarpım (d'm)

2. Bir skalerle çarpılabilir.

$$a(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (a\mathbf{A}) \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times (a\mathbf{B}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B})a$$

3. Dağılma özelliği vardır.

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \times \mathbf{D})$$

- Vektörel çarpımın sıralaması, değişme özelliği olmadığından dolayı korunmalıdır.

4.2 Vektörel Çarpım (d'm)

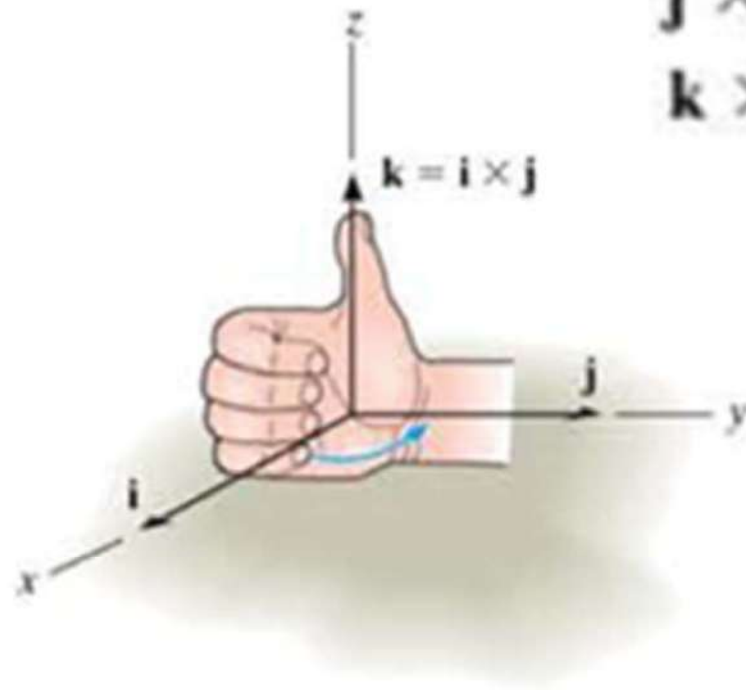


Fig. 4-8

$$\begin{array}{lll} \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} & \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} & \mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0} \\ \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} & \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} & \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0} \\ \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} & \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} & \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0} \end{array}$$

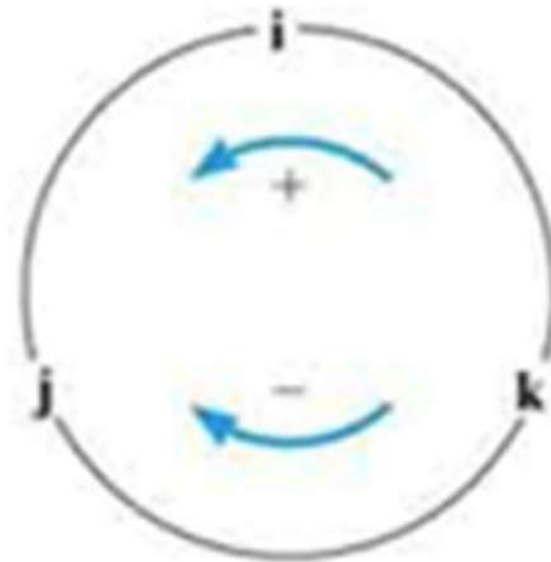


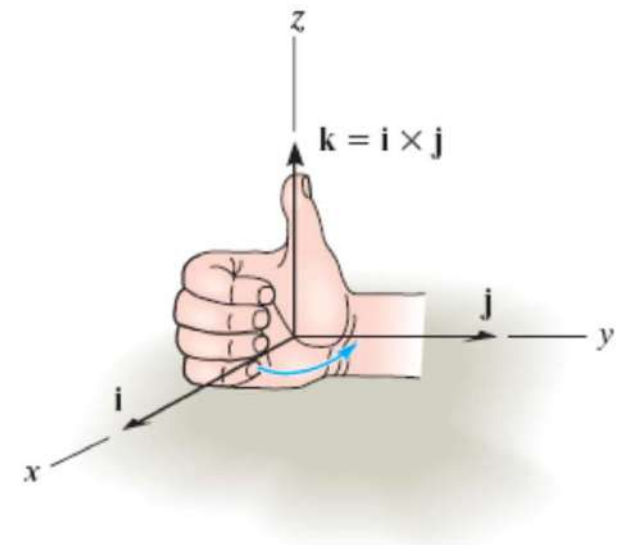
Fig. 4-9

4.2 Vektörel Çarpım (d'm)

Kartezyen Vektör Formülasyonu

- Kartezyen birim vektörleri ($\vec{i}$, $\vec{j}$ ve $\vec{k}$) üzerinde $C = AB \sin\theta$ sonuç vektörü bulunabilir.
- Basit bir şekilde determinant forma şöyle yazılabilir:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$



4.2 Vektörel Çarpım (d'm)

i elemanı için:

$$\begin{vmatrix} \oplus & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \mathbf{i}(A_y B_z - A_z B_y)$$

j elemanı için:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \oplus & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = -\mathbf{j}(A_x B_z - A_z B_x)$$

(-) işareti
unutulmamalıdır.

k elemanı için:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \oplus \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \mathbf{k}(A_x B_y - A_y B_x)$$

- Bu üç sonucun toplanmasıyla determinant sonucu elde edilir. İkinci sonuç (-) olarak toplamaya katılması gerektiği unutulmamalıdır.

4.3 Moment of Force - Vector Formulation

- F kuvvetinin O noktasına göre momenti vektörel çarpım kullanılarak şöyle ifade edilebilir:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

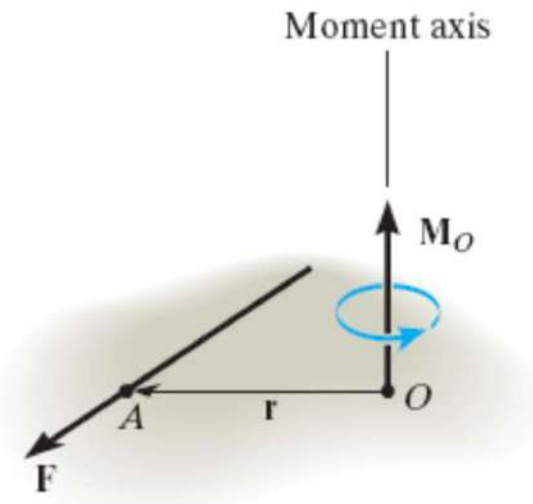
Büyüklik

- Vektörel çarpımın büyüklüğü,

$$M_O = rF \sin\theta$$

- Treat $\mathbf{r}$ vektörünü değişen ve kayan bir konum vektörü olarak dikkate alırsak, bu durumda $d = r \sin\theta$,

$$M_O = rF \sin\theta = F (r \sin\theta) = Fd$$



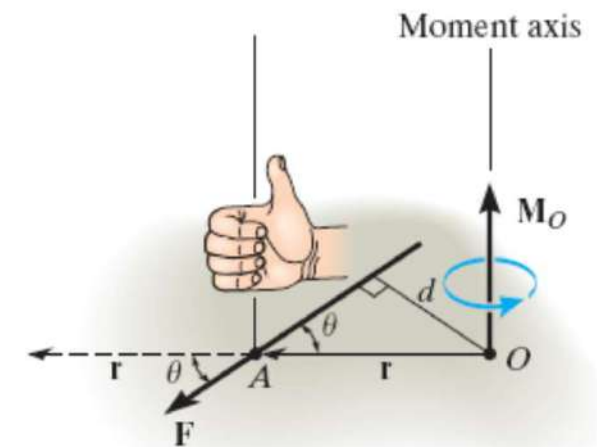
4.3 Moment of Force - Vector Formulation

Yön

- $\mathbf{M}_O$ momentinin dönme yönü sağ el kuralına göre tespit edilebilir.

*Not:

- Parmakların "kıvrımı" dönme yönünü göstermektedir.
- Vektörel çarpımda değişme özelliği olmadığından dolayı $\mathbf{r}$ ve $\mathbf{F}$ 'nin işlemdeki sırası değiştirilmemelidir.

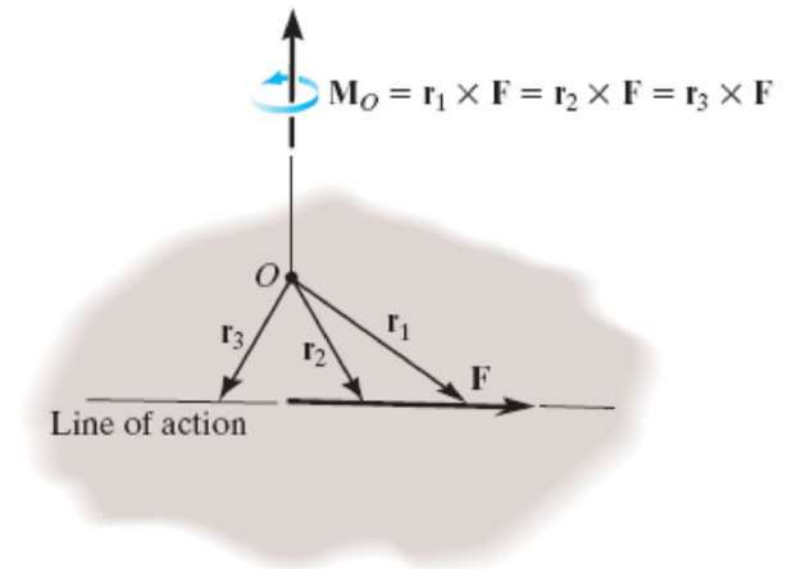


4.3 Bir Kuvvetin Momenti- Vektör Formülasyonu

Aktarılabilirlik İlkesi

- Herhangi bir A noktasına etki eden $\mathbf{F}$ kuvvetinin O noktasına göre momenti $\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_A \times \mathbf{F}$ 'dir.
- $\mathbf{F}$ kayan vektör özelliklerine sahip olduğuna göre;

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F} = \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F} = \mathbf{r}_3 \times \mathbf{F}$$



4.3 Bir Kuvvetin Momenti- Vektör Formülasyonu (d'm)

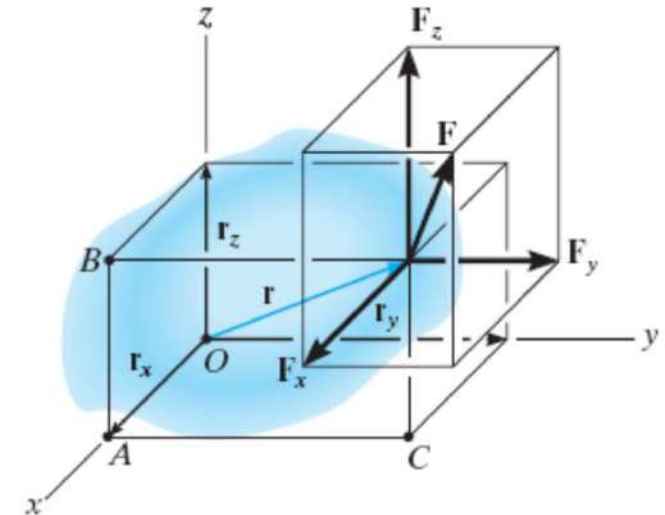
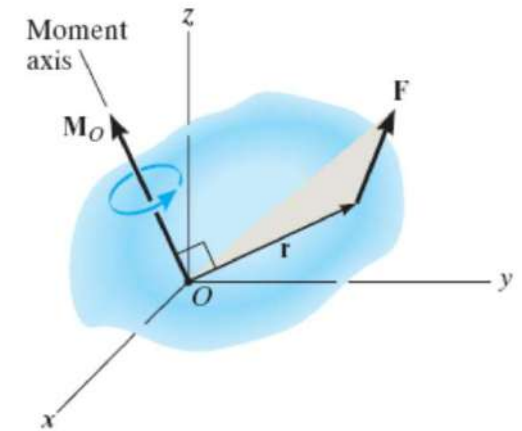
Kartezyen vektör formülasyonu

- Kartezyen formdaki bir kuvvet için moment ifadesi şöyle yazılabilir:

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

- Determinantın açılımı şöyle olur.

$$\mathbf{M}_O = (r_y F_z - r_z F_y)\mathbf{i} - (r_x F_z - r_z F_x)\mathbf{j} + (r_x F_y - r_y F_x)\mathbf{k}$$

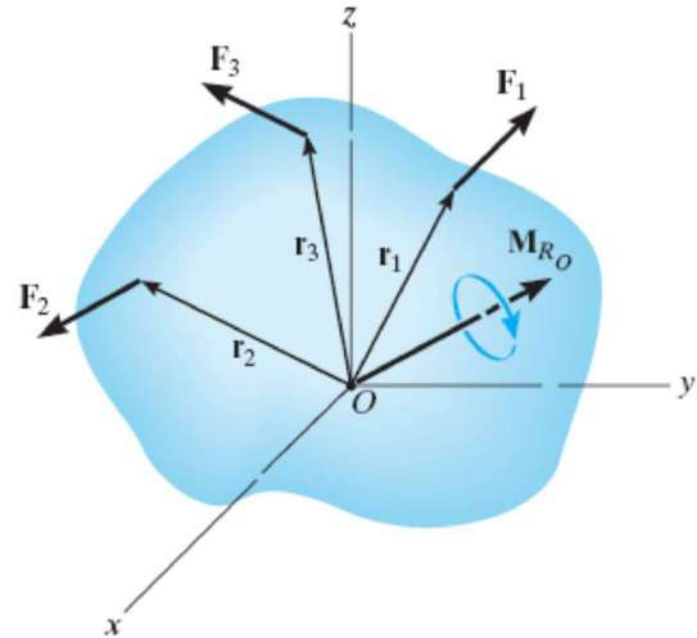


4.3 Bir Kuvvetin Momenti- Vektör Formülasyonu (d'm)

Bir Kuvvetler Sisteminin Bileşke Momenti

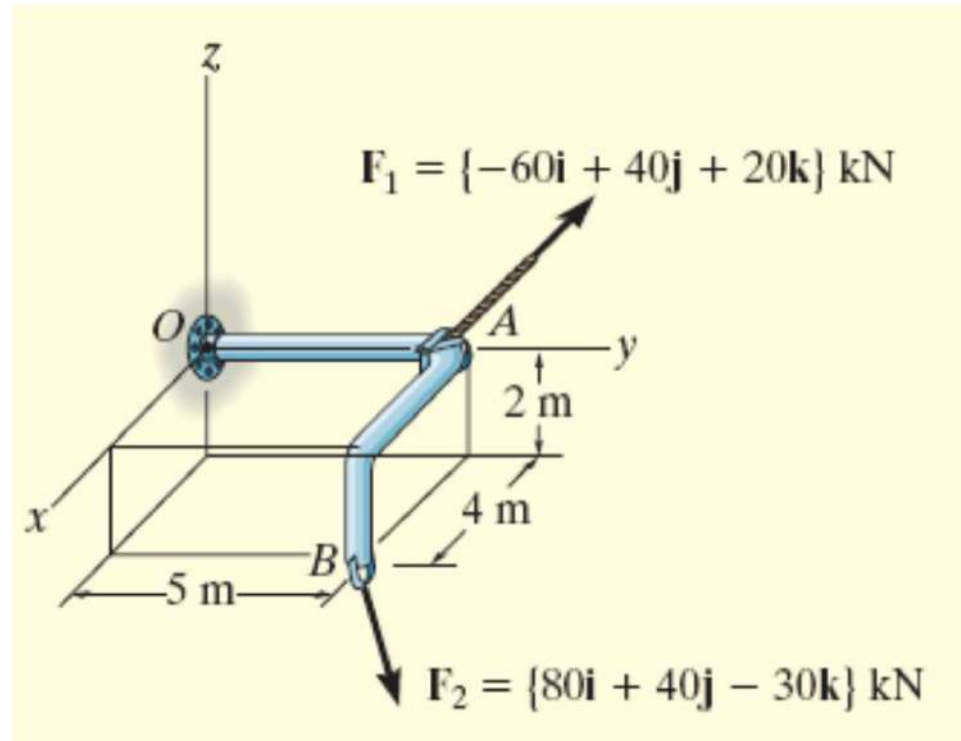
- O noktasına göre kuvvetlerin bileşke momenti vektörel toplam ile ifade edilebilir.

$$\mathbf{M}_{R0} = \sum(\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$



Örnek 4.4

Şekilde görülen çubuğa iki kuvvet etkimektedir. Kuvvetlerin O noktasındaki mesnete göre oluşturdukları bileşke momenti belirleyin. Sonucu kartezyen vektör olarak ifade ediniz.



Çözüm

O noktasından her bir kuvvete yönelmiş olan pozisyon vektörü şöyle gösterilebilir:

$$r_A = \{5j\} \text{ m}$$

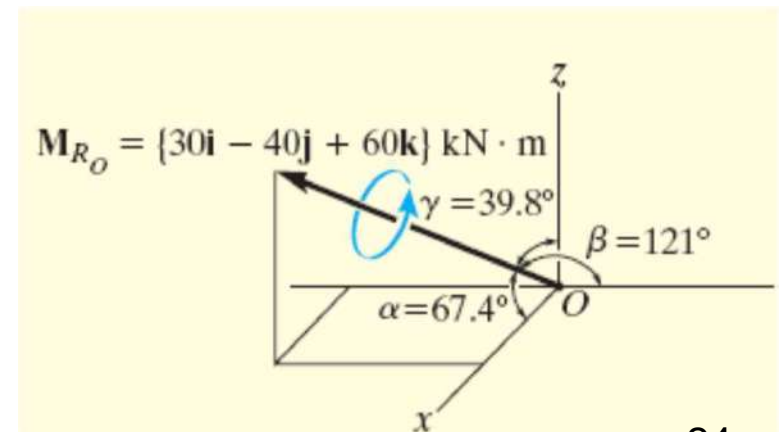
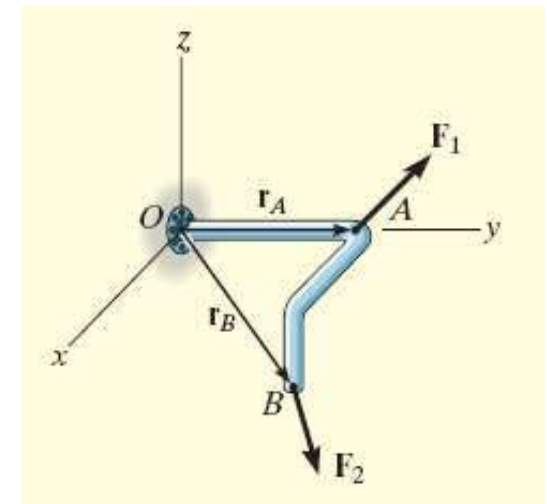
$$r_B = \{4i + 5j - 2k\} \text{ m}$$

O noktasına göre bileşke moment

$$\vec{M}_O = \sum (r \times F) = r_A \times F_1 + r_B \times F_2$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 5 & 0 \\ -60 & 40 & 20 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4 & 5 & -2 \\ 80 & 40 & -30 \end{vmatrix}$$

$$= \{30i - 40j + 60k\} \text{ kN} \cdot \text{m}$$

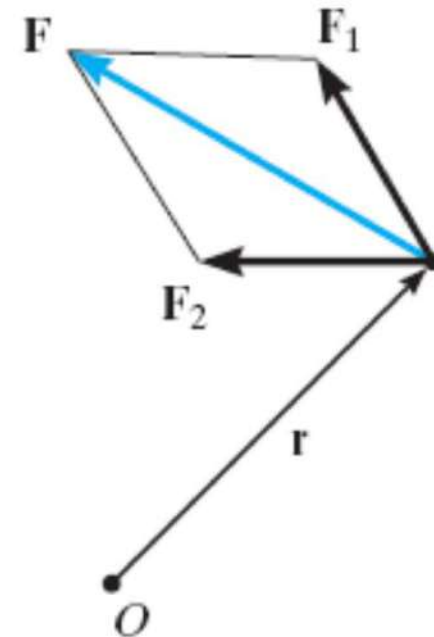


4.4 Moment İlkesi

- Varignon Teoremi olarak da bilinmektedir.
“Bir nokta etrafındaki bir kuvvet momenti, nokta etrafındaki kuvvet bileşenlerinin momentlerinin toplamına eşittir”
- Böylece şöyle yazılabilir.

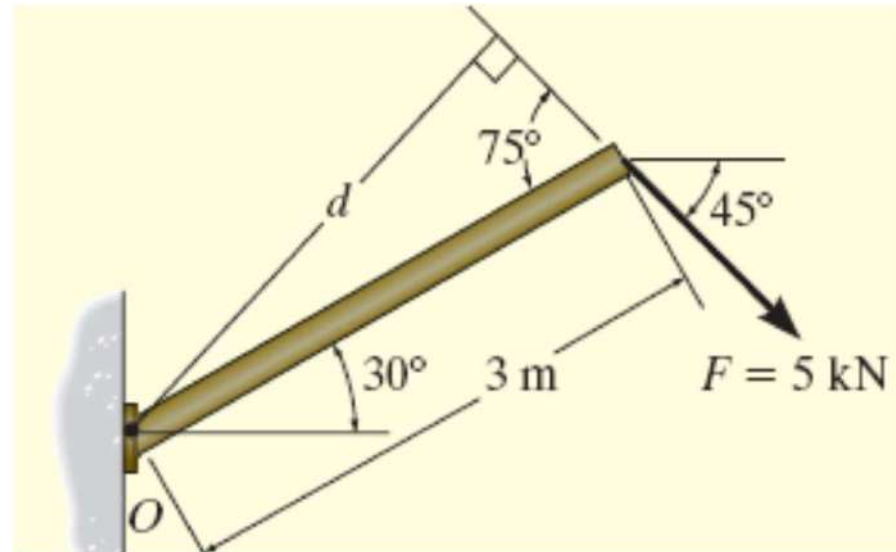
$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$$

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_O &= \mathbf{r} \times \mathbf{F} \\ &= \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) \\ &= \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2\end{aligned}$$



Örnek 4.5

Şekildeki kuvvetin O noktasına göre momentini bulunuz.



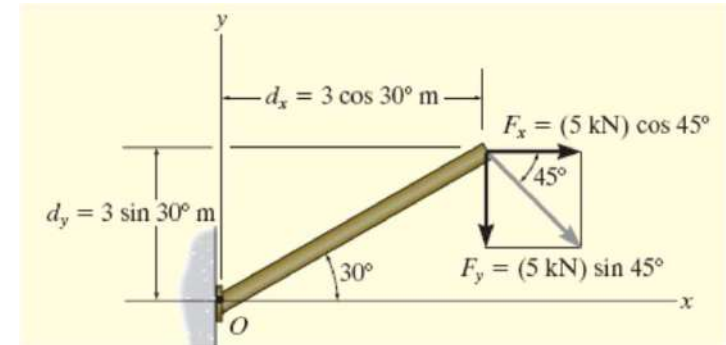
Çözüm (1. yol)

Moment kolu d trigonometriden bulunabilir.

$$d = (3)\sin 75^\circ = 2.898 \text{ m}$$

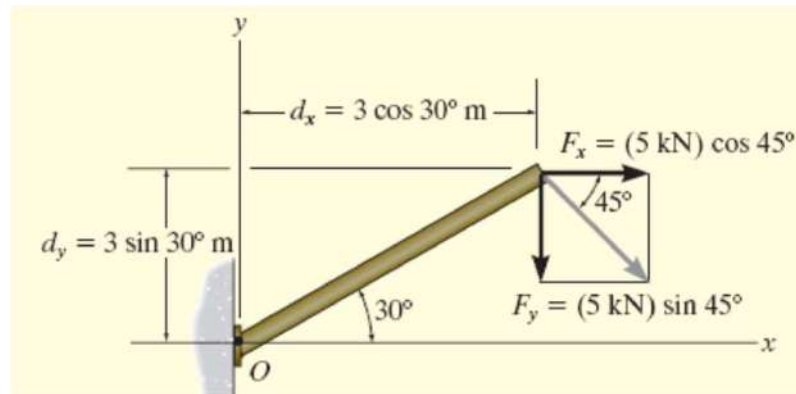
Böylece moment:

$$M_O = Fd = (5)(2.898) = 14.5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



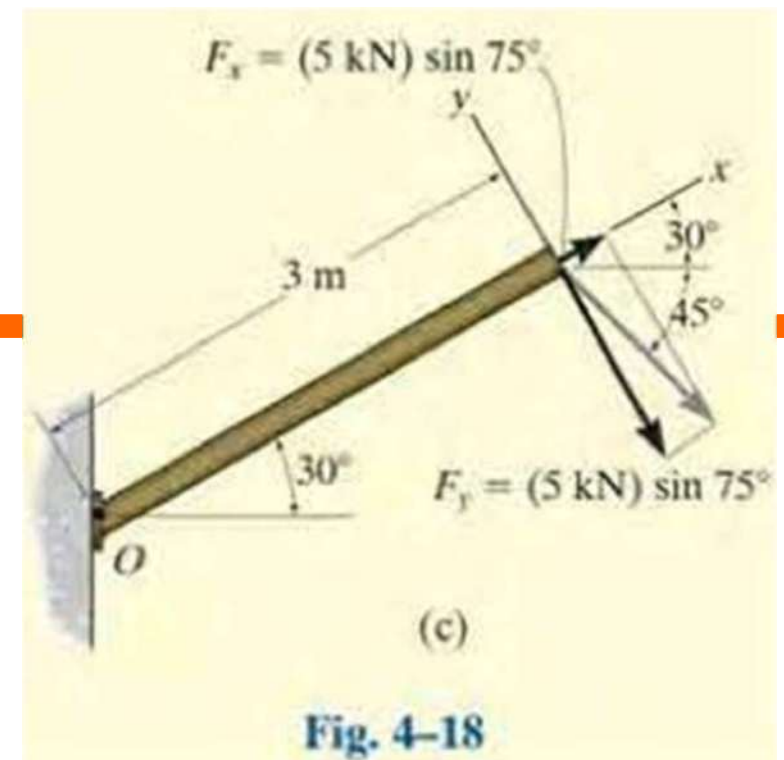
- Kuvvet O noktası etrafında saat ibresi yönünde döndürme eğiliminde veya dönme eğiliminde olduğu için, sağ el kuralına göre momentin yönü sayfa düzleminin içine doğru olur.

Çözüm (2. yol)



$$\begin{aligned}\zeta + M_O &= -F_x d_y - F_y d_x \\ &= -(5 \cos 45^\circ \text{ kN})(3 \sin 30^\circ \text{ m}) - (5 \sin 45^\circ \text{ kN})(3 \cos 30^\circ \text{ m}) \\ &= -14.5 \text{ kN} \cdot \text{m} = 14.5 \text{ kN} \cdot \text{m} \curvearrowright \quad \text{Ans.}\end{aligned}$$

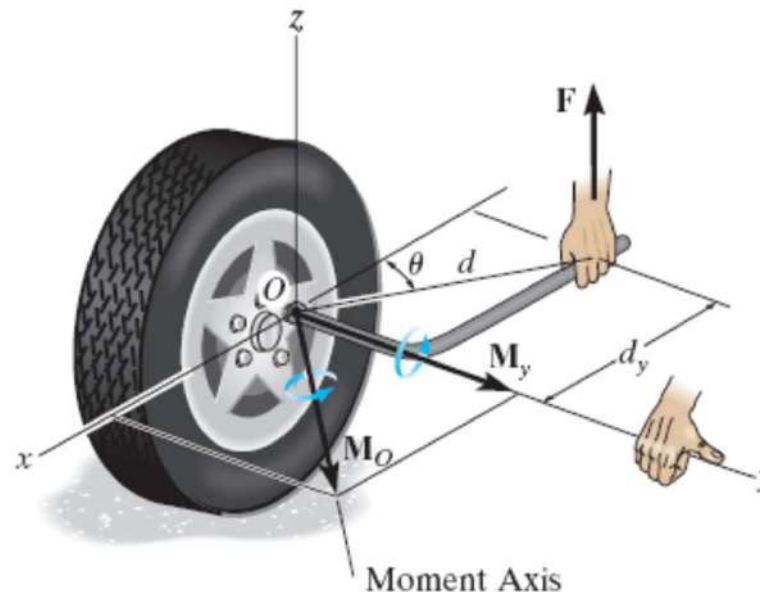
Çözüm (3. yol)



$$\begin{aligned}\zeta + M_O &= -F_y d_x \\ &= -(5 \sin 75^\circ \text{ kN})(3 \text{ m}) \\ &= -14.5 \text{ kN} \cdot \text{m} = 14.5 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Ans.}\end{aligned}$$

4.5 Bir Kuvvetin Belirli Bir Eksene Göre Momenti

- Kuvvetin bir noktaya göre momenti ve onun eksenini her zaman düzleme diktir.
- Bir noktadan geçen belli bir eksendeki moment bileşenini bulmak için skaler veya vektörel analiz kullanılır.



4.5 Bir Kuvvetin Belirli Bir Eksene Göre Momenti (d'm)

Skaler Analiz

Sağ el kuralına göre M_y 'nin yönü pozitif y -ekseni doğrultusundadır.

- Her eksen için moment şöyle olur:

$$M_a = Fd_a$$

- Eğer kuvvet etki çizgisi eksene paralel veya eksenin üzerinden geçiyorsa, kuvvetin momente katkısı olmaz.



4.5 Bir Kuvvetin Belirli Bir Eksene Göre Momenti (d'm)

Vektör Analizi

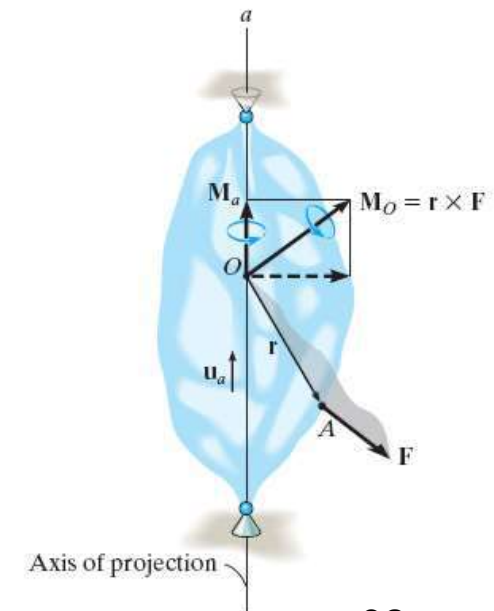
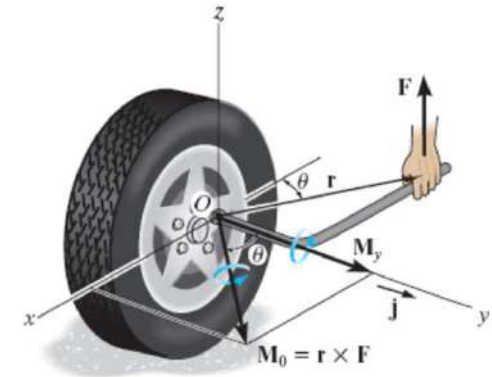
$\mathbf{M}_A$ 'nın büyüklüğü:

$$M_A = M_O \cos \theta = \mathbf{M}_O \cdot \mathbf{u}_a$$

Burada, $\mathbf{u}_a$ birim vektördür.

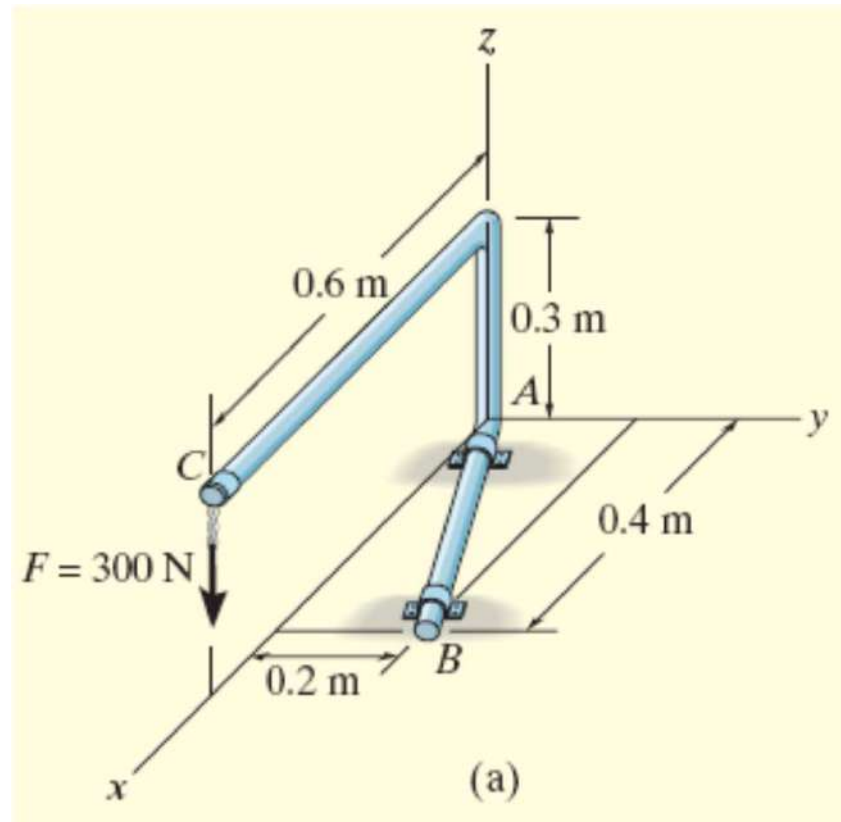
- Determinant formunda şöyle yazılır:

$$|\vec{M}_a| = \vec{u}_{ax} \cdot (\vec{r} \times \vec{F}) = \begin{vmatrix} u_{ax} & u_{ay} & u_{az} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$



Örnek 4.8

Sistemi AB eksenini etrafında döndürmeye çalışan F kuvvetinden dolayı oluşan M_{AB} momentini bulunuz.



Solution

Birim vektör, çubuğun AB ekseninin yönünü tanımlar,
Burada,

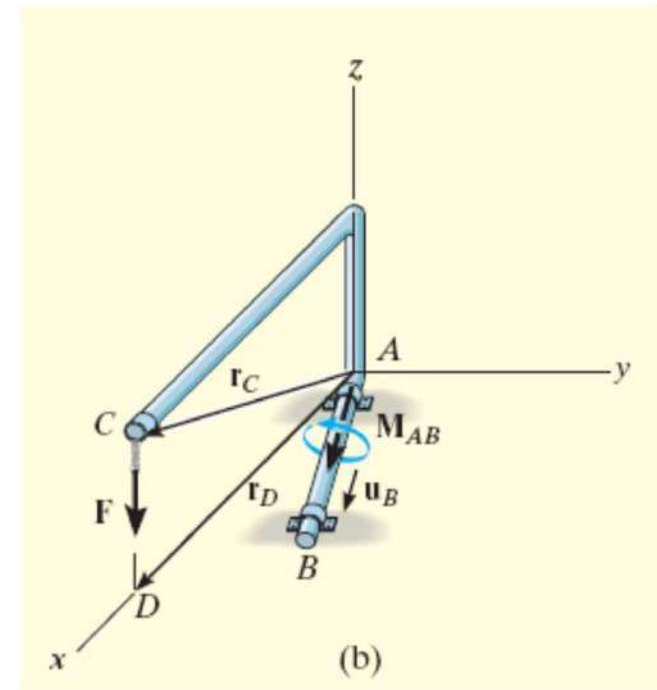
$$u_B = \frac{\vec{r}_B}{r_B} = \frac{\{0.4i + 0.2j\}}{\sqrt{0.4^2 + 0.2^2}} = 0.8944i + 0.4472j$$

Kolaylığından dolayı r_D
hemen yazılabilir.

$$r_D = \{0.6i\}m$$

Kuvvet şöyle yazılabilir:

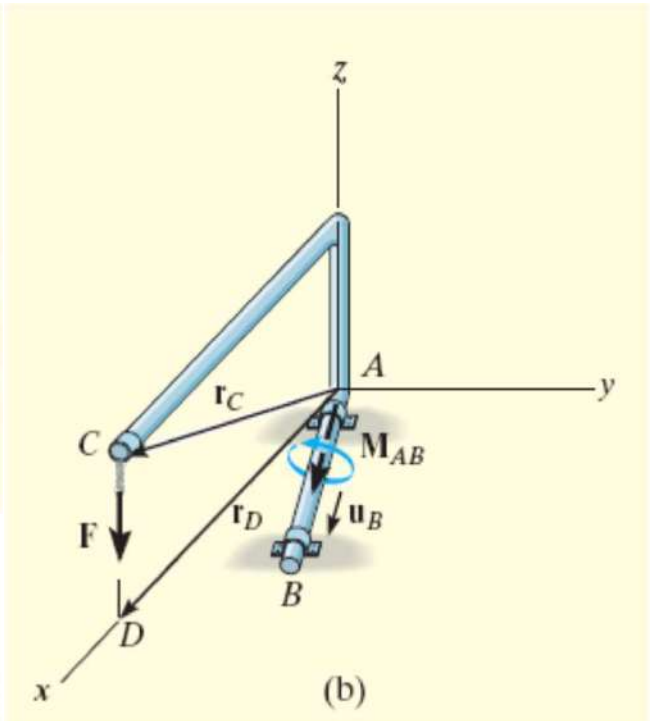
$$F = \{-300k\}N$$



Solution

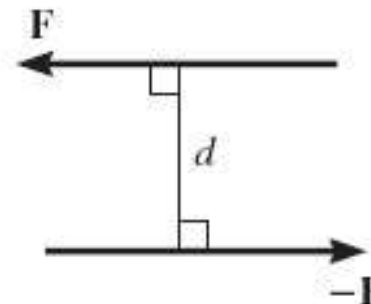
$$\begin{aligned} M_{AB} &= \mathbf{u}_B \cdot (\mathbf{r}_D \times \mathbf{F}) = \begin{vmatrix} 0.8944 & 0.4472 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -300 \end{vmatrix} \\ &= 0.8944[0(-300) - 0(0)] - 0.4472[0.6(-300) - 0(0)] \\ &\quad + 0[0.6(0) - 0(0)] \\ &= 80.50 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{AB} &= M_{AB} \mathbf{u}_B = (80.50 \text{ N} \cdot \text{m})(0.8944\mathbf{i} + 0.4472\mathbf{j}) \\ &= \{72.0\mathbf{i} + 36.0\mathbf{j}\} \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned} \quad \text{Ans.}$$



4.6 Bir Kuvvet Çiftinin Momenti

- Kuvvet çifti
 - iki paralel kuvvettir.
 - aynı büyüklüğe sahiptir, fakat ters yönlüdür.
 - aralarında dik olan d mesafesi vardır.
 - bileşkesi sıfıra eşittir.
- Belirli bir doğrultuda dönme etkisi vermektedir.
- Kuvvet çifti momenti (Couple moment), kuvvet çiftinin oluşturduğu momenttir.



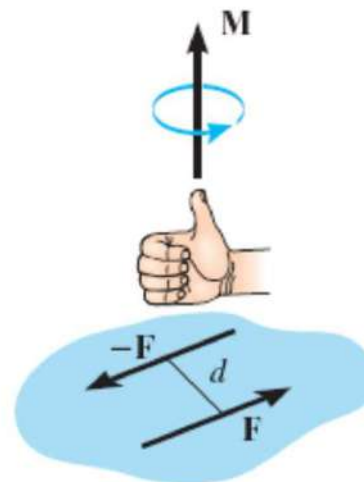
4.6 Bir Kuvvet Çiftinin Momenti (d'm)

Skaler Formulasyon

- Kuvvet çifti momentinin büyüklüğü

$$M = Fd$$

- Doğrultu ve yön sağ el kuralına göre bulunur.
- **M** kuvvetlerin bulunduğu düzleme dik etki eder.



4.6 Bir Kuvvet Çiftinin Momenti (d'm)

Vektör Formulasyonu

- Kuvvet çifti momenti için,

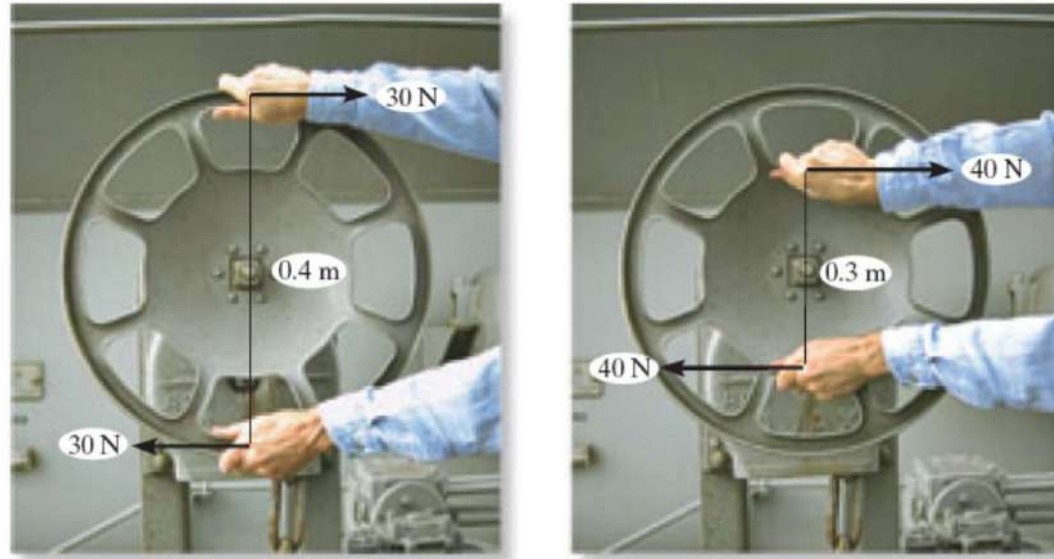
$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

- Eğer moment A noktasına göre alınmışsa, $-\mathbf{F}'$ 'nin bu noktaya göre momenti sıfırdır.

4.6 Bir Kuvvet Çiftinin Momenti ($d'm$)

Eşdeğer Kuvvet Çiftleri

- İki kuvvet çifti eğer aynı moment değerine ve yönüne sahipse bu kuvvet çiftleri eşdeğerdir denir.
- Eşdeğer kuvvet çiftleri aynı ya da paralel düzlemde etkiyebilirler.



4.6 Bir Kuvvet Çiftinin Momenti (d'm)

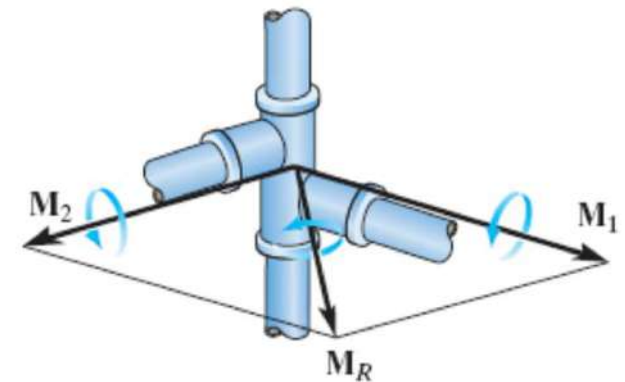
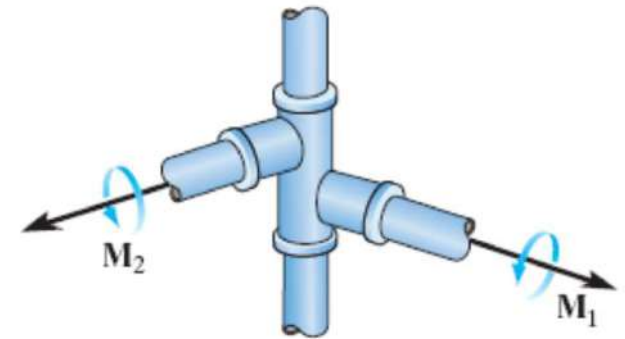
Kuvvet Çifti Momentlerinin Bileşkesi

- Kuvvet çifti momentleri serbest vektörlerdir ve herhangi bir P noktasına uygulanabilir ve vektörel olarak toplanabilirler.
- Bir P noktasına etki eden iki kuvvet çiftinin bileşke momenti için:

$$\mathbf{M}_R = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$$

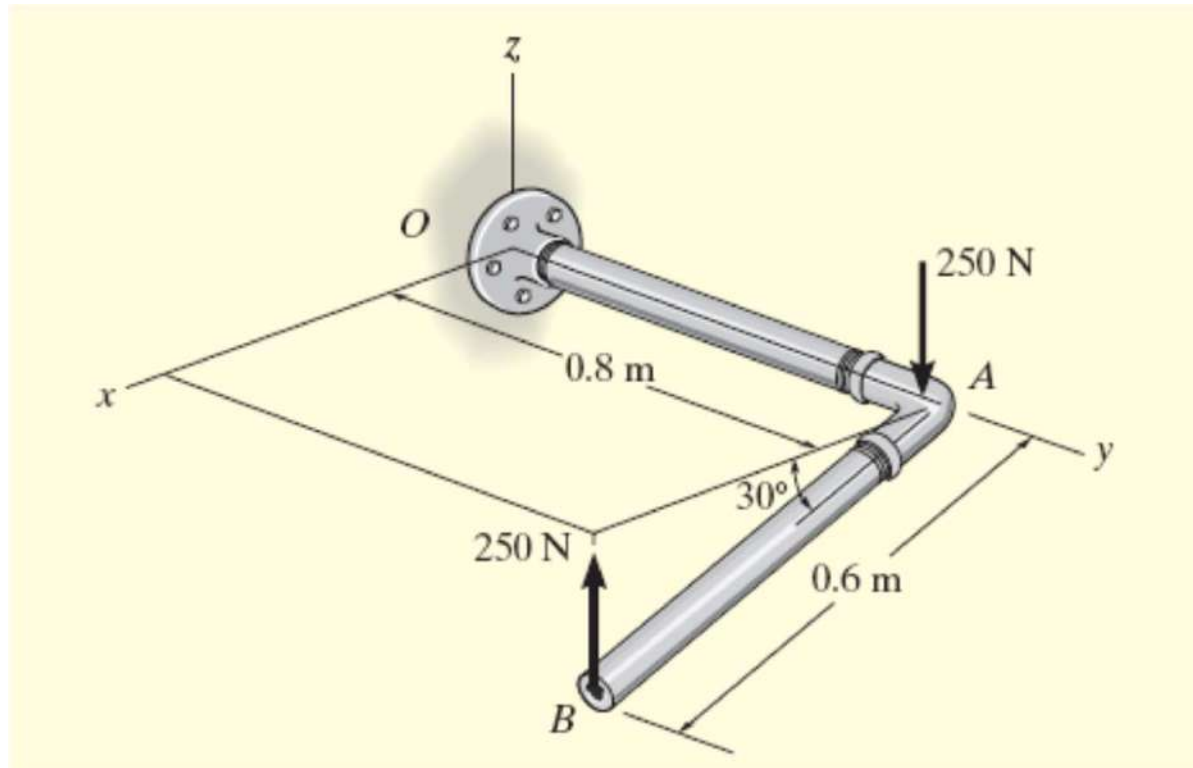
- İki'den fazla moment için:

$$\mathbf{M}_R = \sum(\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$



Örnek 4.12

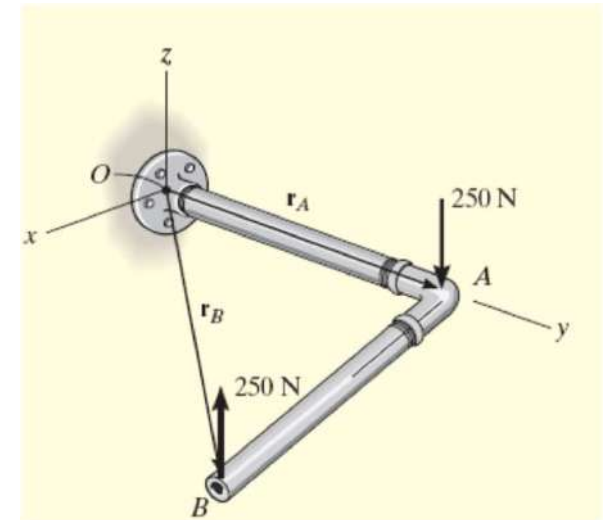
Şekildeki boru elemana etki eden kuvvet çifti momentini (couple moment) bulunuz. AB boru kısmı, x – y düzleminde 30° aşağıda yer almaktadır.



Çözüm-I (Vektörel Analiz)

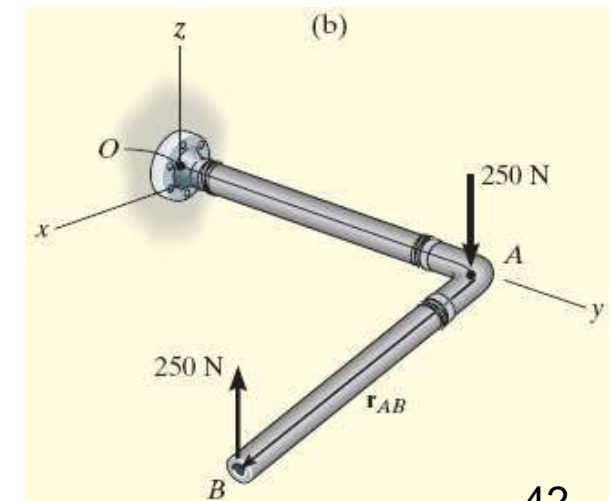
- O noktasına göre moment alalım.

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= \mathbf{r}_A \times (-250\mathbf{k}) + \mathbf{r}_B \times (250\mathbf{k}) \\ &= (0.8\mathbf{j}) \times (-250\mathbf{k}) + (0.6\cos 30^\circ \mathbf{i} \\ &\quad + 0.8\mathbf{j} - 0.6\sin 30^\circ \mathbf{k}) \times (250\mathbf{k}) \\ &= -200\mathbf{i} - 130\mathbf{j} + 200\mathbf{i} = \{-130\mathbf{j}\} \text{ N.cm}\end{aligned}$$



- A noktasına göre moment alalım.

$$\begin{aligned}\mathbf{M} &= \mathbf{r}_{AB} \times (250\mathbf{k}) \\ &= (0.6\cos 30^\circ \mathbf{i} - 0.6\sin 30^\circ \mathbf{k}) \\ &\quad \times (250\mathbf{k}) \\ &= \{-130\mathbf{j}\} \text{ N.cm}\end{aligned}$$



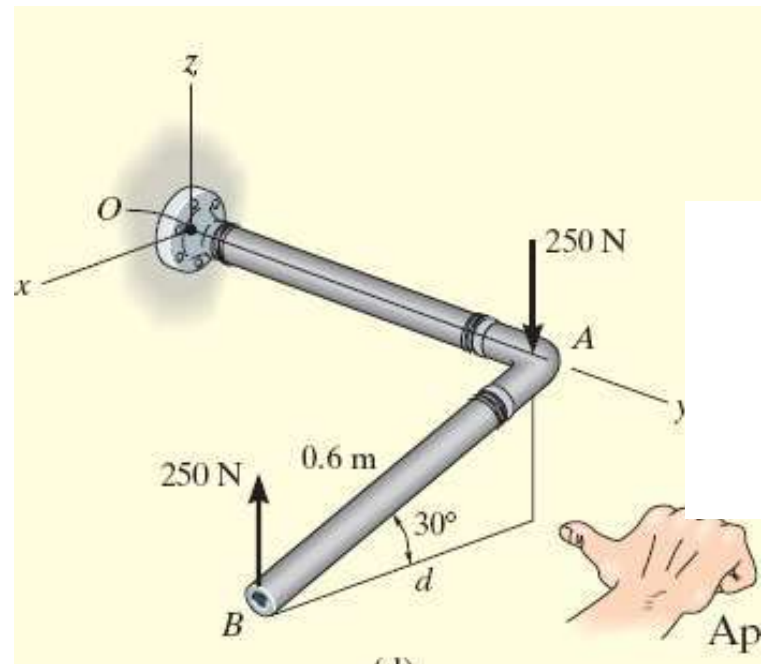
Çözüm-II (Skaler Analiz)

- A veya B noktasına göre moment alalım.

$$M = Fd = 250\text{N}(0.5196\text{m})$$
$$= 130 \text{ N.cm}$$

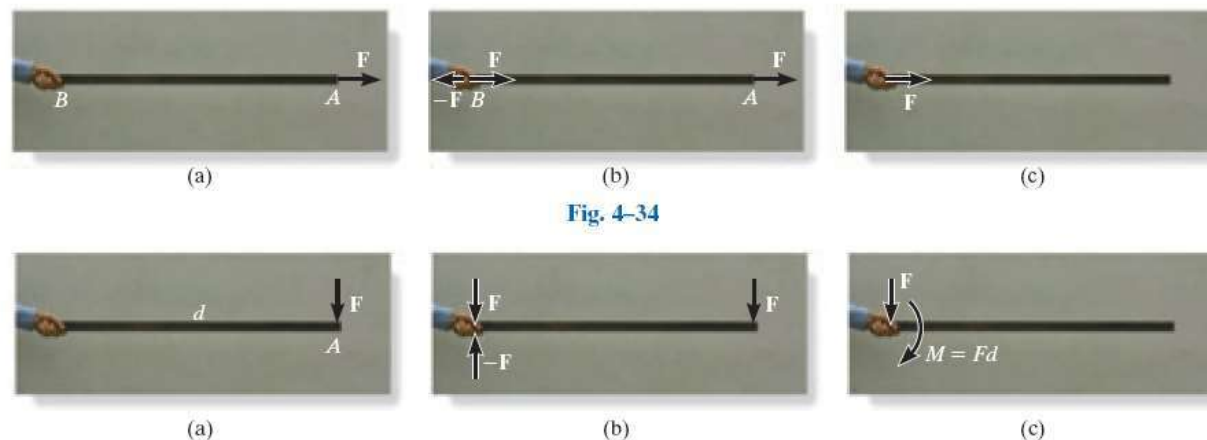
- Sağ el kuralı uygulandığında M'nin $-j$ doğrultusunda olduğu görülür.

$$\mathbf{M} = \{-130\mathbf{j}\} \text{ N.cm}$$



4.7 Simplification of a Force and Couple System

- An equivalent system is when the *external effects* are the same as those caused by the original force and couple moment system
- External effects of a system is the *translating and rotating motion* of the body
- Or refers to the *reactive forces* at the supports if the body is held fixed



4.7 Simplification of a Force and Couple System

- Equivalent resultant force acting at point O and a resultant couple moment is expressed as

$$F_R = \sum F$$

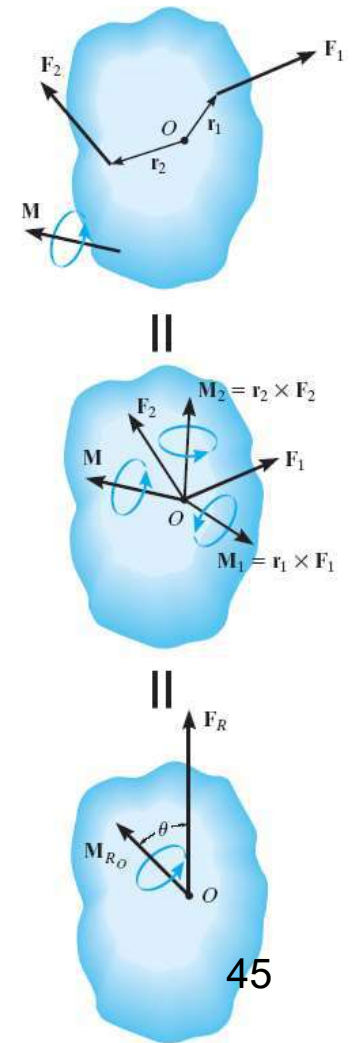
$$(M_R)_O = \sum M_O + \sum M$$

- If force system lies in the x – y plane and couple moments are perpendicular to this plane,

$$(F_R)_x = \sum F_x$$

$$(F_R)_y = \sum F_y$$

$$(M_R)_O = \sum M_O + \sum M$$



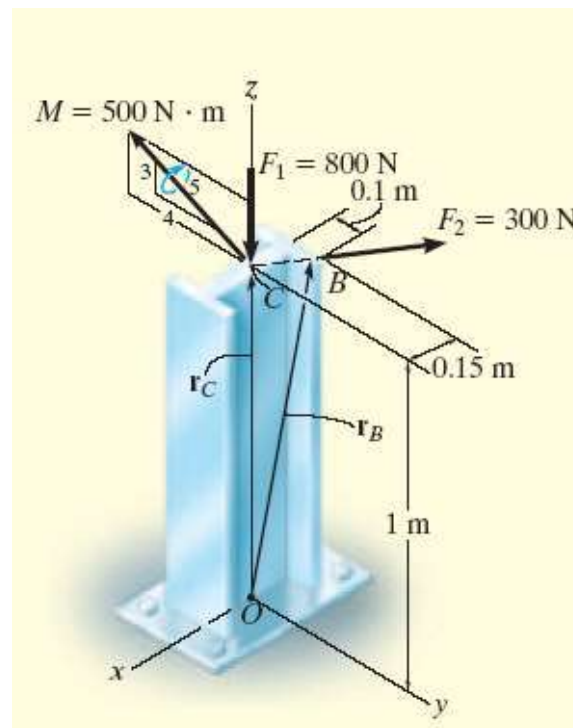
4.7 Simplification of a Force and Couple System

Procedure for Analysis

1. Establish the coordinate axes with the origin located at point O and the axes having a selected orientation
2. Force Summation
3. Moment Summation

Example 4.16

A structural member is subjected to a couple moment $\mathbf{M}$ and forces $\mathbf{F}_1$ and $\mathbf{F}_2$. Replace this system with an equivalent resultant force and couple moment acting at its base, point O.



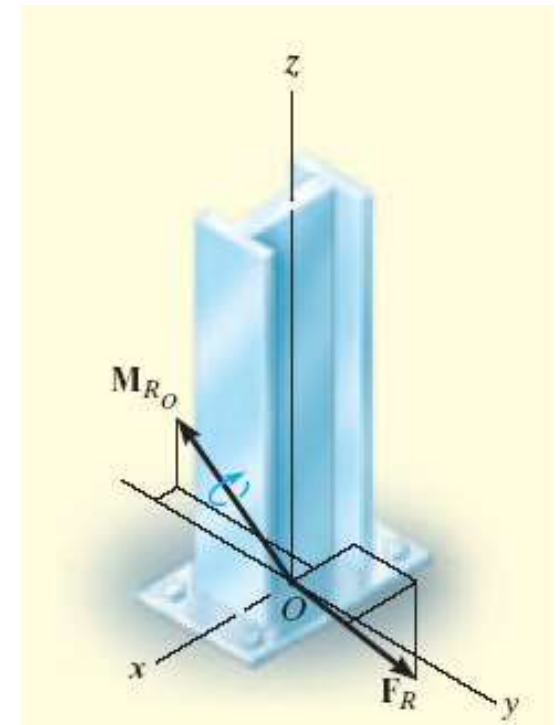
Solution

Express the forces and couple moments as Cartesian vectors.

$$\vec{F}_1 = \{-800\vec{k}\} N$$

$$\begin{aligned}\vec{F}_2 &= (300 N)\vec{u}_{CB} = (300 N)\left(\frac{\vec{r}_{CB}}{|\vec{r}_{CB}|}\right) \\ &= 300\left[\frac{-0.15\vec{i} + 0.1\vec{j}}{\sqrt{(0.15)^2 + (0.1)^2}}\right] = \{-249.6\vec{i} + 166.4\vec{j}\} N\end{aligned}$$

$$M = -500\left(\frac{4}{5}\right)\vec{j} + 500\left(\frac{3}{5}\right)\vec{k} = \{-400\vec{j} + 300\vec{k}\} N.m$$



Solution

Force Summation.

$$\vec{F}_R = \Sigma \vec{F};$$

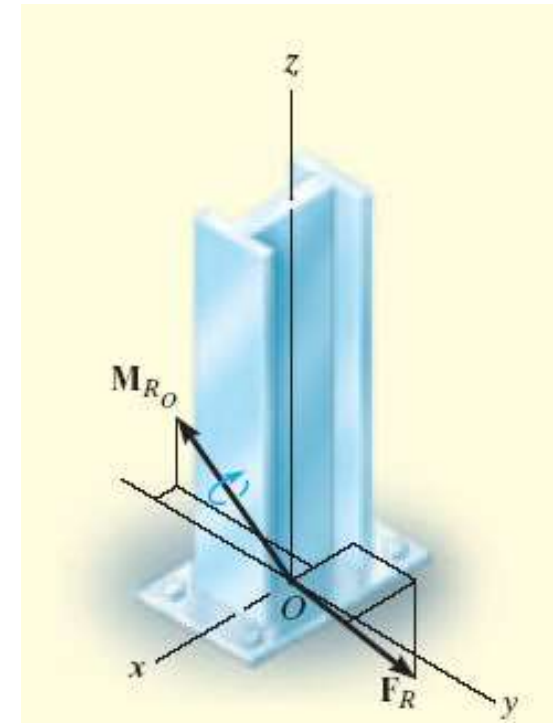
$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -800\vec{k} - 249.6\vec{i} + 166.4\vec{j}$$

$$= \{-249.6\vec{i} + 166.4\vec{j} - 800\vec{k}\} N$$

$$\vec{M}_{Ro} = \Sigma \vec{M}_C + \Sigma \vec{M}_O = \vec{M} + \vec{r}_C \times \vec{F}_1 + \vec{r}_B \times \vec{F}_2$$

$$= (-400\vec{j} + 300\vec{k}) + (1\vec{k}) \times (-800\vec{k}) + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -0.15 & 0.1 & 1 \\ -249.6 & 166.4 & 0 \end{vmatrix}$$

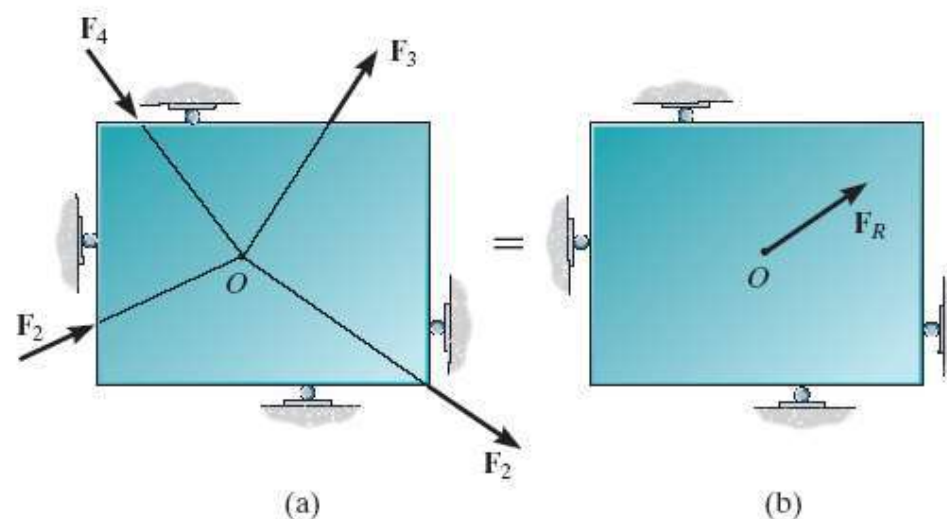
$$= \{-166\vec{i} - 650\vec{j} + 300\vec{k}\} N.m$$



4.8 Further Simplification of a Force and Couple System

Concurrent Force System

- A *concurrent force system* is where lines of action of all the forces intersect at a common point O

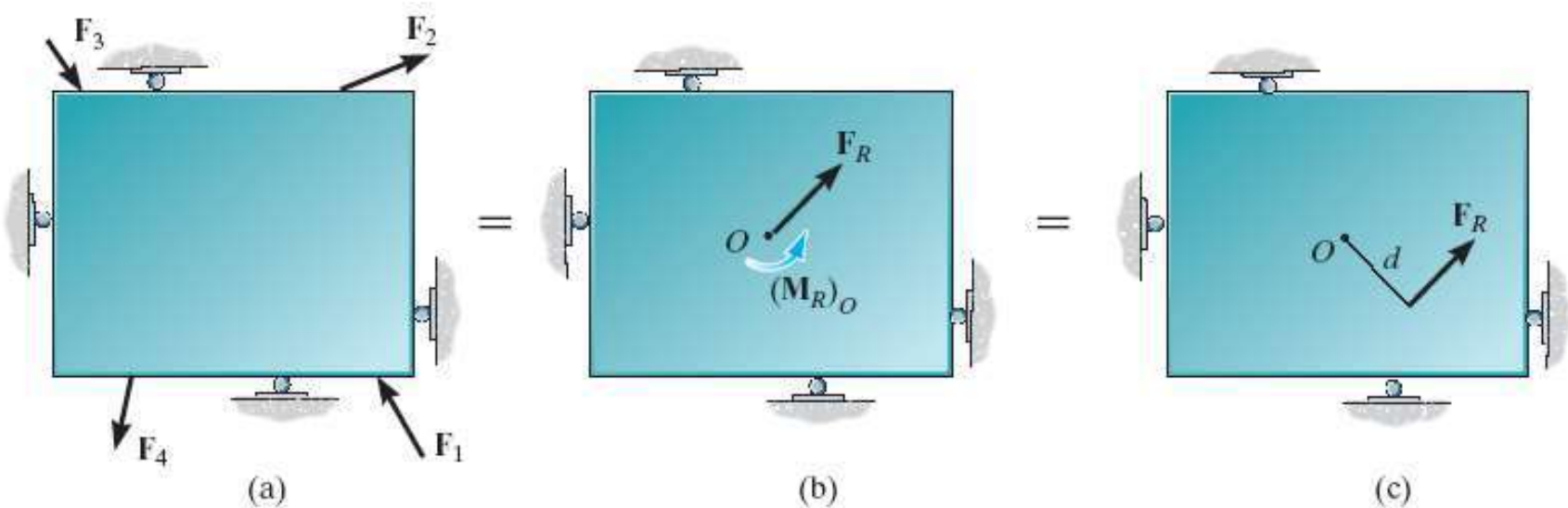


$$F_R = \sum F$$

4.8 Further Simplification of a Force and Couple System

Coplanar Force System

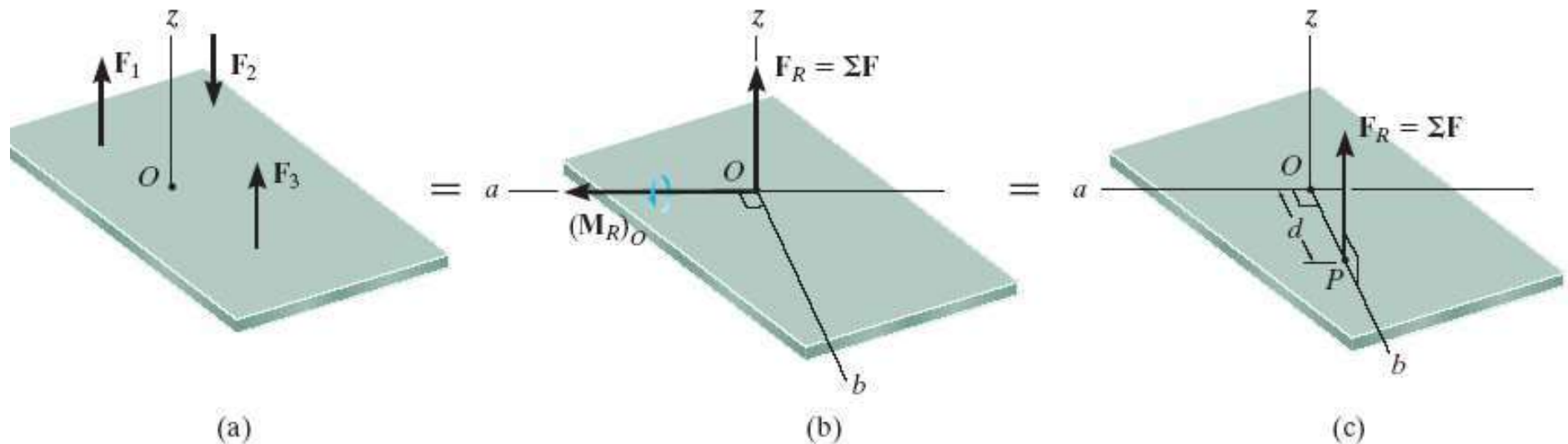
- Lines of action of all the forces lie in the same plane
- Resultant force of this system also lies in this plane



4.8 Further Simplification of a Force and Couple System

Parallel Force System

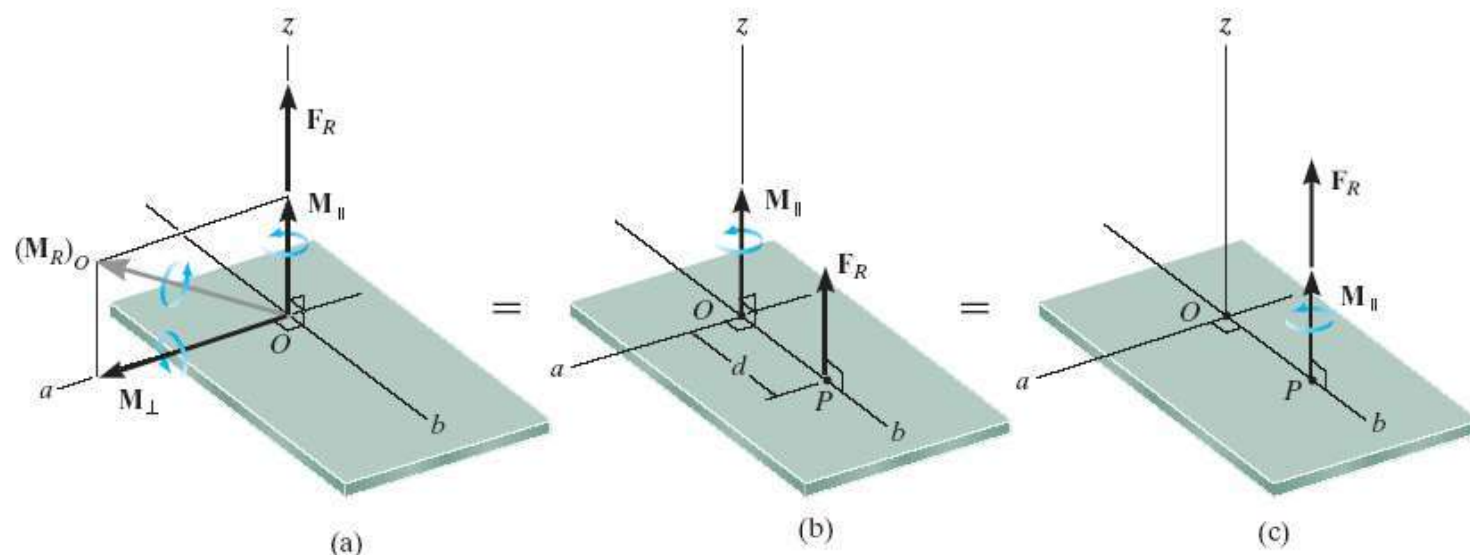
- Consists of forces that are all parallel to the z axis
- Resultant force at point O must also be parallel to this axis



4.8 Further Simplification of a Force and Couple System

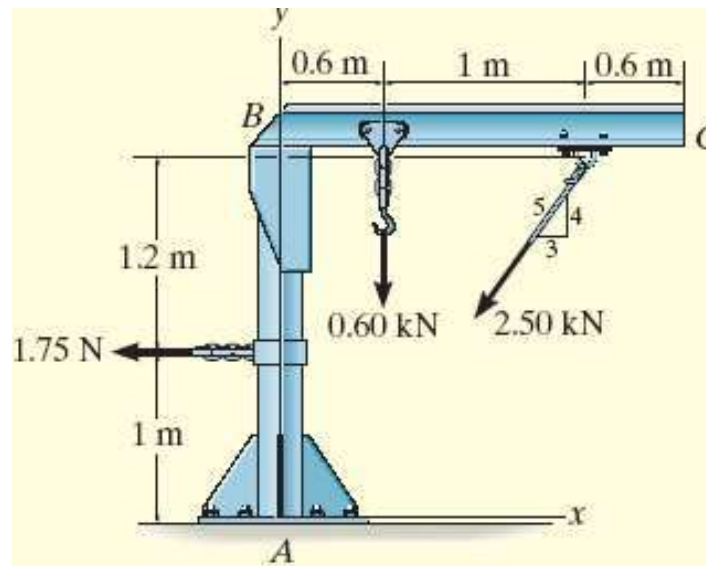
Reduction to a Wrench

- 3-D force and couple moment system have an equivalent resultant force acting at point O
- Resultant couple moment *not perpendicular* to one another



Example 4.18

The jib crane is subjected to three coplanar forces. Replace this loading by an equivalent resultant force and specify where the resultant's line of action intersects the column AB and boom BC.



Solution

Force Summation

$$+ \rightarrow F_{Rx} = \Sigma F_x;$$

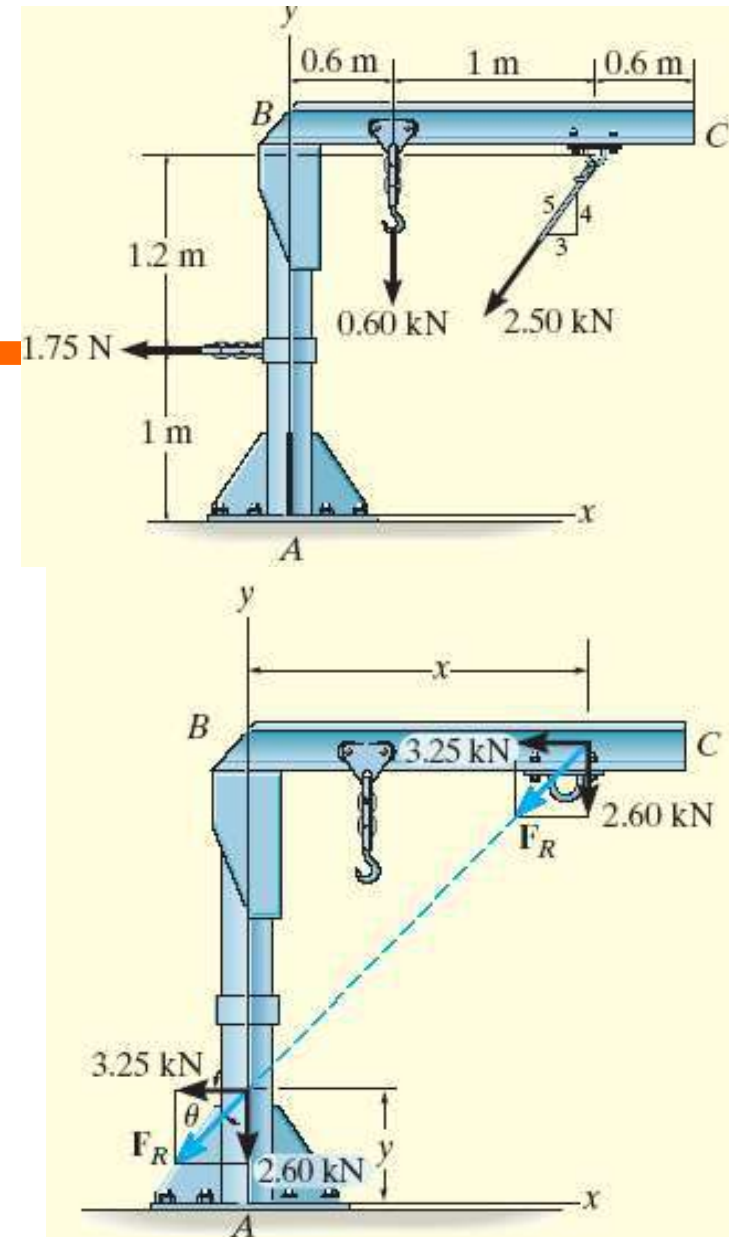
$$F_{Rx} = -2.5kN\left(\frac{3}{5}\right) - 1.75kN$$

$$= -3.25kN = 3.25kN \leftarrow$$

$$+ \rightarrow F_{Ry} = \Sigma F_y;$$

$$F_{Ry} = -2.5N\left(\frac{4}{5}\right) - 0.6kN$$

$$= -2.60kN = 2.60N \downarrow$$



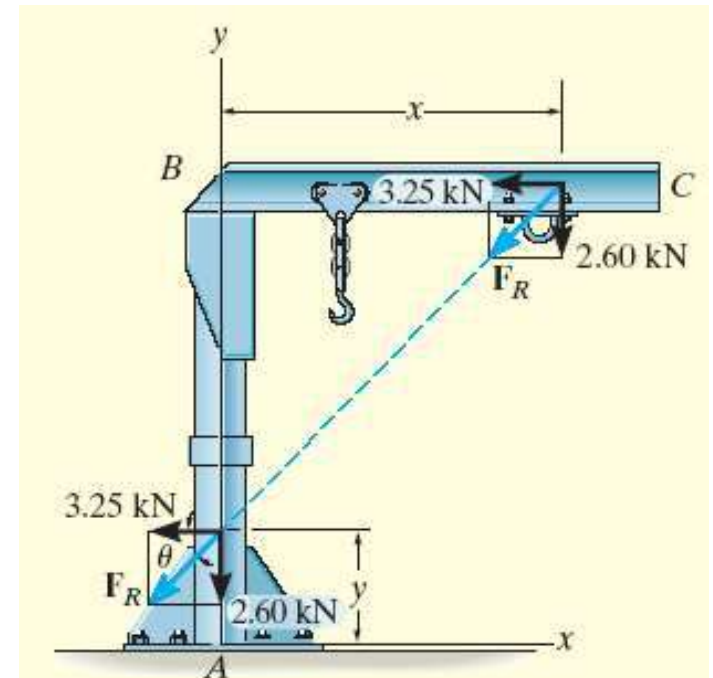
Solution

For magnitude of resultant force,

$$F_R = \sqrt{(F_{Rx})^2 + (F_{Ry})^2} = \sqrt{(3.25)^2 + (2.60)^2} \\ = 4.16 \text{ kN}$$

For direction of resultant force,

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{2.60}{3.25} \right) \\ = 38.7^\circ$$



Solution

Moment Summation

→ Summation of moments about point A

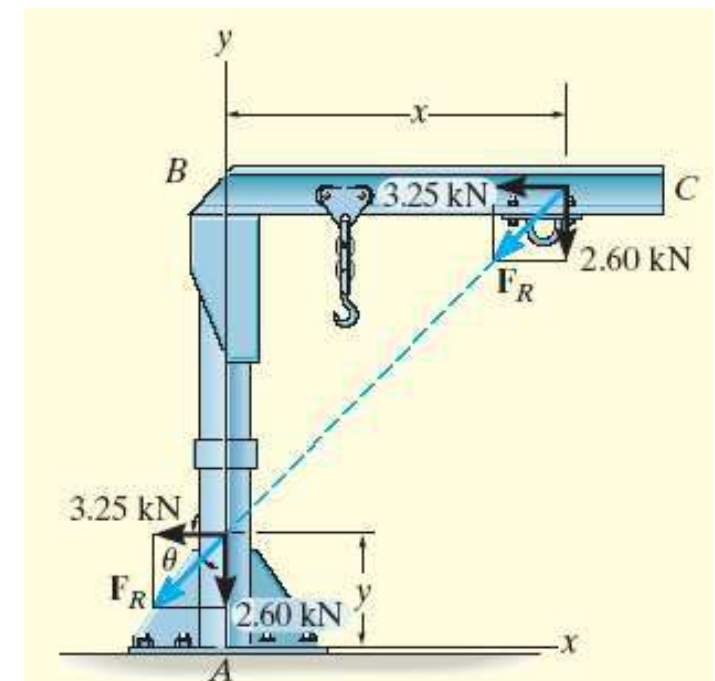
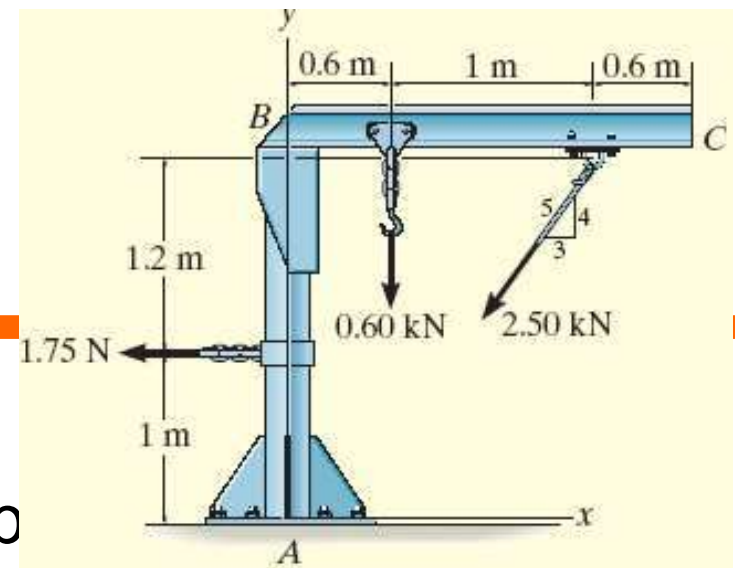
$$M_{RA} = \Sigma M_A;$$

$$3.25kN(y) + 2.60kN(0)$$

$$= 1.75kN(1m) - 0.6kN(0.6m)$$

$$+ 2.50kN\left(\frac{3}{5}\right)(2.2m) - 2.50kN\left(\frac{4}{5}\right)(1.6m)$$

$$y = 0.458m$$



Solution

Moment Summation

→ Principle of Transmissibility

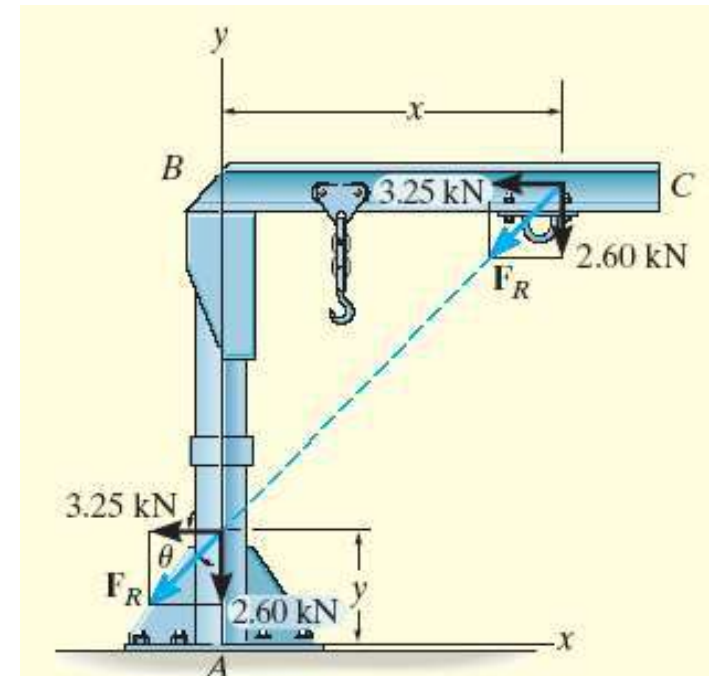
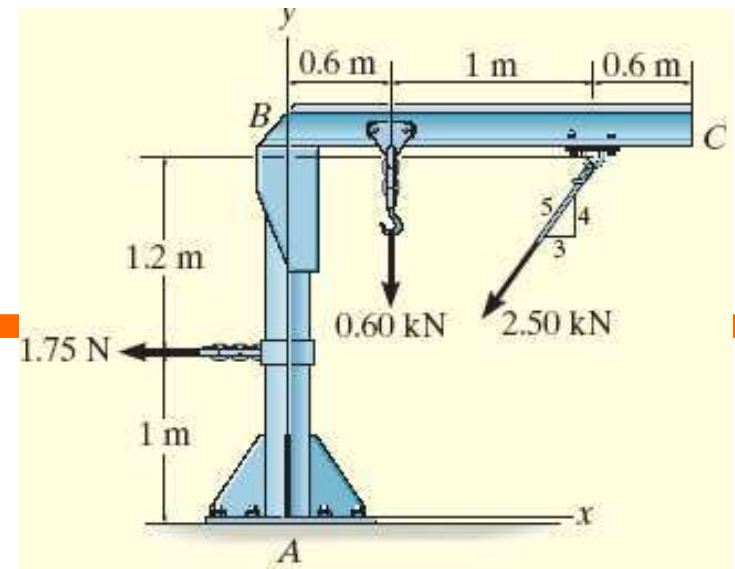
$$M_{RA} = \Sigma M_A;$$

$$3.25kN(2.2m) - 2.60kN(x)$$

$$= 1.75kn(1m) - 0.6kN(0.6m)$$

$$+ 2.50kN\left(\frac{3}{5}\right)(2.2m) - 2.50kN\left(\frac{4}{5}\right)(1.6m)$$

$$x = 2.177m$$

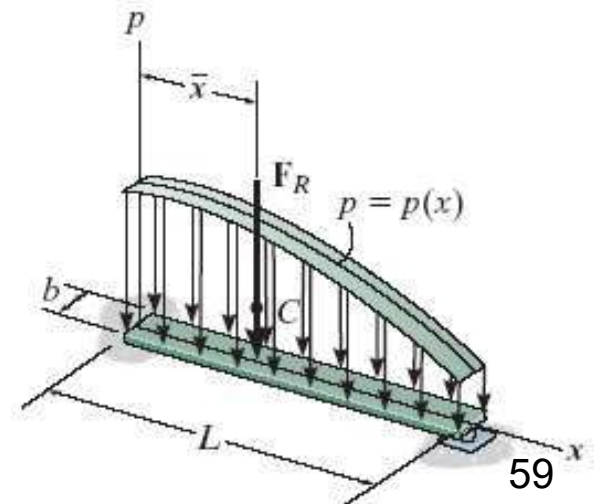


4.9 Düzgün Yayılı Yükleme

- Large surface area of a body may be subjected to distributed loadings
- Loadings on the surface is defined as pressure
- Pressure is measured in Pascal (Pa): $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$

Uniform Loading Along a Single Axis

- Most common type of distributed loading is uniform along a single axis



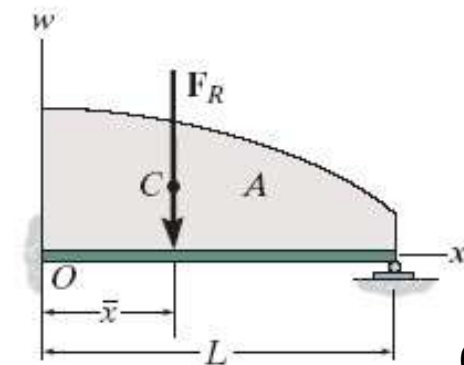
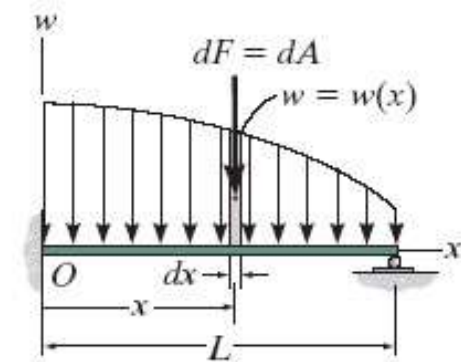
4.9 Düzgün Yayılı Yükleme (d'm)

Magnitude of Resultant Force

- Magnitude of $d\mathbf{F}$ is determined from differential *area* dA under the loading curve.
- For length L ,

$$F_R = \int_L w(x) dx = \int_A dA = A$$

- *Magnitude of the resultant force is equal to the total area A under the loading diagram.*



4.9 Düzgün Yayılı Yükleme (d'm)

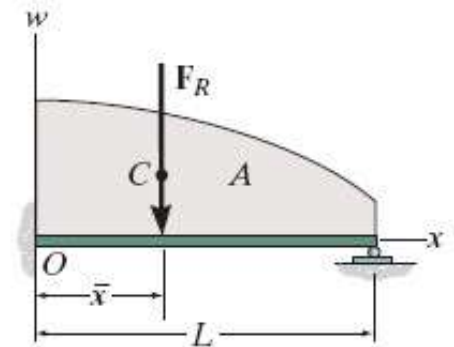
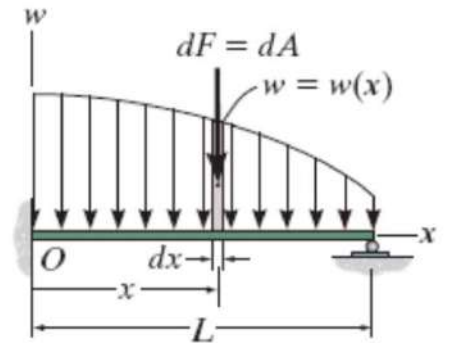
Location of Resultant Force

- $M_R = \Sigma M_O$
- $d\mathbf{F}$ produces a moment of $x dF = x w(x) dx$ about O
- For the entire plate,

$$M_{Ro} = \Sigma M_O \quad \bar{x} F_R = \int_L x w(x) dx$$

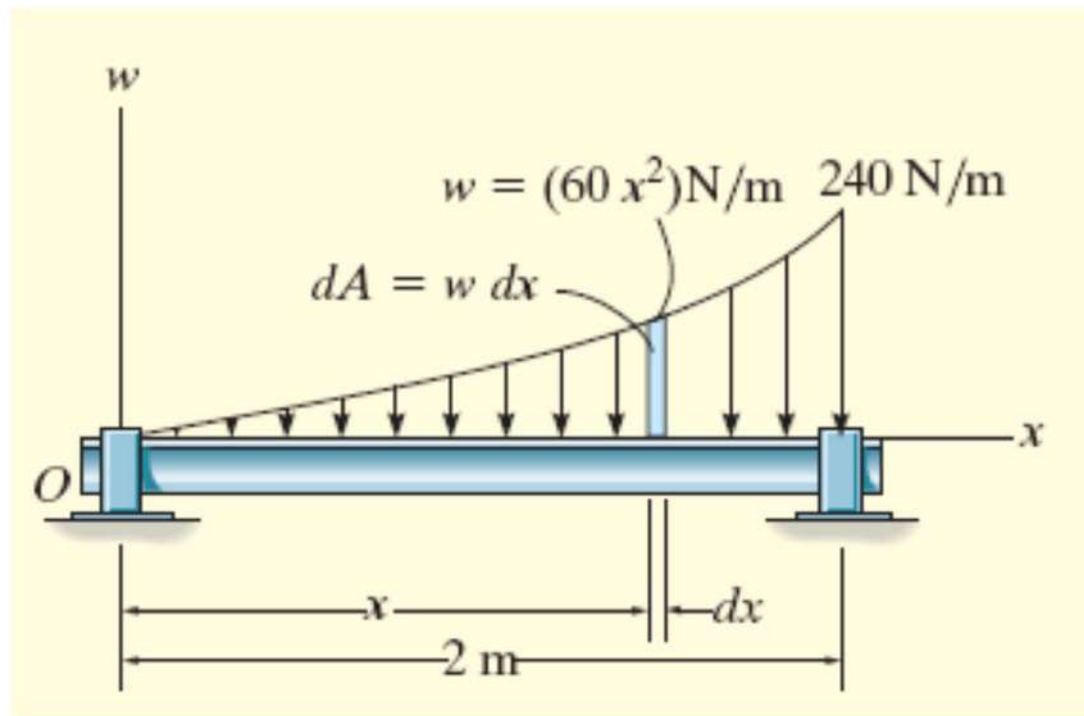
- Solving for $\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{\int_L x w(x) dx}{\int_L w(x) dx} = \frac{\int_A x dA}{\int_A dA}$$



Example 4.21

Determine the magnitude and location of the equivalent resultant force acting on the shaft.



Solution

For the colored differential area element,

$$dA = wdx = 60x^2 dx$$

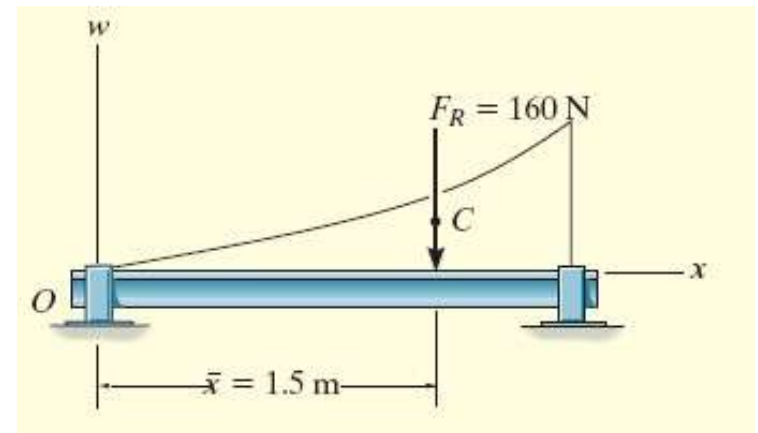
For resultant force

$$F_R = \Sigma F;$$

$$F_R = \int_A dA = \int_0^2 60x^2 dx$$

$$= 60 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 60 \left[\frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right]$$

$$= 160 N$$



Solution

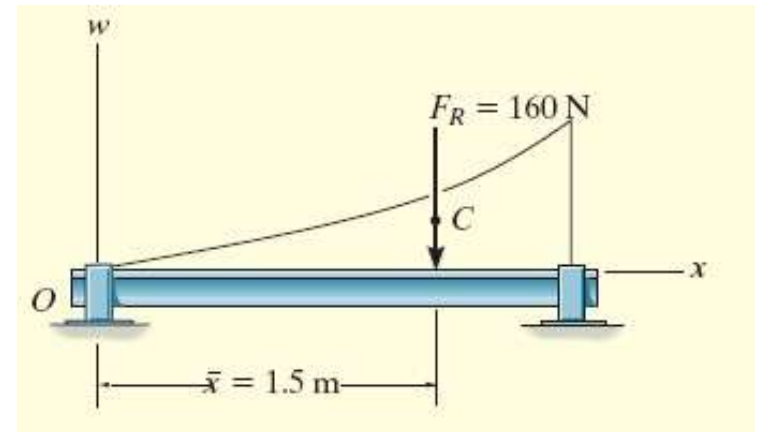
For location of line of action,

$$\bar{x} = \frac{\int_A x dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^2 x(60x^2) dx}{160} = \frac{60 \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^2}{160} = \frac{60 \left[\frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4} \right]}{160}$$
$$= 1.5m$$

Checking,

$$A = \frac{ab}{3} = \frac{2m(240N/m)}{3} = 160$$

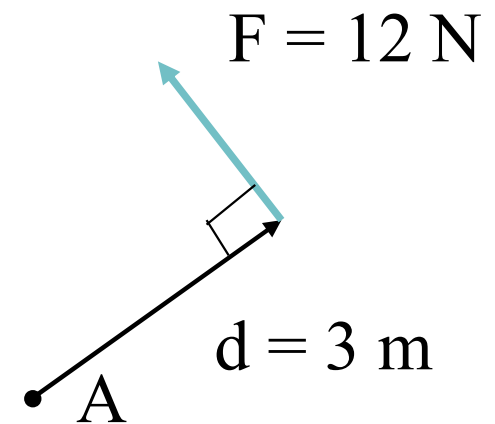
$$\bar{x} = \frac{3}{4}a = \frac{3}{4}(2m) = 1.5m$$



QUIZ

1. What is the moment of the 10 N force about point A (M_A)?

- A) 3 N·m B) 36 N·m C) 12 N·m
D) (12/3) N·m E) 7 N·m



2. The moment of force $\mathbf{F}$ about point O is defined as $\mathbf{M}_O$

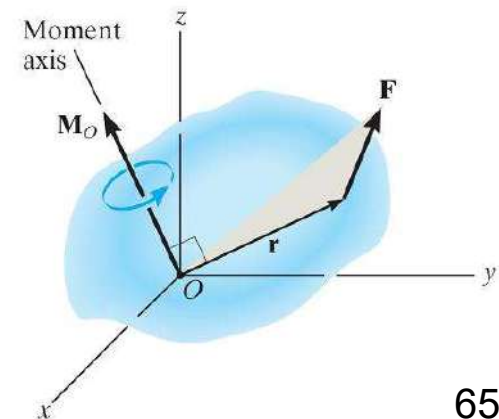
= _____ .

A) $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$

B) $\mathbf{F} \times \mathbf{r}$

C) $\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}$

D) $\mathbf{r} * \mathbf{F}$



QUIZ

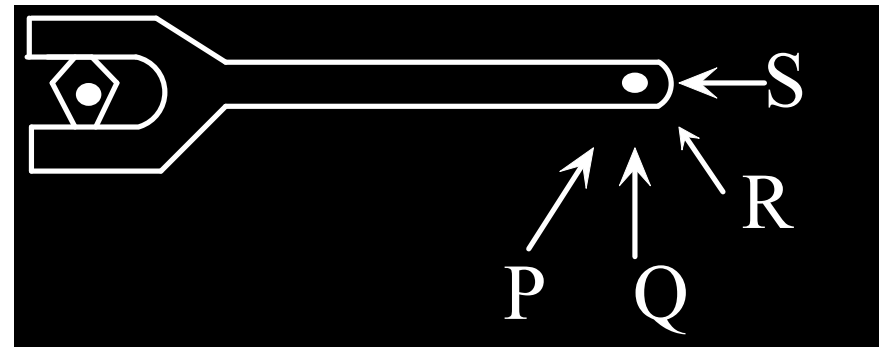
3. If a force of magnitude F can be applied in 4 different 2-D configurations (P, Q, R, & S), select the cases resulting in the maximum and minimum torque values on the nut. (Max, Min).

A) (Q, P)

B) (R, S)

C) (P, R)

D) (Q, S)



4. If $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, then what will be the value of $\mathbf{M} \cdot \mathbf{r}$?

A) 0

B) 1

C) $r^2 F$

D) None of the above.

QUIZ

5. Using the CCW direction as positive, the net moment of the two forces about point P is

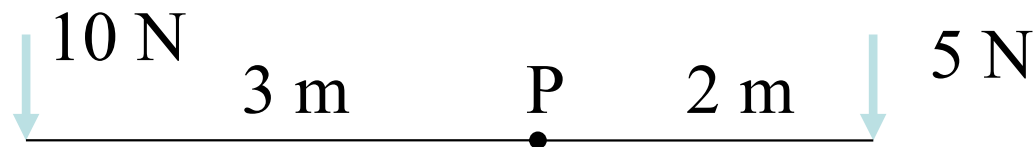
A) 10 N · m

B) 20 N · m

C) - 20 N · m

D) 40 N · m

E) - 40 N · m



6. If $\mathbf{r} = \{ 5 \mathbf{j} \}$ m and $\mathbf{F} = \{ 10 \mathbf{k} \}$ N, the moment $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ equals $\{ \text{_____} \}$ N · m.

A) 50 $\mathbf{i}$

B) 50 $\mathbf{j}$

C) -50 $\mathbf{i}$

D) - 50 $\mathbf{j}$

E) 0

QUIZ

7. When determining the moment of a force about a specified axis, the axis must be along _____.

- A) the x axis B) the y axis C) the z axis
D) any line in 3-D space E) any line in the x-y plane

8. The triple scalar product $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$ results in

- A) a scalar quantity (+ or -)
B) a vector quantity.
C) zero.
D) a unit vector. E) an imaginary number.

QUIZ

9. The vector operation $(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{R}$ equals

A) $\mathbf{P} \times (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R})$.

B) $\mathbf{R} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q})$.

C) $(\mathbf{P} \cdot \mathbf{R}) \times (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{R})$.

D) $(\mathbf{P} \times \mathbf{R}) \cdot (\mathbf{Q} \times \mathbf{R})$.

10. The force $\mathbf{F}$ is acting along DC. Using the triple product to determine the moment of $\mathbf{F}$ about the bar BA, you could use any of the following position vectors except

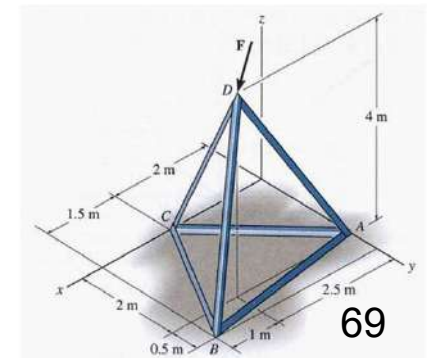
A) $\mathbf{r}_{BC}$

B) $\mathbf{r}_{AD}$

C) $\mathbf{r}_{AC}$

D) $\mathbf{r}_{DB}$

E) $\mathbf{r}_{BD}$



QUIZ

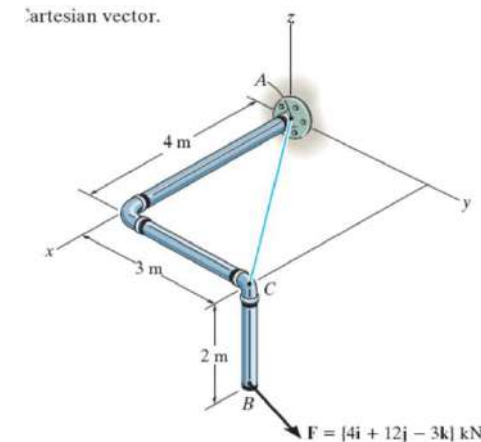
11. For finding the moment of the force $\mathbf{F}$ about the x-axis, the position vector in the triple scalar product should be ____ .

A) $\mathbf{r}_{AC}$

B) $\mathbf{r}_{BA}$

C) $\mathbf{r}_{AB}$

D) $\mathbf{r}_{BC}$



12. If $\mathbf{r} = \{1 \mathbf{i} + 2 \mathbf{j}\}$ m and $\mathbf{F} = \{10 \mathbf{i} + 20 \mathbf{j} + 30 \mathbf{k}\}$ N, then the moment of $\mathbf{F}$ about the y-axis is ____ N·m.

A) 10

B) -30

C) -40

D) None of the above.

QUIZ

13. In statics, a couple is defined as _____ separated by a perpendicular distance.

- A) two forces in the same direction
- B) two forces of equal magnitude
- C) two forces of equal magnitude acting in the same direction
- D) two forces of equal magnitude acting in opposite directions

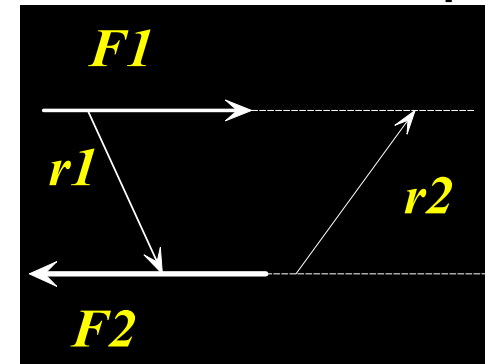
14. The moment of a couple is called a _____ vector.

- A) Free
- B) Spin
- C) Romantic
- D) Sliding

QUIZ

15. **$F1$** and **$F2$** form a couple. The moment of the couple is given by _____.

- A) $r1 \times F1$ B) $r2 \times F1$
C) $F2 \times r1$ D) $r2 \times F2$



16. If three couples act on a body, the overall result is that

- A) The net force is not equal to 0.
B) The net force and net moment are equal to 0.
C) The net moment equals 0 but the net force is not necessarily equal to 0.
D) The net force equals 0 but the net moment is not necessarily equal to 0.

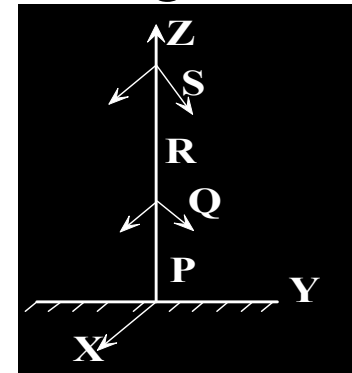
QUIZ

17. A general system of forces and couple moments acting on a rigid body can be reduced to a ____ .
- A) single force
 - B) single moment
 - C) single force and two moments
 - D) single force and a single moment
18. The original force and couple system and an equivalent force-couple system have the same _____ effect on a body.
- A) internal
 - B) external
 - C) internal and external
 - D) microscopic

QUIZ

18. The forces on the pole can be reduced to a single force and a single moment at point _____ .

- A) P B) Q C) R
D) S **E) Any of these points.**



19. Consider two couples acting on a body. The simplest possible equivalent system at any arbitrary point on the body will have

- A) One force and one couple moment.
B) One force.
C) One couple moment.
D) Two couple moments.

QUIZ

20. Consider three couples acting on a body. Equivalent systems will be _____ at different points on the body.

A) Different when located

B) The same even when located

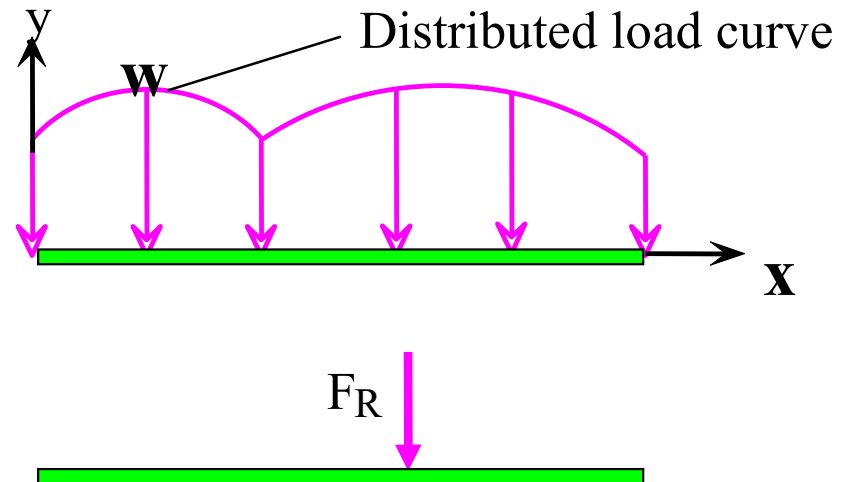
C) Zero when located

D) None of the above.

QUIZ

21. The resultant force (F_R) due to a distributed load is equivalent to the _____ under the distributed loading curve, $w = w(x)$.

- A) Centroid B) Arc length
C) Area D) Volume



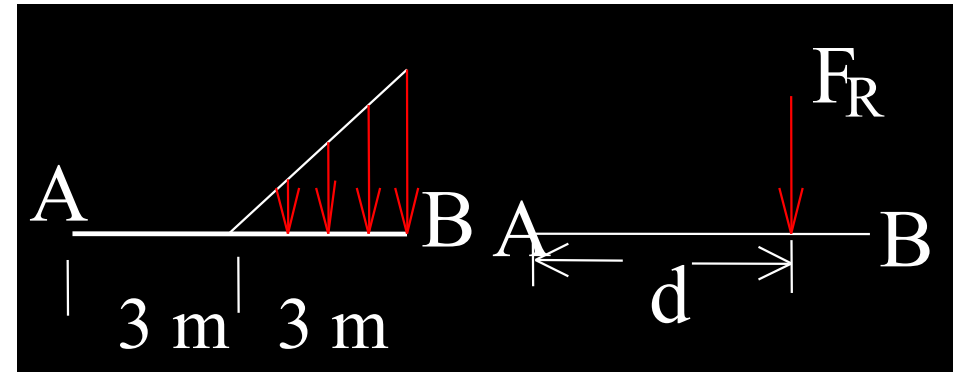
22. The line of action of the distributed load's equivalent force passes through the _____ of the distributed load.

- A) Centroid B) Mid-point
C) Left edge D) Right edge

QUIZ

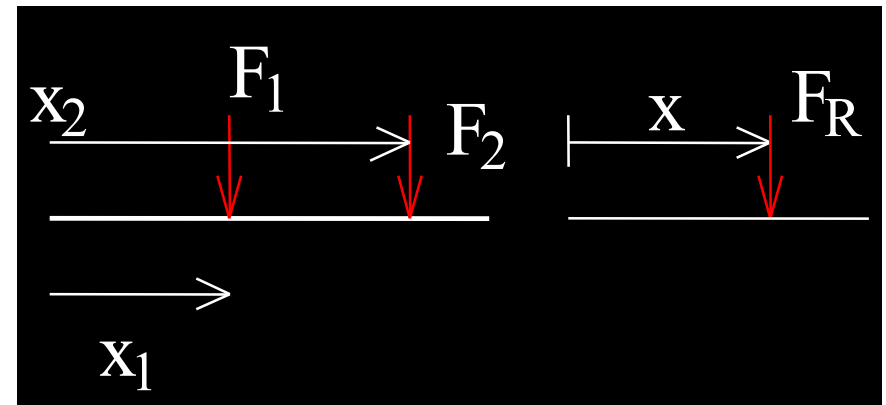
23. What is the location of F_R , i.e., the distance d ?

- A) 2 m B) 3 m C) 4 m
D) 5 m E) 6 m



24. If $F_1 = 1 \text{ N}$, $x_1 = 1 \text{ m}$, $F_2 = 2 \text{ N}$ and $x_2 = 2 \text{ m}$, what is the location of F_R , i.e., the distance x .

- A) 1 m B) 1.33 m C) 1.5 m
D) 1.67 m E) 2 m



QUIZ

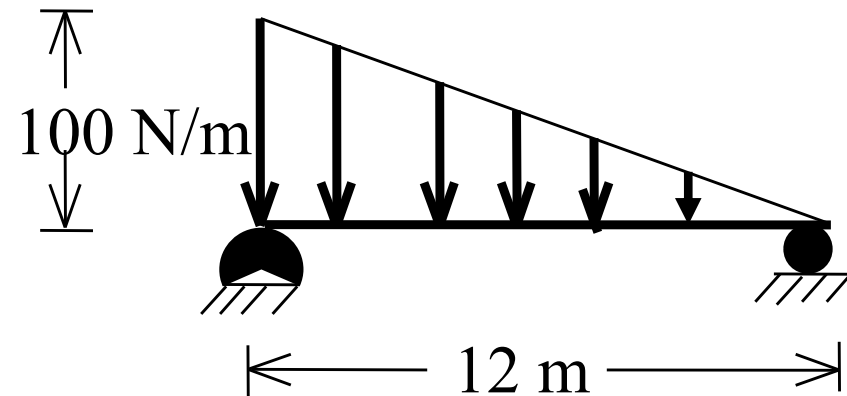
25. $F_R =$ _____

A) 12 N

B) 100 N

C) 600 N

D) 1200 N



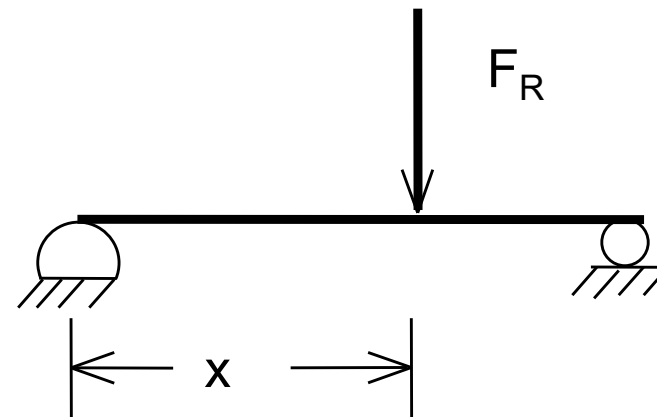
26. $x =$ _____.

A) 3 m

B) 4 m

C) 6 m

D) 8 m



STATİK

BÖLÜM 4. KUVVET SİSTEMLERİ VE KUVVETLERİN BİLEŞKESİ

ÖRNEK SORU ÇÖZÜMLERİ

1. Şekilde gösterilen iki kuvvetin O noktasına göre oluşturduğu bileşke momenti Kartezyen formda bulunuz.

ÇÖZÜM:

- Öncelikle $\mathbf{r}_{OA}$ pozisyon vektörünü bulmalıyız.

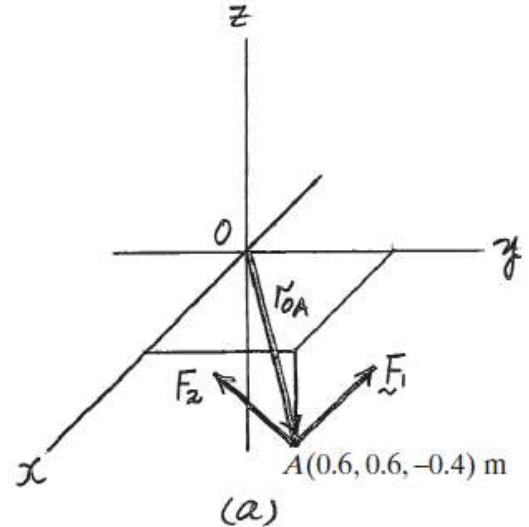
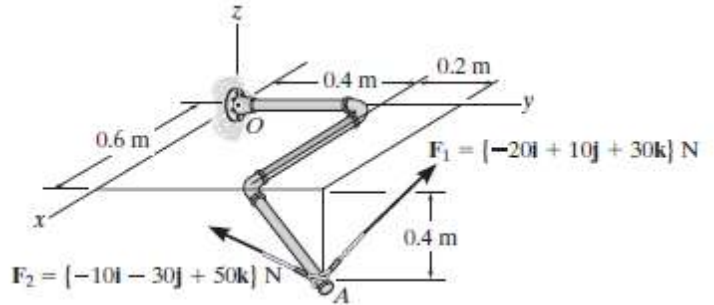
$$\mathbf{r}_{OA} = (0.6 - 0)\mathbf{i} + (0.6 - 0)\mathbf{j} + (-0.4 - 0)\mathbf{k} = [0.6\mathbf{i} + 0.6\mathbf{j} - 0.4\mathbf{k}] \text{ m}$$

- Bileşke moment;

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}_R)_O &= \mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{F}_2 \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.6 & 0.6 & -0.4 \\ -20 & 10 & 30 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.6 & 0.6 & -0.4 \\ -10 & -30 & 50 \end{vmatrix} \\ &= [40\mathbf{i} - 36\mathbf{j} + 6\mathbf{k}] \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

Ya da bileşke momenti şu şekilde bulabiliriz;

$$\begin{aligned} (\mathbf{M}_R)_O &= \mathbf{r}_{OA} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.6 & 0.6 & -0.4 \\ -30 & -20 & 80 \end{vmatrix} \\ &= [40\mathbf{i} - 36\mathbf{j} + 6\mathbf{k}] \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$



2. Şekildeki gibi montajlanmış borular 80 kN'luk bir kuvvete maruzdur. Bu kuvvetin A ve B noktasında oluşturduğu momenti Kartezyen formda bulunuz.

ÇÖZÜM:

➤ Kuvvetin A noktasında oluşturduğu moment:

$$\mathbf{r}_{AC} = \{(0.55 - 0)\mathbf{i} + (0.4 - 0)\mathbf{j} + (-0.2 - 0)\mathbf{k}\} \text{ m}$$

$$= \{0.55\mathbf{i} + 0.4\mathbf{j} - 0.2\mathbf{k}\} \text{ m}$$

$$\mathbf{F} = 80 (\cos 30^\circ \sin 40^\circ \mathbf{i} + \cos 30^\circ \cos 40^\circ \mathbf{j} - \sin 30^\circ \mathbf{k}) \text{ N}$$

$$= \{44.53\mathbf{i} + 53.07\mathbf{j} - 40.0\mathbf{k}\} \text{ N}$$

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_{AC} \times \mathbf{F}_B$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.55 & 0.4 & -0.2 \\ 44.53 & 53.07 & -40.0 \end{vmatrix}$$

$$= \{-5.39\mathbf{i} + 13.1\mathbf{j} + 11.4\mathbf{k}\} \text{ N} \cdot \text{m}$$

➤ Kuvvetin B noktasında oluşturduğu moment:

$$\mathbf{r}_{BC} = \{(0.55 - 0)\mathbf{i} + (0.4 - 0.4)\mathbf{j} + (-0.2 - 0)\mathbf{k}\} \text{ m}$$

$$= \{0.55\mathbf{i} - 0.2\mathbf{k}\} \text{ m}$$

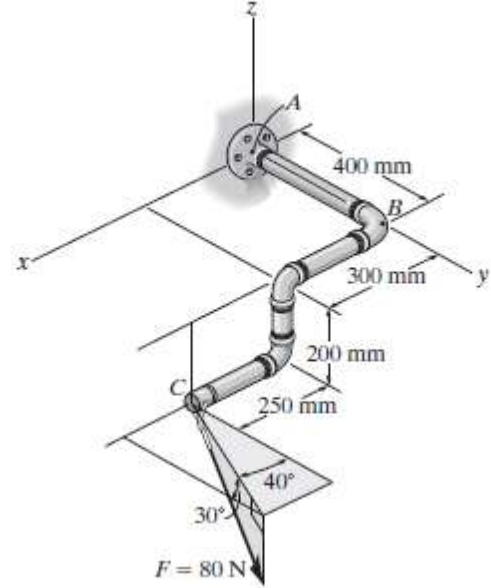
$$\mathbf{F} = 80 (\cos 30^\circ \sin 40^\circ \mathbf{i} + \cos 30^\circ \cos 40^\circ \mathbf{j} - \sin 30^\circ \mathbf{k}) \text{ N}$$

$$= \{44.53\mathbf{i} + 53.07\mathbf{j} - 40.0\mathbf{k}\} \text{ N}$$

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{r}_{BC} \times \mathbf{F}$$

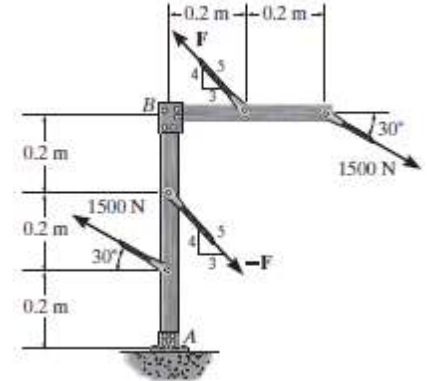
$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.55 & 0 & -0.2 \\ 44.53 & 53.07 & -40.0 \end{vmatrix}$$

$$= \{10.6\mathbf{i} + 13.1\mathbf{j} + 29.2\mathbf{k}\} \text{ N} \cdot \text{m}$$





3. $F=2000$ N olarak bileşke kuvvet çifti momentini hesaplayınız.



CÖZÜM:

İki yolla bileşke moment bulunabilir.

Yöntem 1:

Ayrı ayrı 1500 N ve 2000 N'luk kuvvet çiftleri x ve y bileşenlerine ayrılır ve 1500 N ve 2000 N'luk kuvvet çiftleri için sırasıyla kuvvet çifti momentleri $(M_c)_1$ ve $(M_c)_2$ hesaplanır. Bileşke moment bunların toplamından oluşmaktadır.

$$\begin{aligned} \zeta + (M_c)_1 &= -1500 \cos 30^\circ (0.4) - 1500 \sin 30^\circ (0.4) \\ &= -819.62 \text{ N}\cdot\text{m} = 819.62 \text{ N}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

$$\zeta + (M_c)_2 = 2000 \left(\frac{4}{5} \right) (0.2) + 2000 \left(\frac{3}{5} \right) (0.2) = 560 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$\begin{aligned} \zeta + (M_c)_R &= (M_c)_1 + (M_c)_2 \\ &= -819.62 + 560 = -259.62 \text{ N}\cdot\text{m} = 260 \text{ N}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

(Saat ibresi yönünde)

Yöntem 2:

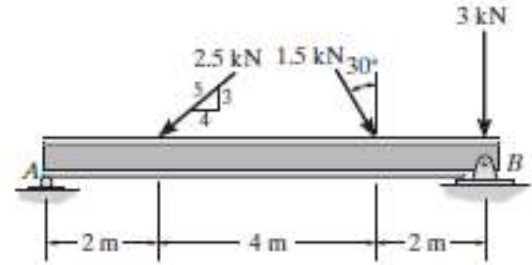
Ayrı ayrı 1500 N ve 2000 N'luk kuvvet çiftleri x ve y bileşenlerine ayrılır. Bu bileşenlerin A noktasına göre momentleri toplamı bize bileşke momenti vermektedir.

$$\begin{aligned} \zeta + (M_c)_R &= \sum M_A; (M_c)_R = -1500 \sin 30^\circ (0.4) - 1500 \cos 30^\circ (0.6) + 2000 \left(\frac{4}{5} \right) (0.2) + 2000 \left(\frac{3}{5} \right) (0.6) \\ &\quad - 2000 \left(\frac{3}{5} \right) (0.4) + 2000 \left(\frac{4}{5} \right) (0) + 1500 \cos 30^\circ (0.2) + 1500 \sin 30^\circ (0) \end{aligned}$$

$$= -259.62 \text{ N} \cdot \text{m} = 260 \text{ N} \cdot \text{m}$$

(Saat ibresi yönünde)

4. Şekildeki basit mesnetli kirişe etki eden kuvvet sisteminin bileşkesinin büyüklüğünü ve yönünü bulunuz. Ayrıca bu kuvvetlerin A noktasında oluşturduğu momenti hesaplayınız.



ÇÖZÜM:

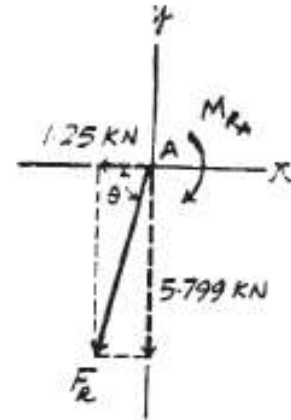
$$\begin{aligned} \rightarrow F_{Rx} = \Sigma F_x; \quad F_{Rx} &= 1.5 \sin 30^\circ - 2.5 \left(\frac{4}{5} \right) \\ &= -1.25 \text{ kN} = 1.25 \text{ kN} \leftarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} +\uparrow F_{Ry} = \Sigma F_y; \quad F_{Ry} &= -1.5 \cos 30^\circ - 2.5 \left(\frac{3}{5} \right) - 3 \\ &= -5.799 \text{ kN} = 5.799 \text{ kN} \downarrow \end{aligned}$$

$$F_R = \sqrt{F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2} = \sqrt{1.25^2 + 5.799^2} = 5.93 \text{ kN}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{F_{Ry}}{F_{Rx}} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{5.799}{1.25} \right) = 77.8^\circ$$

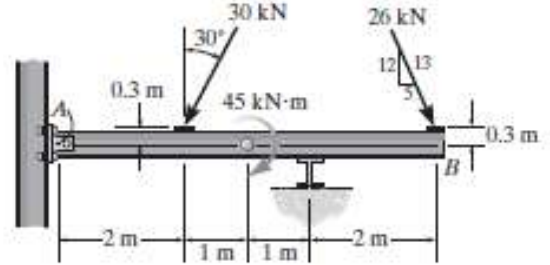
$\nearrow$



$$\begin{aligned} (+ M_{RA} = \Sigma M_A; \quad M_{RA} &= -2.5 \left(\frac{3}{5} \right) (2) - 1.5 \cos 30^\circ (6) - 3(8) = -34.8 \text{ kN} \cdot \text{m} = 34.8 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

(Saat ibresi yönünde)

5. Şekildeki çıkmalı kirişe etki eden kuvvet sisteminin bileşkesinin büyüklüğünü ve yönünü bulunuz. Ayrıca bu kuvvetlerin A noktasında oluşturduğu momenti hesaplayınız.



ÇÖZÜM:

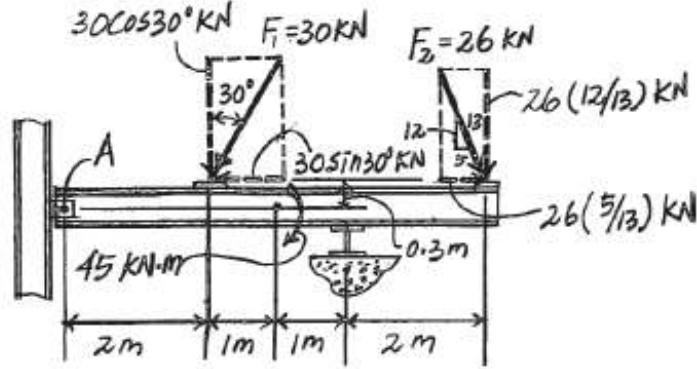
$$\rightarrow \Sigma (F_R)_x = \Sigma F_x; \quad (F_R)_x = 26 \left(\frac{5}{13} \right) - 30 \sin 30^\circ = -5 \text{ kN} = 5 \text{ kN} \leftarrow$$

$$+\uparrow \Sigma (F_R)_y = \Sigma F_y; \quad (F_R)_y = -26 \left(\frac{12}{13} \right) - 30 \cos 30^\circ = -49.98 \text{ kN} = 49.98 \text{ kN} \downarrow$$

$$F_R = \sqrt{(F_R)_x^2 + (F_R)_y^2} = \sqrt{5^2 + 49.98^2} = 50.23 \text{ kN} = 50.2 \text{ kN}$$

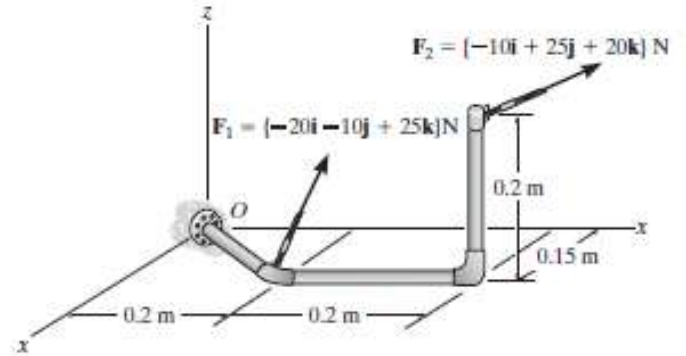
$$\theta = \tan^{-1} \left[\frac{(F_R)_y}{(F_R)_x} \right] = \tan^{-1} \left[\frac{49.98}{5} \right] = 84.29^\circ = 84.3^\circ \quad \swarrow$$

$$\begin{aligned} (+) (M_R)_A &= \Sigma M_A; \quad (M_R)_A = 30 \sin 30^\circ (0.3) - 30 \cos 30^\circ (2) - 26 \left(\frac{5}{13} \right) (0.3) - 26 \left(\frac{12}{13} \right) (6) - 45 \\ &= -239.46 \text{ kN} \cdot \text{m} = 239 \text{ kN} \cdot \text{m} \text{ (clockwise)} \end{aligned} \quad \text{Ans}$$



(a.)

6. Şekilde görülen montaj edilmiş boru sistemine etki eden kuvvet sisteminin bileşkesini ve A noktasına göre oluşan momenti kartezyen vektör formunda hesaplayınız.



ÇÖZÜM:

➤ Bileşke kuvvet:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_R &= \Sigma \mathbf{F}_i; & \mathbf{F}_R &= \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 \\ & & &= (-20\mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 25\mathbf{k}) + (-10\mathbf{i} + 25\mathbf{j} + 20\mathbf{k}) \\ & & &= [-30\mathbf{i} + 15\mathbf{j} + 45\mathbf{k}] \text{ N} \end{aligned}$$

➤ Pozisyon vektörleri:

$$\mathbf{r}_{OA} = (0.15 - 0)\mathbf{i} + (0.2 - 0)\mathbf{j} + (0 - 0)\mathbf{k} = [0.15\mathbf{i} + 0.2\mathbf{j}] \text{ m}$$

$$\mathbf{r}_{OB} = (0.15 - 0)\mathbf{i} + (0.4 - 0)\mathbf{j} + (0.2 - 0)\mathbf{k} = [0.15\mathbf{i} + 0.4\mathbf{j} + 0.2\mathbf{k}] \text{ m}$$

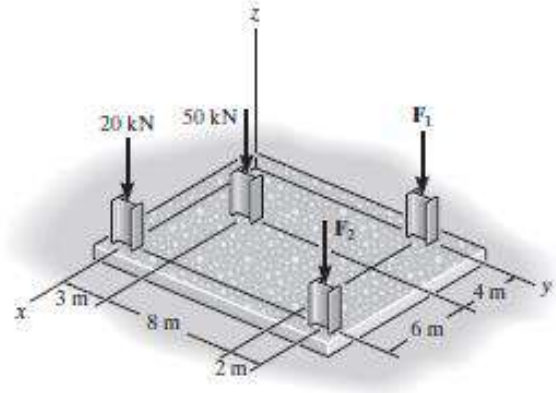
➤ Bu durumda, O noktasına göre bileşke moment:

$$M_w = \Sigma F_{O'}; \quad (M_R)_{O'} = \mathbf{r}_{OA} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_{OB} \times \mathbf{F}_2$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.15 & 0.4 & 0.2 \\ -10 & 25 & 20 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.15 & 0.4 & 0.2 \\ -10 & 25 & 20 \end{vmatrix}$$

$$= [8\mathbf{i} - 8.75\mathbf{j} + 10.25\mathbf{k}] \text{ N} \cdot \text{m}$$

7. Şekilde görülen temel döşemesi dört paralel kolon yüküne maruzdur. Eşdeğer bileşke kuvvetini ve bunun döşeme üzerindeki etki noktasının (x,y) koordinatını bulunuz. $F_1=20 \text{ kN}$ ve $F_2=50 \text{ kN}$ olarak alınız.



ÇÖZÜM:

$$+\downarrow F_R = \Sigma F_z; \quad F_R = 20 + 50 + 20 + 50 = 140 \text{ kN}$$

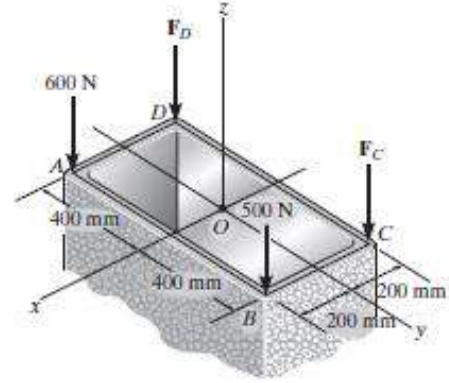
$$M_{Ry} = \Sigma M_y; \quad 140(x) = (50)(4) + 20(10) + 50(10)$$

$$x = 6.43 \text{ m}$$

$$M_{Rx} = \Sigma M_x; \quad -140(y) = -(50)(3) - 20(11) - 50(13)$$

$$y = 7.29 \text{ m}$$

8. Şekilde görülen tüp dört paralel kuvvete mesnetlik etmektedir. Kuvvet sisteminin eşdeğer bileşkesi O noktasında oluştuğu bilindiğine göre F_C ve F_D kuvvetlerini hesaplayınız.



ÇÖZÜM:

$$\Sigma M_x = 0; \quad F_D(0.4) + 600(0.4) - F_C(0.4) - 500(0.4) = 0$$

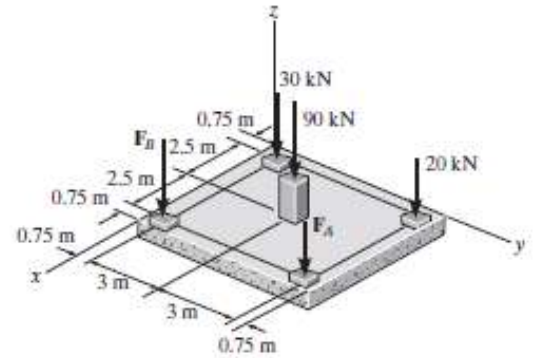
$$F_C - F_D = 100 \quad (1)$$

$$\Sigma M_y = 0; \quad 500(0.2) + 600(2) - F_C(0.2) - F_D(0.2) = 0$$

$$F_C + F_D = 1100 \quad (2)$$

$$F_C = 600 \text{ N} \quad F_D = 500 \text{ N}$$

9. Şekilde görülen kuvvet sisteminin eşdeğer bileşkesinin döşemenin merkez noktasında oluştuğu bilindiğine göre F_A ve F_B kolon kuvvetlerinin büyüklüğünü hesaplayınız.



ÇÖZÜM:

$$+\uparrow F_R = \Sigma F_z; \quad -F_R = -30 - 20 - 90 - F_A - F_B$$

$$F_R = 140 + F_A + F_B \quad (1)$$

$$(M_R)_x = \Sigma M_x; \quad -F_R(3.75) = -F_B(0.75) - 30(0.75) - 90(3.75) - 20(6.75) - F_A(6.75)$$

$$F_R = 0.2F_B + 1.8F_A + 132 \quad (2)$$

$$(M_R)_y = \Sigma M_y; \quad F_R(3.25) = 30(0.75) + 20(0.75) + 90(3.25) + F_A(5.75) + F_B(5.75)$$

$$F_R = 1.769F_A + 1.769F_B + 101.54 \quad (3)$$

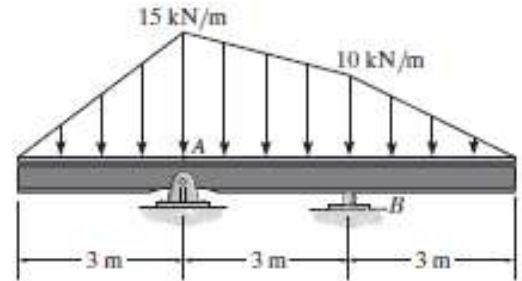


$$F_A = 30 \text{ kN}$$

$$F_B = 20 \text{ kN}$$

$$F_R = 190 \text{ kN}$$

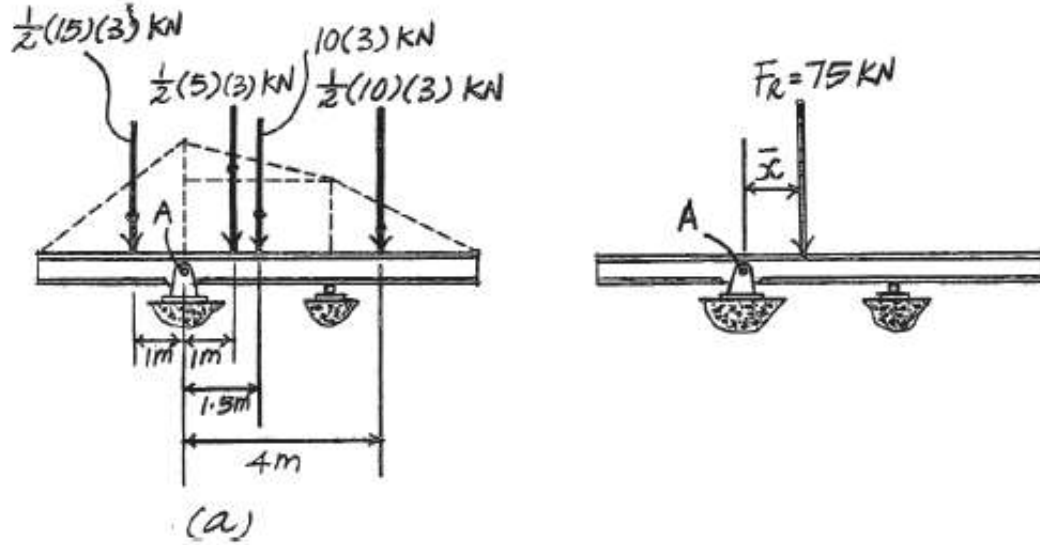
10. Şekilde görülen çıkmalı kirişe etki eden yayılı yüklerin eşdeğer bileşkesinin büyüklüğünü ve bileşkenin etki ettiği noktanın A mesnedine olan mesafesini hesaplayınız.



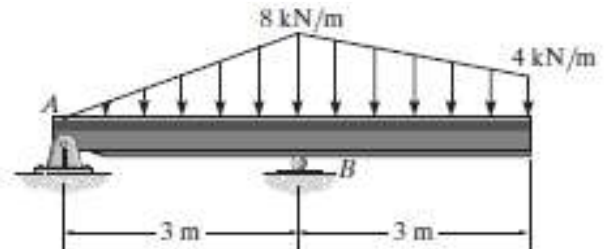
ÇÖZÜM:

$$+\downarrow F_R = \Sigma F_y; \quad F_R = \frac{1}{2}(15)(3) + \frac{1}{2}(5)(3) + 10(3) + \frac{1}{2}(10)(3) = 75 \text{ kN} \downarrow$$

$$\zeta+(M_R)_A = \Sigma M_A; \quad -75(\bar{x}) = \frac{1}{2}(15)(3)(1) - \frac{1}{2}(5)(3)(1) - 10(3)(1.5) - \frac{1}{2}(10)(3)(4)$$
$$\bar{x} = 1.20 \text{ m}$$



11. Şekilde görülen çıkmalı kirişe etki eden yayılı yüklerin eşdeğer bileşkesinin büyüklüğünü ve bileşkenin etki ettiği noktanın A mesnedine olan mesafesini hesaplayınız.

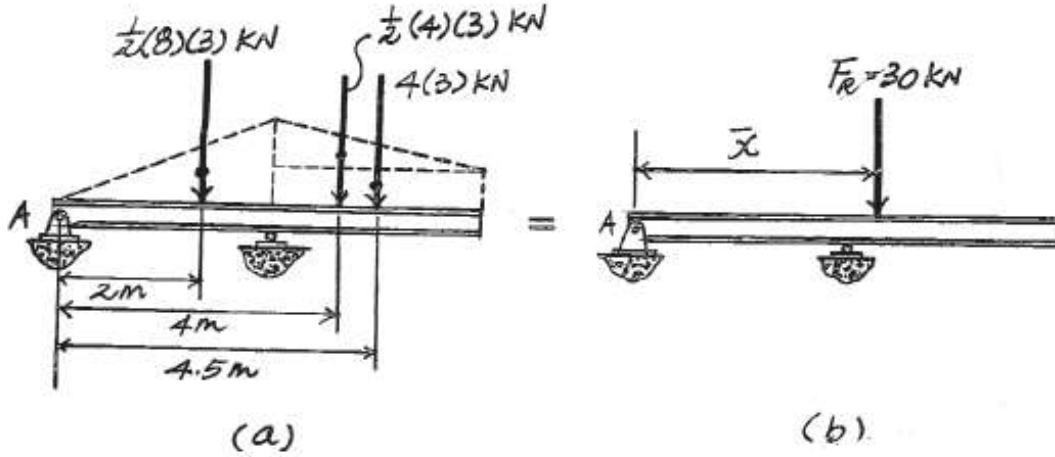


ÇÖZÜM:

$$+\downarrow (F_R)_y = \Sigma F_y; \quad F_R = \frac{1}{2}(8)(3) + \frac{1}{2}(4)(3) + 4(3) = 30 \text{ kN} \downarrow$$

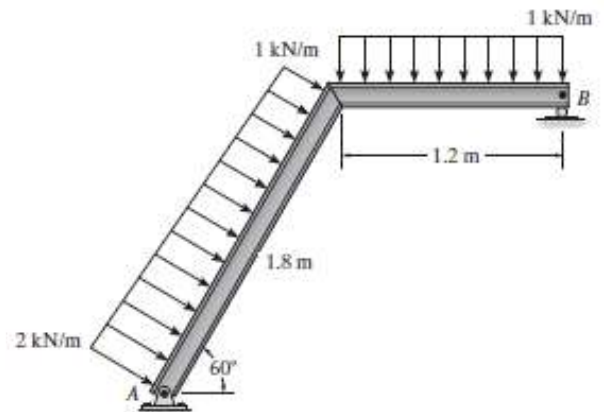
$$(+M_R)_A = \Sigma M_A; \quad -30(\bar{x}) = -\frac{1}{2}(8)(3)(2) - \frac{1}{2}(4)(3)(4) - 4(3)(4.5)$$

$$(\bar{x}) = 3.4 \text{ m}$$



12. Şekilde görülen kiriş sistemine etki eden yüklerin eşdeğer bileşkesinin büyüklüğünü ve A noktasına göre oluşan bileşke momenti hesaplayınız.

ÇÖZÜM:



$$F_1 = \frac{1}{2} (1.8) (1) = 0.9 \text{ kN}$$

$$F_2 = (1.8) (1) = 1.8 \text{ kN}$$

$$F_3 = (1.2) (1) = 1.2 \text{ kN}$$

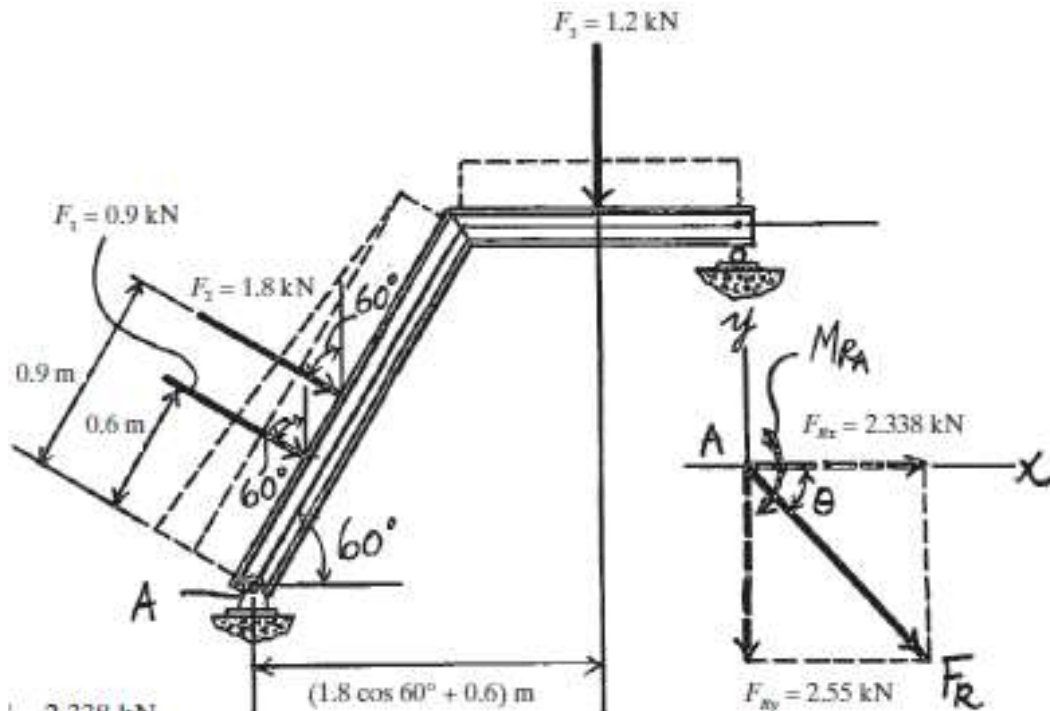
$$\rightarrow F_{Rx} = \Sigma F_{x^+} \quad F_{Rx} = 0.9 \sin 60^\circ + 1.8 \sin 60^\circ = 2.338 \text{ kN}$$

$$+\downarrow F_{Ry} = \Sigma F_{y^+} \quad F_{Ry} = 0.9 \cos 60^\circ + 1.8 \cos 60^\circ + 1.2 = 2.55 \text{ kN}$$

$$F_R = \sqrt{(2.338)^2 + (2.55)^2} = 3.460 \text{ kN} \quad \text{Ans}$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{2.55}{2.338} \right) = 47.5^\circ \quad \text{Ans}$$

$$\begin{aligned} (+ M_{RA} = \Sigma M_A; \quad M_{RA} &= 0.9 (0.6) + 1.8 (0.9) + 1.2 (1.8 \cos 60^\circ + 0.6) \\ &= 3.96 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned} \quad \text{Ans}$$





KASTAMONU ÜNİVERSİTESİ · MÜHENDİSLİK VE MİMARLIK FAKÜLTESİ
İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ BÖLÜMÜ

Engineering Mechanics: Statics in SI Units, 12e

5

RİJİT CİSİMLERİN DENGESİ

Copyright © 2010 Pearson Education South Asia Pte Ltd

1

Bu Bölümde Öğrenilecek Konular

- Rijit bir cisim için denge denklemleri
- Rijit cisimler için serbest cisim diyagramı kavramı
- Denge denklemlerini kullanarak rijit cisim denge problemlerini çözme

Copyright © 2010 Pearson Education South Asia Pte Ltd

2

Rijit Cisimlerin Dengesi



CO_05.jpg - The crane is subjected to its weight and the load it supports. In order to calculate the support reactions on the crane, it is necessary to apply the principles of equilibrium.

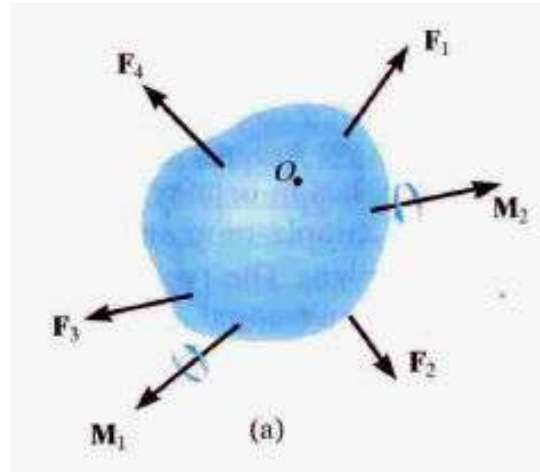
Rijit Cisimlerin Dengesi

Amaçlar:

- i) Rijit cisimler için denge denklemlerinin düzeltilmesi,
- ii) Rijit cisimler için zerhast cisim diyagramı,
- iii) Denge denklemlerini kullanarak, rijit cisimlerin denge problemlerinin çözümleri.

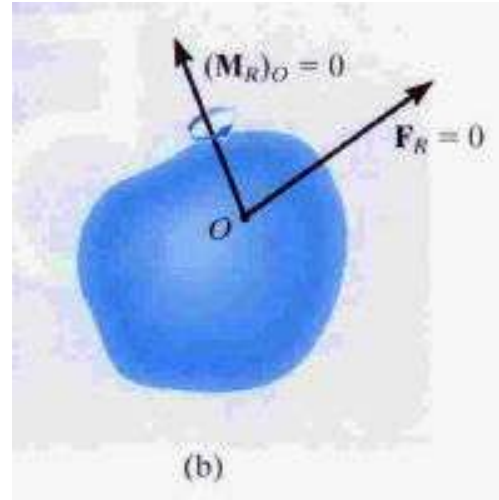
Rıst Cısm Denge Şartları :

Aşağıda gösterilen cısm kuvvet ve moment (kuvvet çifti) vektörleri etmektedir :



Bu kuvvetler yerçekimi, kontakt, manyetik, elektriksel kuvvetlerden dolayı olabilir. İki kuvvetler gösterilmedi, çünkü bu kuvvetler eşit ama zıt yönlü olduklarından otomatik olarak birbirlerini dengelemektedirler (Newton'un üçüncü yasası).

Bir önceki bölümde hatırlanacağı gibi bu kuvvet - kuvvet çifti sistemi cismin üstünde veya dışında bir başka eşdeğer kuvvet sistemine indirgenebilmektedir:



Eğer bu bileşke kuvvet ve moment ikisi birden sıfıra eşitse cisim dengededir denir.

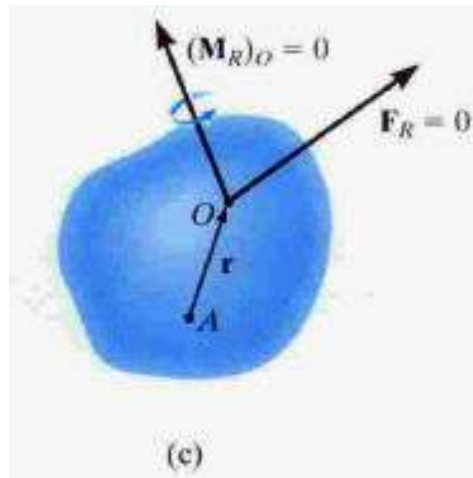
$$\vec{F}_R = \sum \vec{F} = 0$$

$$(M_R)_O = \sum \vec{M}_O = 0$$

↳ 0 nok. göre moment (herhangi bir nokta)



Bu iki şart sadece gerek değil, denge için ayrıca yeter de şarttır! Bunu göstermek için aşağıdaki resmi ele alalım:



Bir başka nokta A'ya göre momentleri toplayalım:

$$\Sigma \vec{M}_A = \vec{r} \times \vec{F}_R + (\vec{M}_R)_O = 0 \quad (\text{Dengede kalabilmesi için gerekiyor})$$

Burada $\vec{r} \neq 0$ olduğundan dolayı, bu denklemin 0 olmasının (denge halinde) olmasının tek gerek/yeter kuzulu:

$$\vec{F}_R = 0 \quad \text{ve} \quad (\vec{M}_R)_O = 0 \quad \text{olmasıdır!}$$

Önemli Not:

Bu denklemler uygulanırken, cisim rijit kaldığı yani şekil değiştirmedigi kabul edilecek. Gerçekte ise böyle bir malzeme / cisim yoktur; ancak birçok mühendislik uygulamasında denge denklemleri uygulanırken, bu kabul yapılır. Cisim sabit değişirse bile, bu şekil değişiminin kuvvetlerin doğrultusunu ve moment kollarının sabit bir referans eksenine göre değişmediği kabul edilir.

1. mertebe (first order) teorisi veya küçük deformasyonlar kabulü.

Mesnet Kuvvetleri

veya Mesnet Reaksiyonları / Mesnet Tepkileri

Serbest cisim diyagramlarına geçmeden önce, farklı tipteki mesnetlerde oluşan mesnet kuvvetlerini, cisimler arasında oluşan kontak kuvvetlerini inceleyelim: Genel kural olarak şunu demek mümkün:

i) Eğer bir mesnet, bir cismin herhangi bir yönde hareket etmesini engelliyorsa, o mesnet ^{cisim üzerinde} o yönde mesnet kuvveti / reaksiyon kuvveti oluşturur,

ii) Eğer mesnette dönme engellenmişse, mesnette moment reaksiyon kuvveti oluşur.

Analizlerde en sık kullanılan mesnet türleri aşağıda verilmiştir:

Kirişleri uçlarından mesnetlemek için kullanılır - Kayar mesnet, Mesnet kirişin düzey yönde hareketini engellediği için, o yönde mesnet kuvveti/reaksiyonu oluşur.

Kayar/Hareketli Mesnet



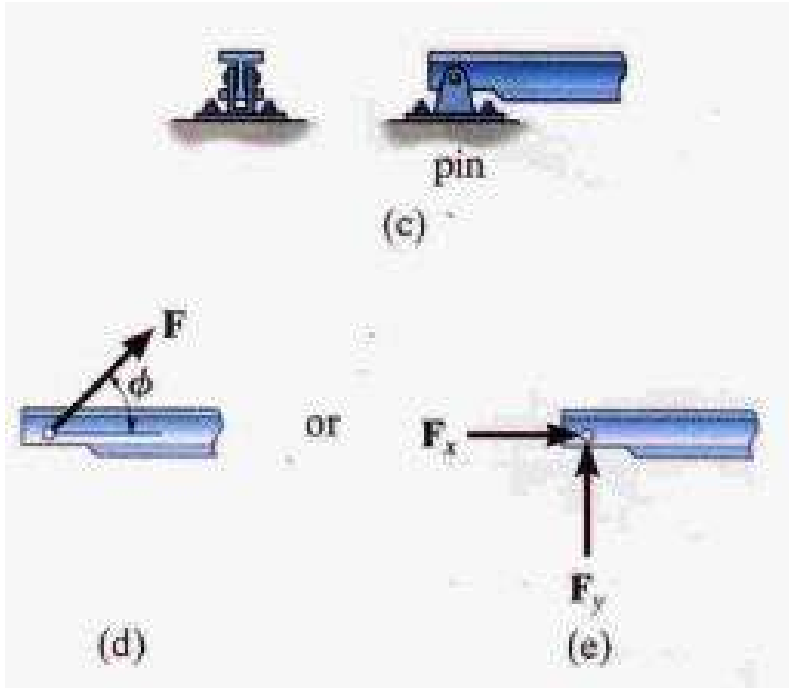
Hareketin engellendiği yönde mesnet reaksiyonu/kuvveti oluşur. Dikkat edilirse, kuvvet mesnetten kirişe etkiyor şeklinde gösterildi, yani cisim üzerinde gösterildi.

Bunun dışında, mesnet serbestçe dönebildiği için ve yatay yönde hareket edebildiği için **o yönlerde mesnet kuvvetleri oluşmaz.**

Kirişin hareketi daha da sınırlandırılabilir:

Mafsallı (pinli) birleşim. Bu tip bir bağlantı, kirişi herhangi bir ϕ açısı doğrultusundaki hareketini engeller, bu durumda mafsal/pin bu doğrultuda kirişe $\vec{F}$ kuvveti etkiler. Analiz için $\vec{F}$ kuvvetini x ve y bileşenlerine ayırmak daha uygundur.

Sabit Mesnet / Pinli Mesnet

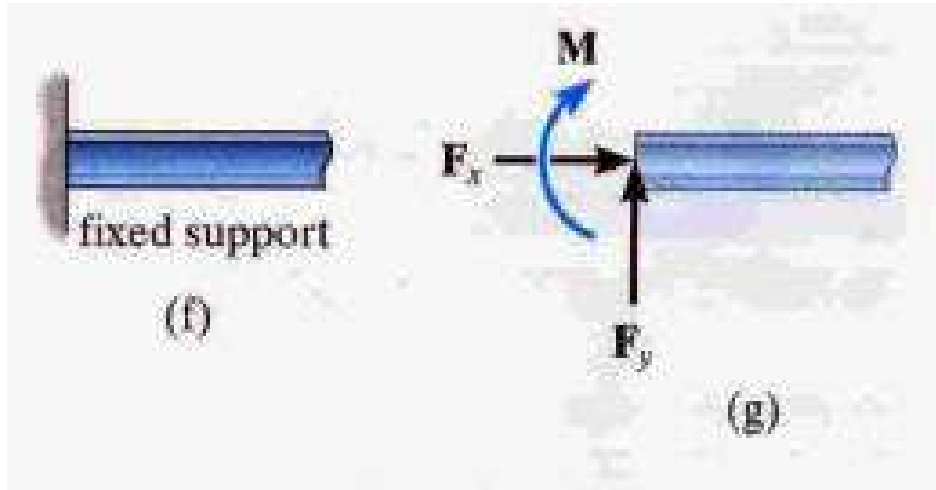


Kiriş bu sefer sadece serbestçe dönebiliyor. Bu durumda moment reaksiyonu oluşmaz.

En sınırlayıcı mesnet türü ankastre mesnettir (fixed support):

Bu tip bir mesnet kirişin x ve y yönündeki hareketini engellediği gibi, dönmesini de engeller. Bu durumda mesnet x ve y yönlerinde kuvvetler ve z eksenini doğrultusunda (moment eksenini) moment uygulayacaktır. Diklat edilirse F_x ve F_y bilinirse ϕ açısı da kolaylıkla bulunur.

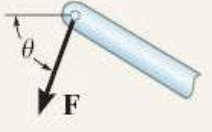
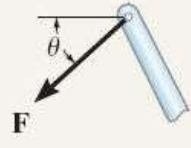
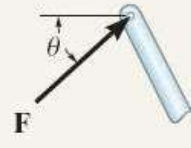
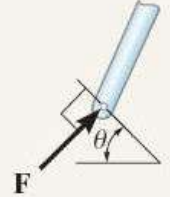
Ankastre Mesnet



Kirişin bir noktadan her yönde hareketi sınırlanmıştır. Bu durumda mesnette üç farklı reaksiyon oluşmakta.

Aşağıdaki tabloda diğer sıklıkla kullanılan mesnet türlerini bulacaksınız, tüm durumlarda θ açısının bilindiği kabul edilmiştir. Sembolleri çok iyi çalışınız ve ne tip reaksiyon kuvvetleri oluşturdıklarını anlayınız!

Bağlantı Türü Mesnet Kuvveti / Reaksiyonu

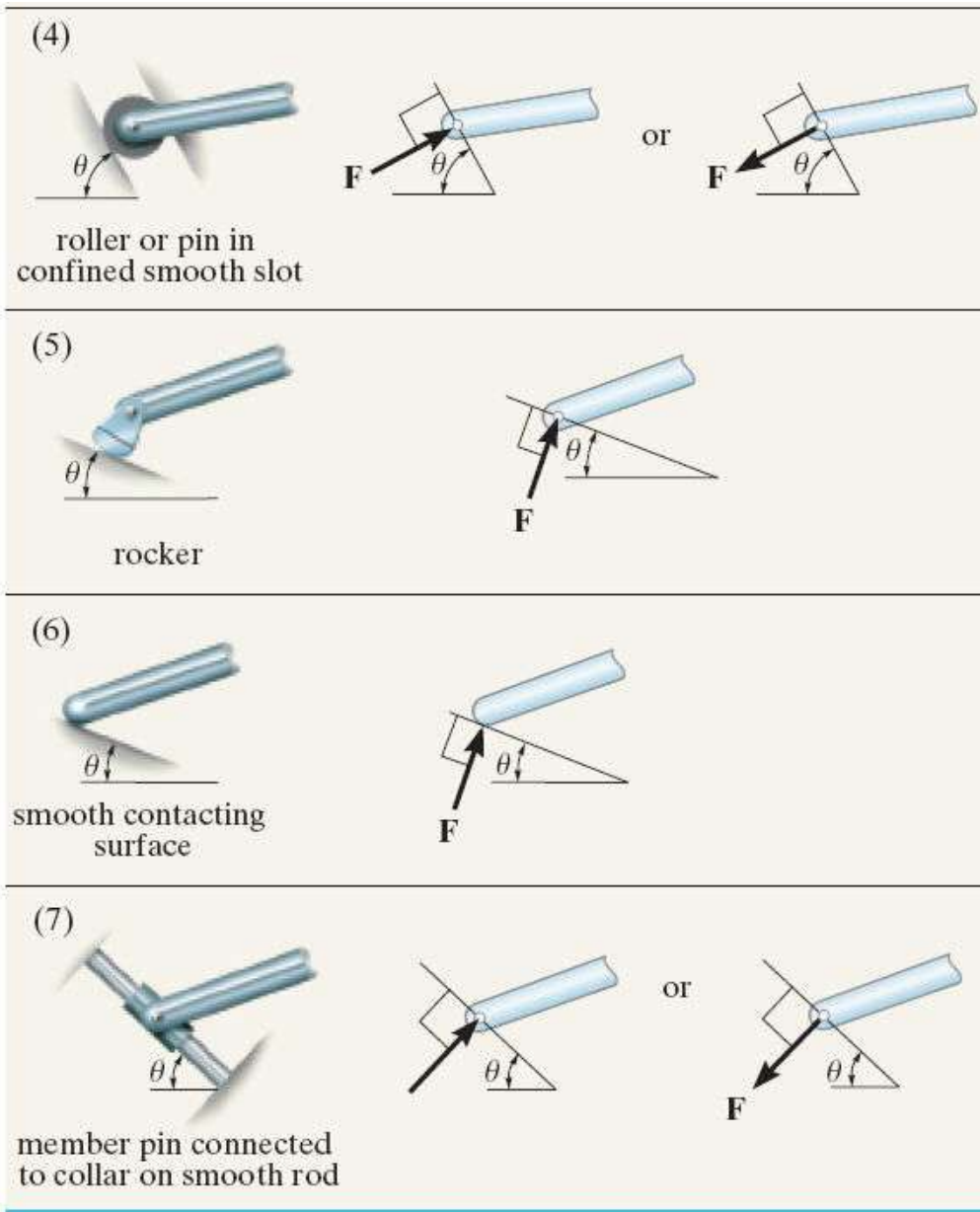
Types of Connection	Reaction
(1)  cable	
(2)  weightless link	 or 
(3)  roller	

Kablo

Ağırlıksız Link Eleman

Kayar/Hareketli Mesnet
(Çok Kullanılır)

Bağlantı Türü Mesnet Kuvveti / Reaksiyonu



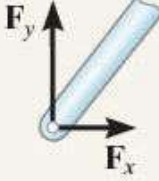
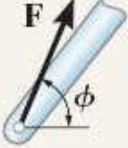
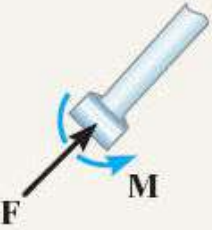
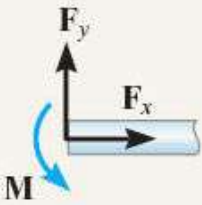
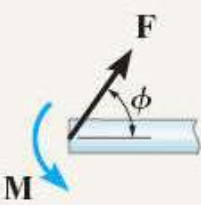
Sürtünmesiz Yuva içinde
Kayar Mesnet

Sallanan Mesnet

Sürtünmesiz Yüzey

Mafsallı Kayar Eleman

Bağlantı Türü Mesnet Kuvveti / Reaksiyonu

Types of Connection	Reaction
(8)  smooth pin or hinge	 or 
(9)  member fixed connected to collar on smooth rod	
(10)  fixed support	 or 

Mafsallı Sabit Mesnet
(Çok Kullanılır)

Ankastre Kayar Mesnet

Ankastre Mesnet
(Çok Kullanılır)

Mesnetlere Gerçek Hayattan Örnekler:



The cable exerts a force on the bracket in the direction of the cable. (1)

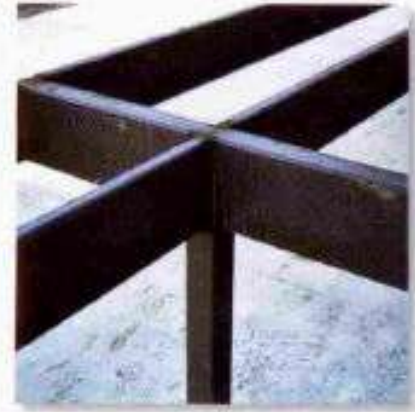


This concrete girder rests on the ledge that is assumed to act as a smooth contacting surface. (6)



This utility building is pin supported at the top of the column. (8)

The rocker support for this bridge girder allows horizontal movement so the bridge is free to expand and contract due to a change in temperature. (5)



The floor beams of this building are welded together and thus form fixed connections. (10)

Mesnet kuvvetleri dış kuvvetler olarak düşünülecektir!

Hareketli Mesnet - 1



Description: Stonehenge, England. One of the earliest examples of beam and column construction, it was built in approximately 2000 B.C. The picture shows part of a 30-meter circle of 30 upright stones, each weighing approximately 25 tons, capped by a continuous ring of 30 lintel stones, each weighing about 7 tons. The stones were brought 30 km from the quarry. Transport and construction procedures are still a matter of conjecture. (England)

Basit Mesnet - 2



Description: Temple of Olympian Zeus. Completed by the Roman Emperor Hadrian (AD 76-138) 700 years after the first columns were raised. Columns are 6 ft. 4 in. diameter, 56 ft. high, 18 ft. centers. Architrave beam span is obviously limited by the self-weight and tensile strength of the stone. (Athens, Greece)

Sabit Mesnet

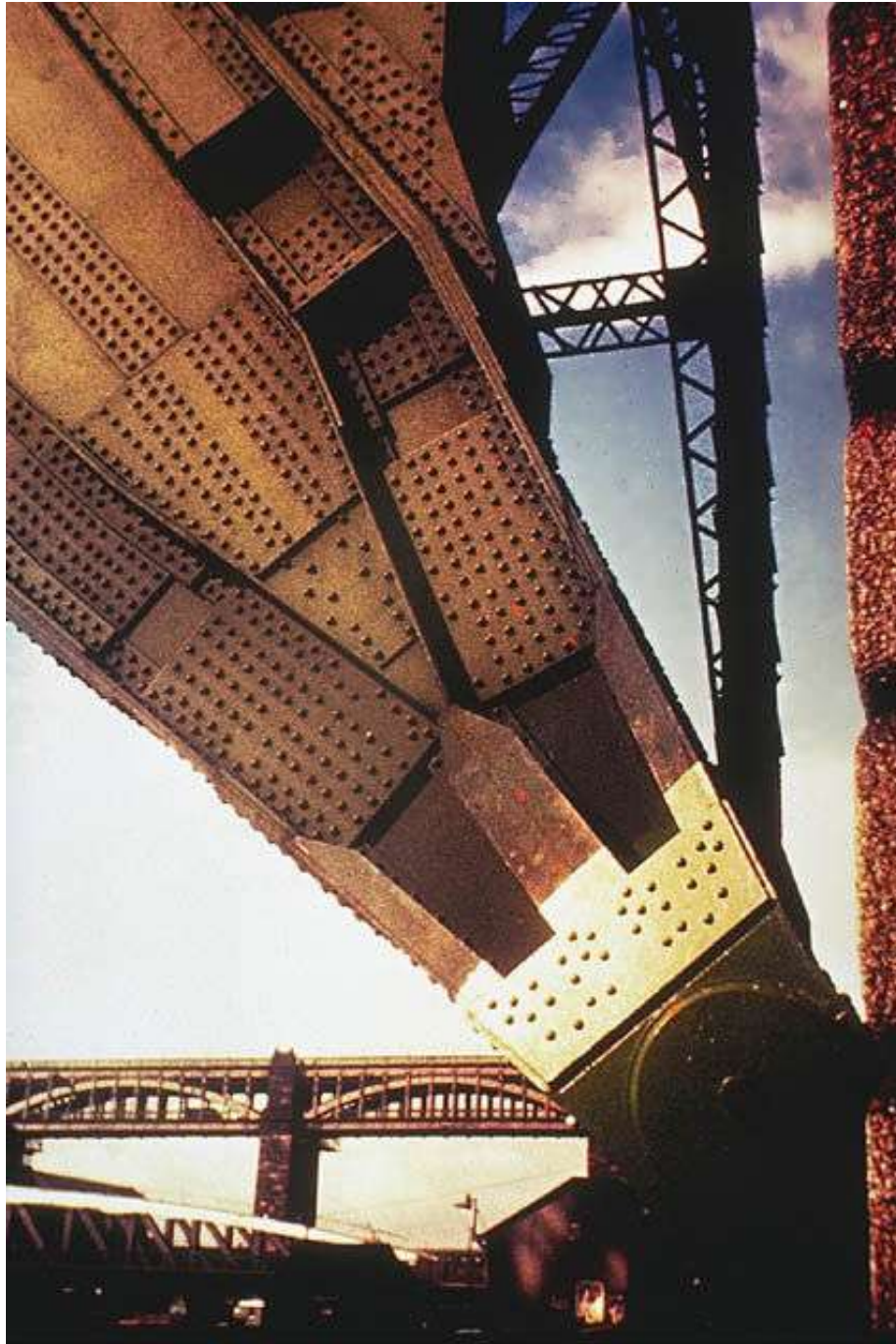


Description: Southside arch support (Port Island Bridge)

Sabit Mesnet



Description: Passerelle Debilly, River Seine. Detail of near pier support. (Paris, France)



Description: Tyne Bridge, detail. Abutment hinge consists of a steel pin. 12 in diameter and 8 ft 5 in long. Thrust on the pin is 2900 tons. (Newcastle, England.)

Sabit Mesnet



Description: Contra Costa County Branch Library after completion. Interior of library building [of GoddenA7] after completion. (Pinole, California)

Ankastre Mesnet - 1



Description: U.C. parking structure 'A'. The variable depth cantilever slab supports its own weight, automobile loading, and also any impact due to an automobile hitting the timber wall guard. (University of California, Berkeley)

Ankastre Mesnet - 2



Description: World Trade Center. Further example of building overhang supported on variable depth cantilevers. Note that adjacent cantilevers have common tip displacement. (New York City)

Ağırlık ve Ağırlık Merkezleri:

Cismin ağırlığı önemliyse bu sorularda belirtilir; ayrıca cisim uniformdur (aynı malzemeden yapıldıysa), ağırlık merkezi cismin geometri merkezi ile çakışır. Ancak cisim uniform değilse (aynı malzemeden yapılmadıysa) veya karmaşık bir geometriye sahipse bu durumda ağırlık merkezi G size verilecektir. İleri konularda ağırlık merkezleri ayrıntılı incelenecektir.

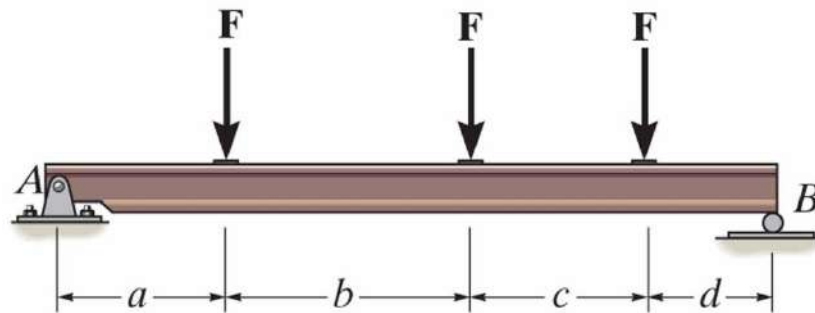
İdealize edilmiş analiz modelleri:

bir cismin
Bir mühendis ^V kuvvet analizini yapmadan önce, cismi idealize eder ve analitik modeli (matematik modeli) kurar. Matematik modeli kurmak demek, uygun mesnetlerin, malzeme özelliklerinin ve cismin boyutlarının seçilmesi anlamına gelmektedir. Bazı durumlar birden fazla model oluşturmak gerekebilir.

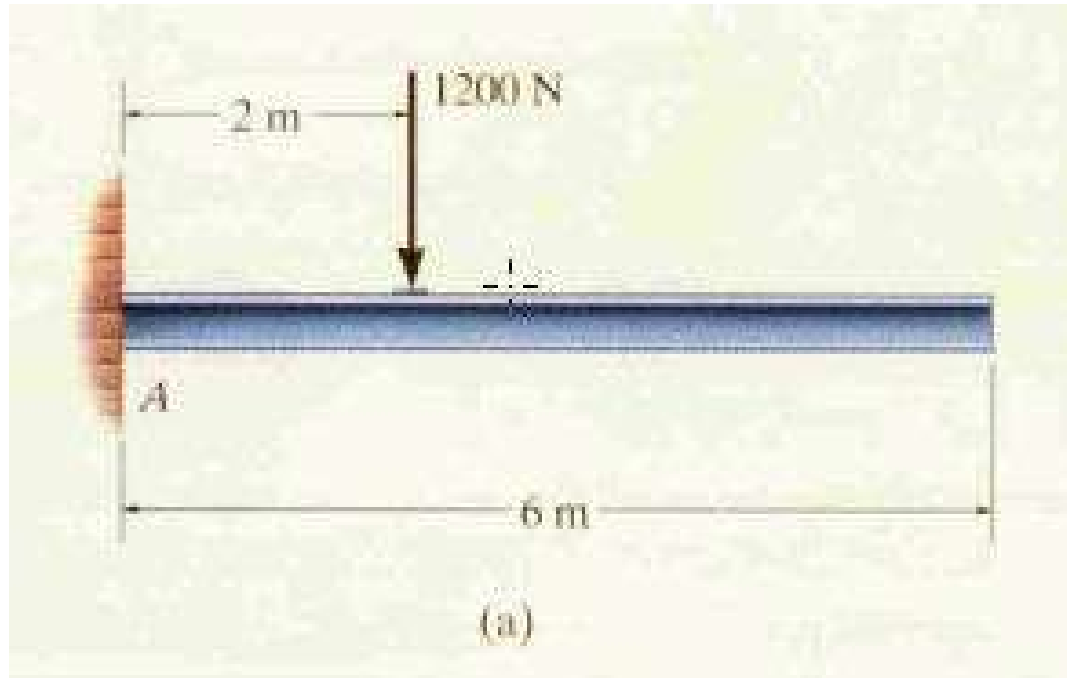
Aşağıdaki örneği inceleyelim:

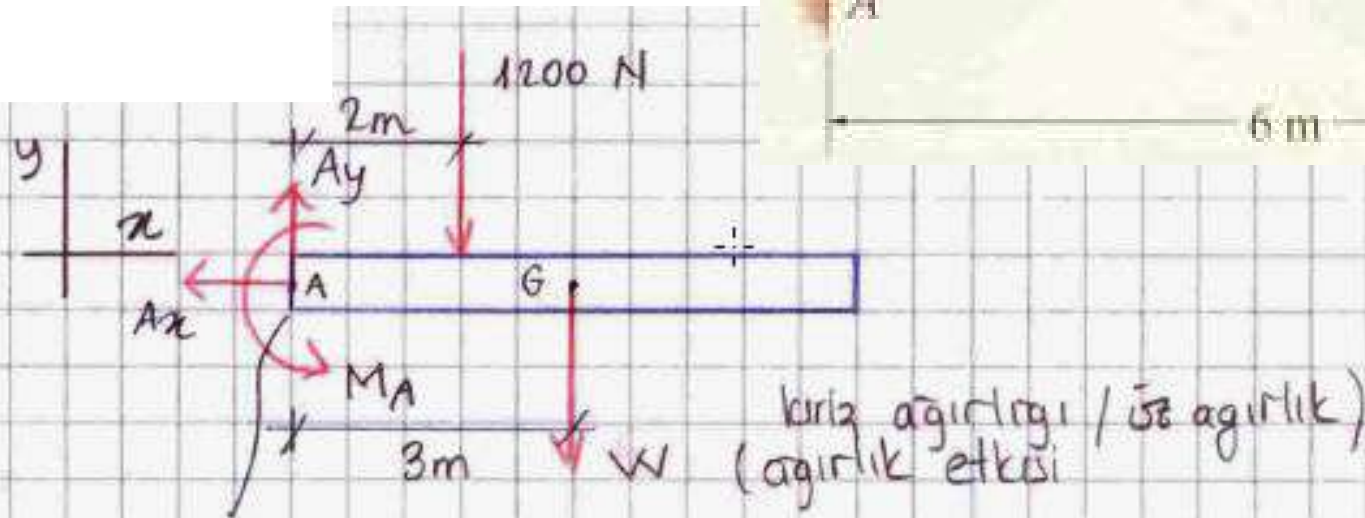
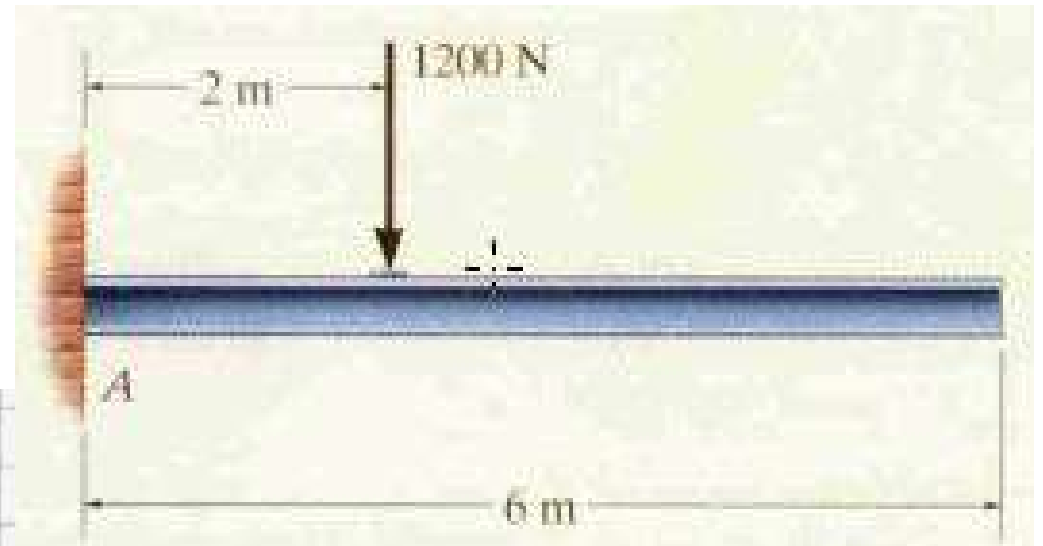


Analiz Modeli



Örnek: Rijit cismin dengesi için gerekli denge denklemlerini uygulamak için aşağıdaki ankastre mesnetli kirişin serbest cisim diyagramını çiziniz. Kirişin kütlesi 100 kg'dır.





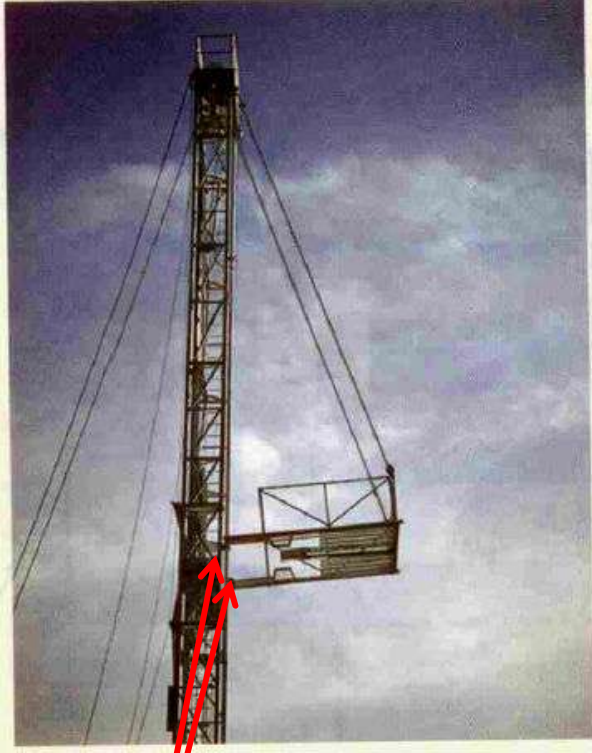
Hem dönme, hem de x ve y

yonlarında hareket engellenir?

(ankastre mesnetten dolayı oluşan mesnet kuvvetleri/reaksiyonları)



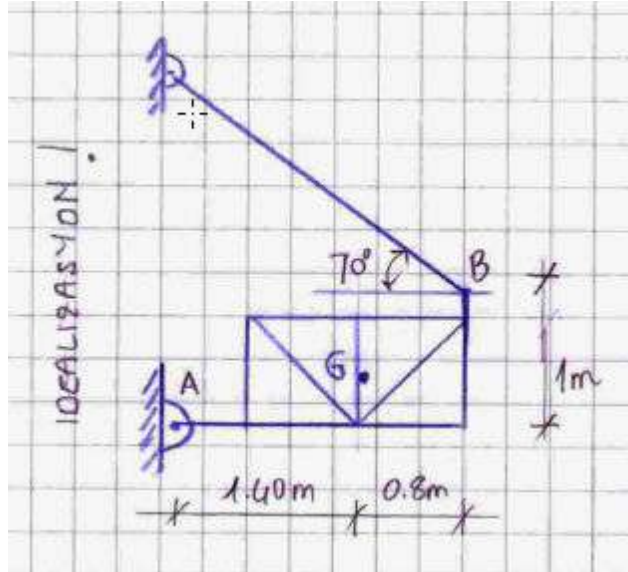
Örnek: Denge denklemlerinin uygulanabilmesi için serbest cisim diyagramlarının çizimi.



Sabit mesnet

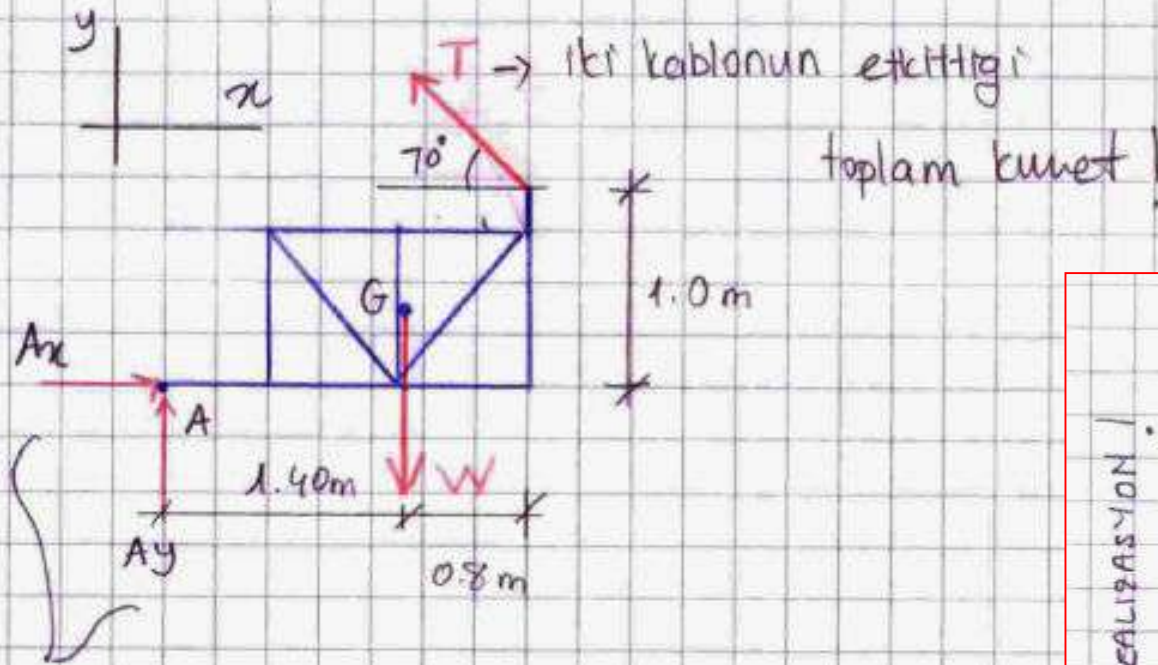
Şekilde gösterilen sistemin matematiksel modelini kurun ve denge denklemlerinin uygulanması için gerekli serbest cisim diyagramını çizin.

İki boyutlu idealize edilmiş analiz modeli:

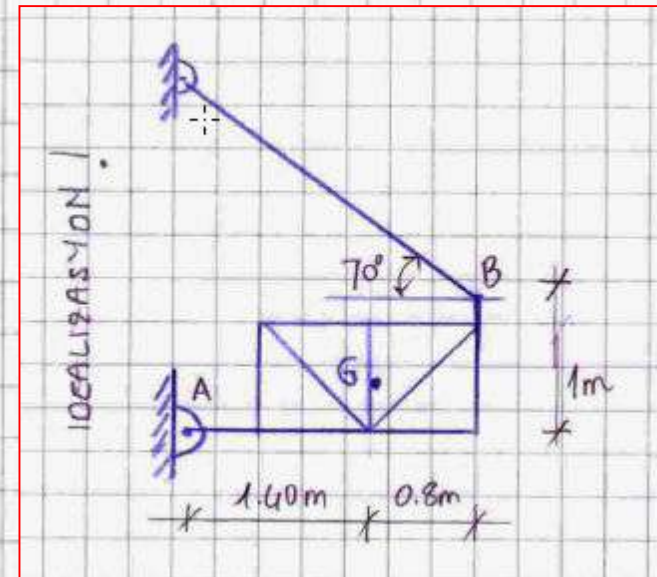


Ağırlık merkezinin yeri hesaplanır ve G ile gösterilir.

Cisim mesnetlerinden kurtarılır ve yerlerine uygun mesnet kuvvetleri konur,
ve come etkileyen diğer dış kuvvetler gösterilir:



Yine iki mesnetin uyguladığı toplam kuvvet,



İki boyutlu rijit cisimler için denge denklemleri /şartları:

Aynı x - y düzleminde bulunan kuvvet ve bu düzleme dik kuvvet çifti/momentin olması durumunda $\sum \vec{F} = 0$ ve $\sum \vec{M}_O = 0$ gerek ve yeter şartları skalar forma indirgenir:

$$\sum F_x = 0$$

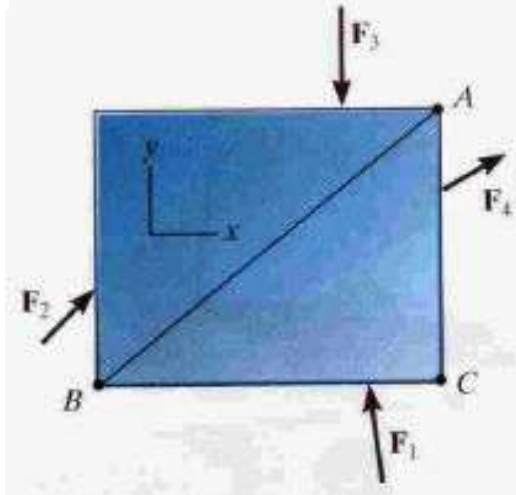
(x -eksenini doğ. kuvvetlerin toplamı)

$$\sum F_y = 0$$

(y -eksenini " " " ")

$$\text{YENİ ŞART!} \Rightarrow \underline{\underline{\sum M_O = 0}}$$

(Bir O nok. göre kuvvet çifti ve momentlerin toplamı) x - y düzlemine dik!



Alternatif Denge Denklemleri

Yukarıdaki denklem seti, en çok kullanılan denge denklemleri olmasına rağmen, iki alternatif denge denklemleri seti daha kullanılabilmektedir. Yine üzer denklemlerden oluşan bu denklem setleri birbirinden bağımsızdır! Bunlardan birincisi:

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum M_A = 0$$

$$\underline{\underline{\sum M_B = 0}}$$

} ÖNEMLİ

NOT: Bu denge denklem setinin

kullanılabilmesi için A-B

noktalarını birleştiren doğru

y-elemanine paralel olamaz!

Aksi durumda bağımsız denklemler olmaz!

İkinci alternatif denge denklem seti aşağıda verilmiştir:

$$\sum M_A = 0$$

$$\sum M_B = 0$$

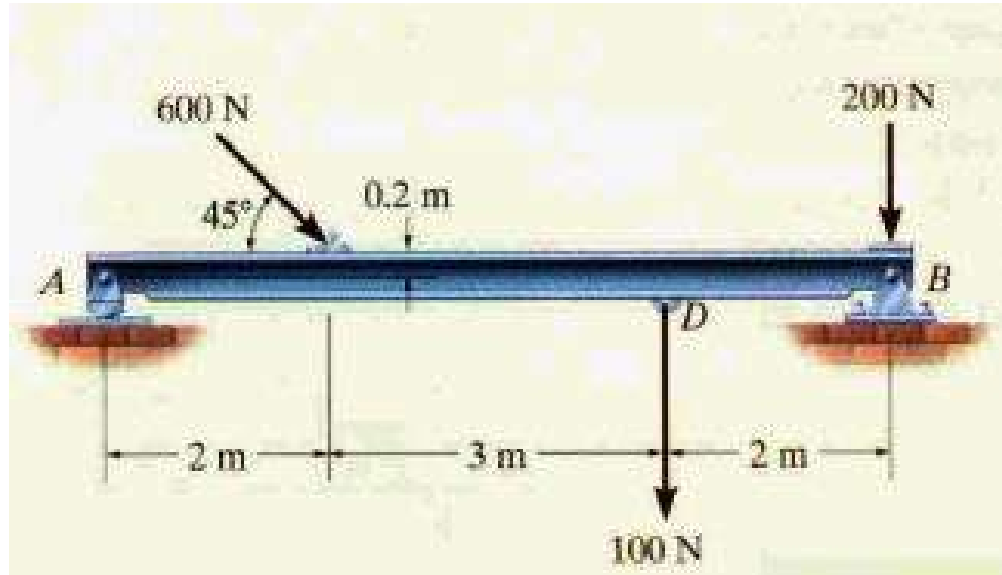
$$\underline{\underline{\sum M_C = 0}}$$

ÖNEMLİ NOT:

Bu denklemlerin uygulanabilmesi

için gerekli şart: A, B, C aynı
çizgi üzerinde olamaz.

Örnek:



Kirişe etkiyen dış kuvvetlerden dolayı, A ve B noktalarındaki mesnet reaksiyonlarını bulunuz.

Gözüm için gerekli adımlar:

i) Serbest cisim diyagramının çizilmesi,

- 1) x - y koordinatları oluşturulur, probleme göre herhangi iki yön ^{zevirlir,}
- 2) Tüm dış kuvvetler (bilinen, bilinmeyen cisim üzerinde gösterilir) ^{yönleriyle birlikte}
- 3) cismin boyutları serbest cisim diyagramı üzerinde gösterilir

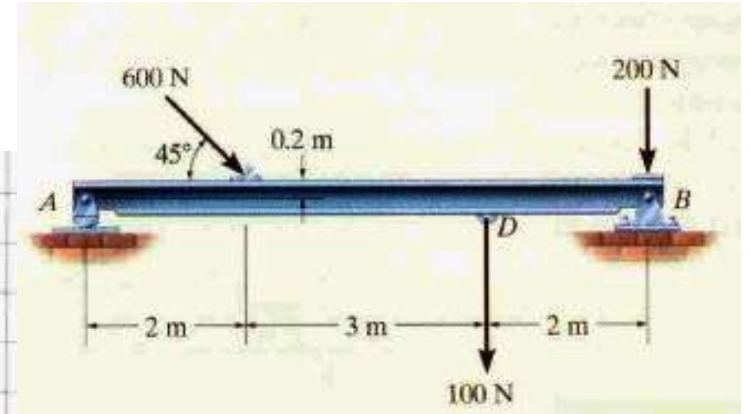
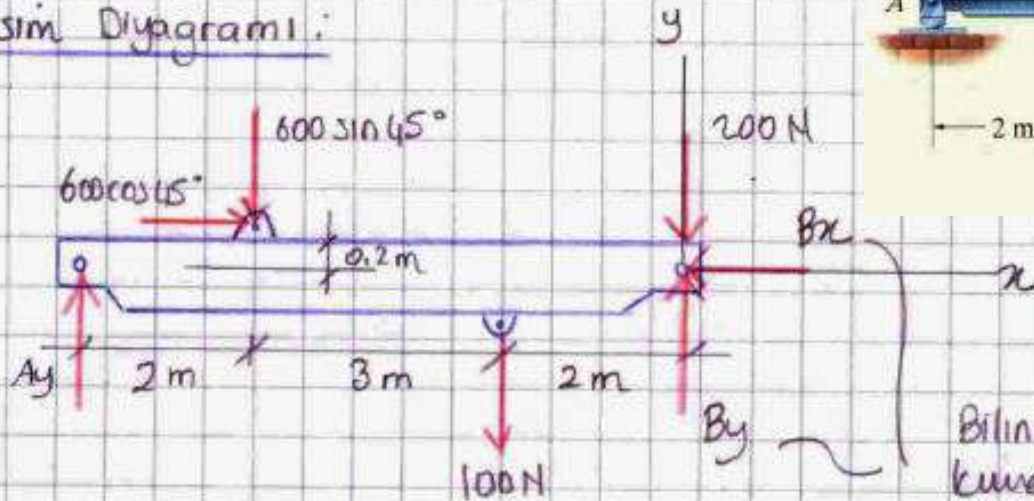
ii) Denge denklemleri uygulanır,

- 1) $\sum M_O = 0$ denklemleri uygulanır, O nok. iki bilinmeyen kuvvetin kesiştiği nokta olarak ^{zevirlir ki,} bu bilinmeyen kuvvetlerin O nok. göre momenti sıfır olsun,
- 2) $\sum F_x = 0$ ve $\sum F_y = 0$ uygulanırken ^{zevirlen} x ve y eksenleri kullanılır,
- 3) Denge denklemleri sonucu bulunan bilinmeyen kuvvetlerin ve/veya momentlerin (kuvvet çiftleri) ^{zevirlen} şiddetleri negatif alırsa, kabul edilmiş yönlerin tersi yönde ^{zevirlen} anlamına gelir.



Serbest Cisim Diyagramı:

Kırık derinliği/kalınlığı ihmal edilmiştir.



Bilinmeyen reaksiyon/mesnet kuvvetlerinin yönleri kabul edildi.

Reaksiyon kuvvetleri pinlerin olduğu nok.'lara etkilildi.

Denge Denklemleri:

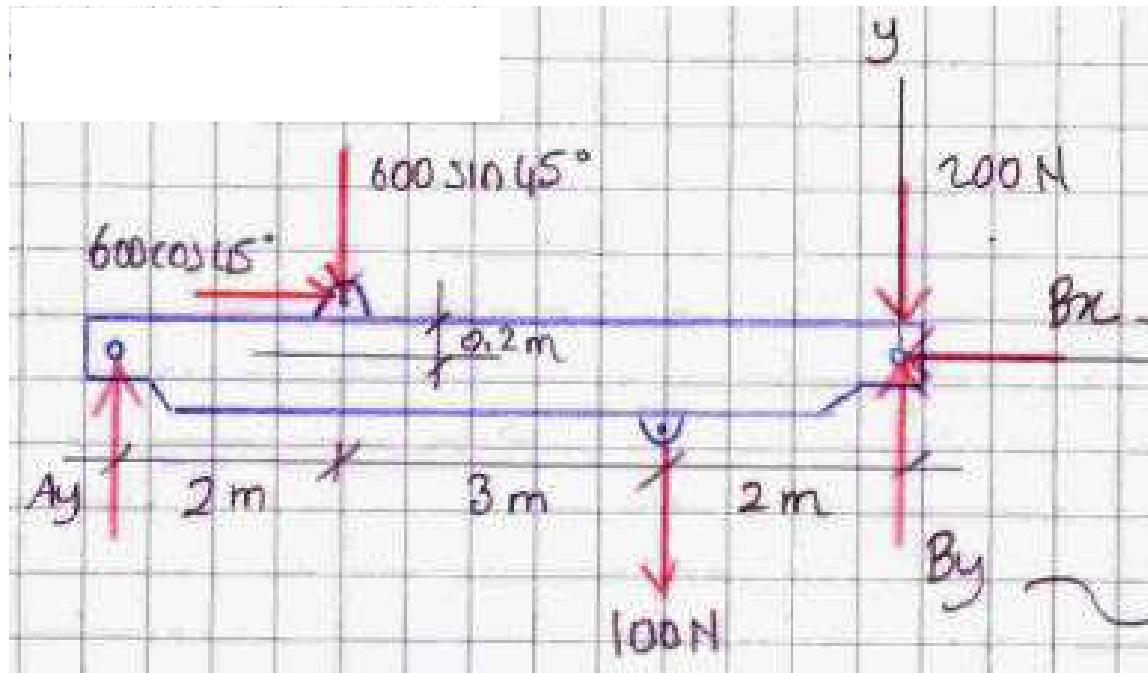
$$\rightarrow \sum F_x = 0; \quad 600 \cos 45 - B_x = 0 \Rightarrow \underline{B_x = 424 \text{ N}} \quad (\text{yön doğru seçilmiştir})$$

A_y , B nok. göre moment alınarak direkt bulunur, dikkat edilince B nok. iki bilinmeyen reaksiyon kuvvetinin olduğu yer!

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0 ; \quad 100(2) + 600 \sin 45^\circ(5) - 600 \cos 45^\circ(0.2) - A_y(7) = 0$$

$+ 200(0)$

$$\underline{A_y = 319 \text{ N}} \quad (\text{yön doğru seçilmiş})$$



$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad 319 - 600 \sin 45 - 100 - 200 + B_y = 0$$

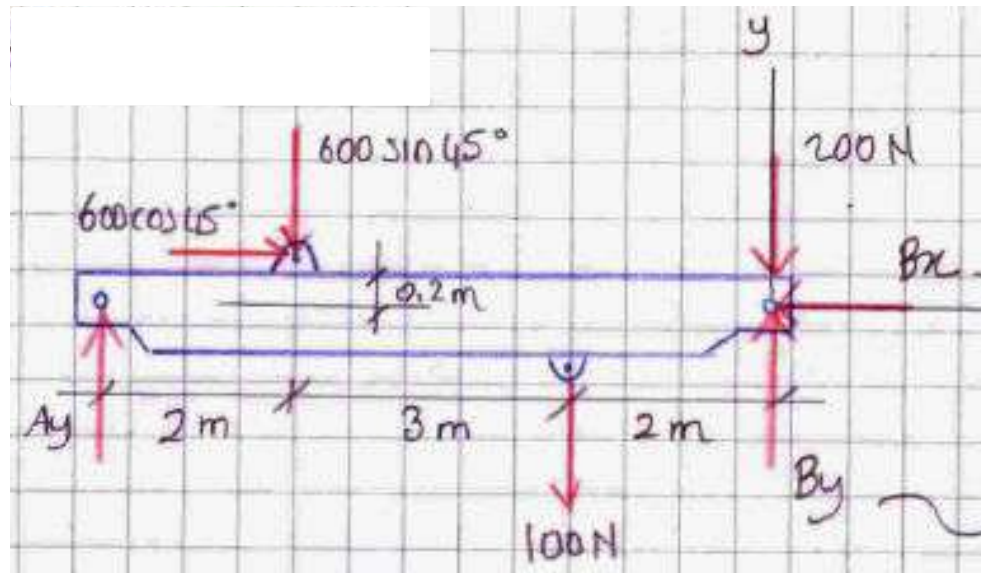
$$B_y = 405 \text{ N} \text{ (yön doğru verilmiş)}$$

NOT: $+\downarrow \sum M_A = 0$; kullanılarak B_y kontrol edilebilir.

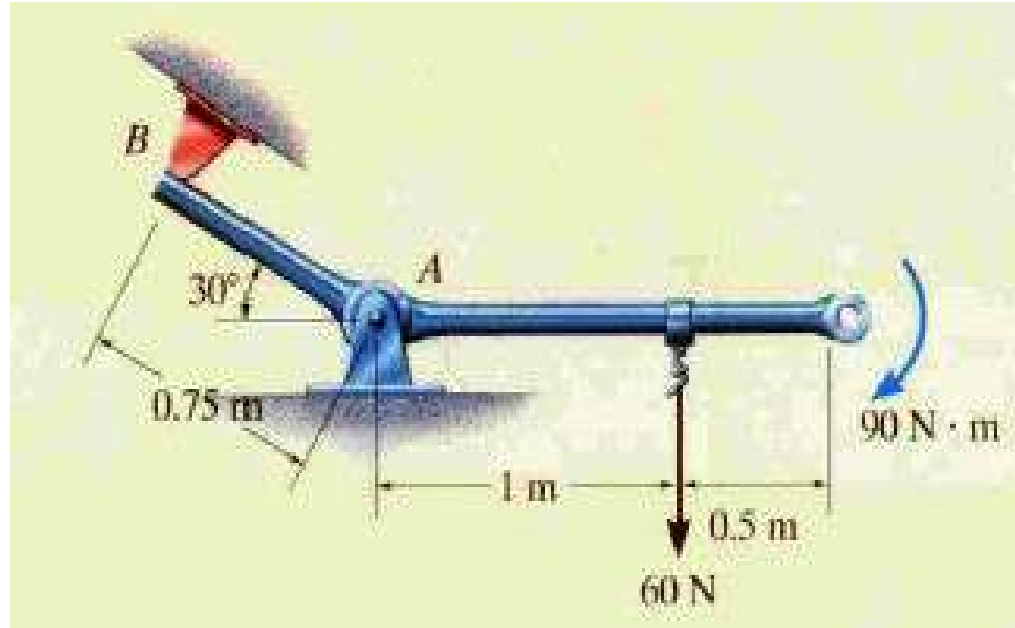
$$- 600 \sin 45 (2) - 600 \cos 45 (0,2) - 100 (5) - 200 (7) + B_y (7) = 0$$

$$B_y = 405 \text{ N} \text{ bulunur!}$$

Dikkat edilirse $\sum F_x = 0$, $\sum M_A = 0$ ve $\sum M_B = 0$ denge denklemleri olarak da kullanılabilir. 

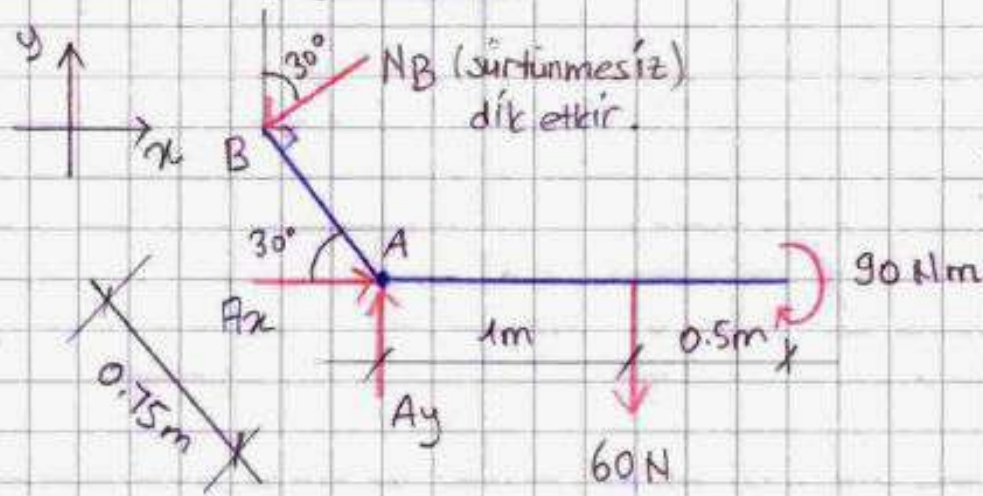


Örnek:



A noktasından mafsallı eleman B noktasında sürtünmesiz bir tekerlele desteklenmiştir. A mafsalındaki yatay ve dikey mesnet kuvvetlerini bulunuz.

Serbest cisim diyagramı :



Bilinen ve bilinmeyen
tüm kuvvetler gösterildi.
Bilinmeyen kuvvetlerin yönleri
kabul edildi, şiddetleri farklılık
gösterildi

Denge Denklemleri : Üç denge denklemiyle en çok üç bilinmeyen bulunur!

İki bilinmeyenli olduğu yere göre moment alarak başlamak mantıklı olur:

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 ; N_B(0.75) - 60(1) - 90 = 0$$

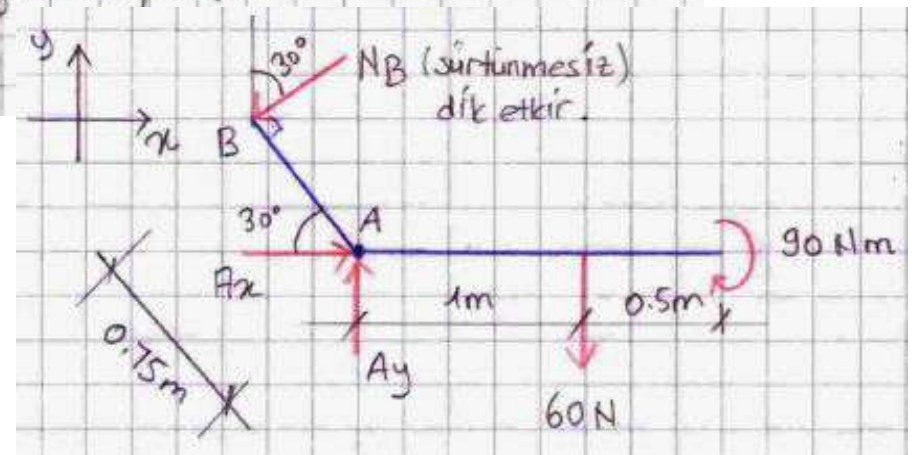
$$\underline{N_B = 200 \text{ N}} \quad (\text{yön doğru})$$

$$+\rightarrow \sum F_x = 0 ; A_x - 200(\sin 30) = 0$$

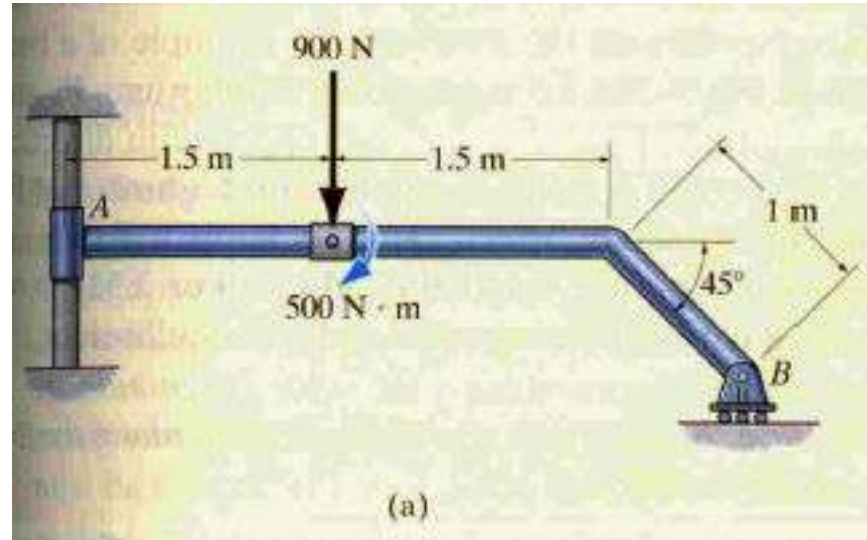
$$\underline{A_x = 100 \text{ N}} \quad (\text{yön doğru})$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 ; A_y - 200(\cos 30) - 60 = 0$$

$$\underline{A_y = 233 \text{ N}} \quad (\text{yön doğru})$$

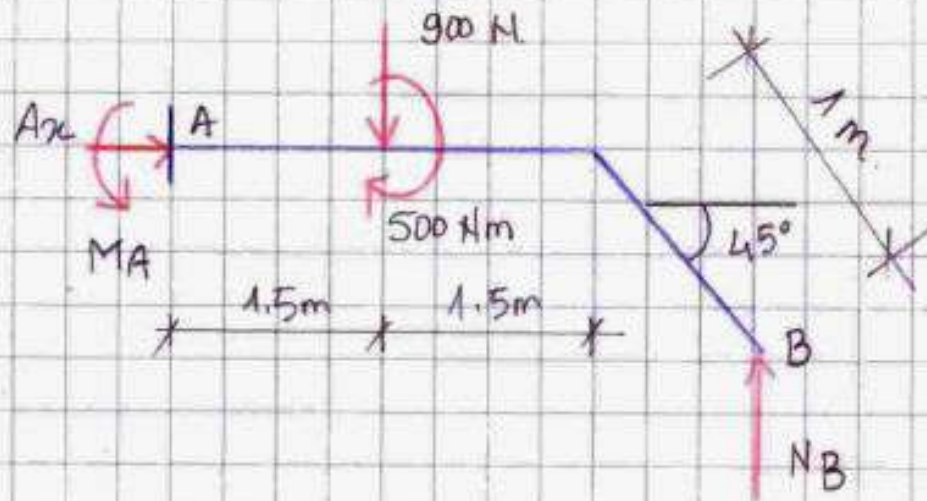


Örnek:



Sıradaki gösterilen sistemin mesnet reaksiyonlarını bulunuz. A nok. mesnet düzey yönde kayabiliyor.

Serbest Cisim Diyagramı :

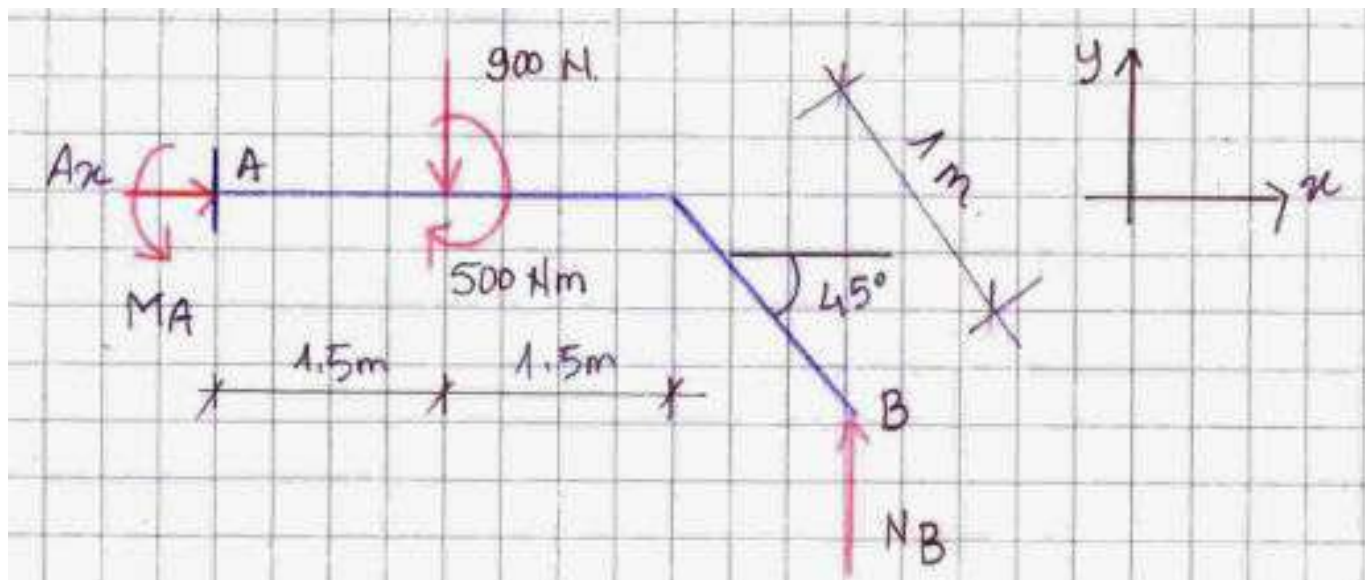


Not: $\sum M_A = 0$
 $\sum M_B = 0$
 $\sum F_x = 0$ } Denge denklemleri de kullanılabilir.

(A ve B'yi birleştiren gizli y eksenine paralel değil)

Denge denklemleri uygulanırsa:

$$\begin{aligned} \rightarrow \sum F_x = 0; \quad A_x &= 0 \quad (\text{direkt bulundu!}) - \text{Tek bilinmeyen} \quad x\text{-yönünde} \\ +\uparrow \sum F_y = 0; \quad N_B - 900 &= 0 \Rightarrow N_B = 900 \text{ N} \end{aligned}$$



Moment reaksiyi kuralı ile, A veya B nok. göre moment alınarak bulunur:

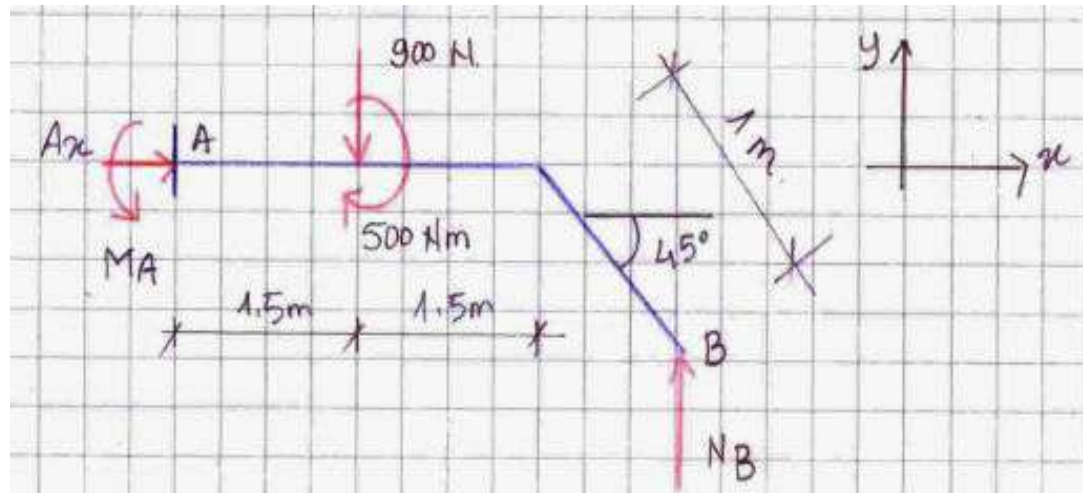
$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0; \quad M_A - 500 - 900(1.5) + 900(3 + 1 \cos 45) = 0$$

$$M_A = -1486 \text{ Nm} = 1.49 \text{ kNm} \quad \downarrow$$

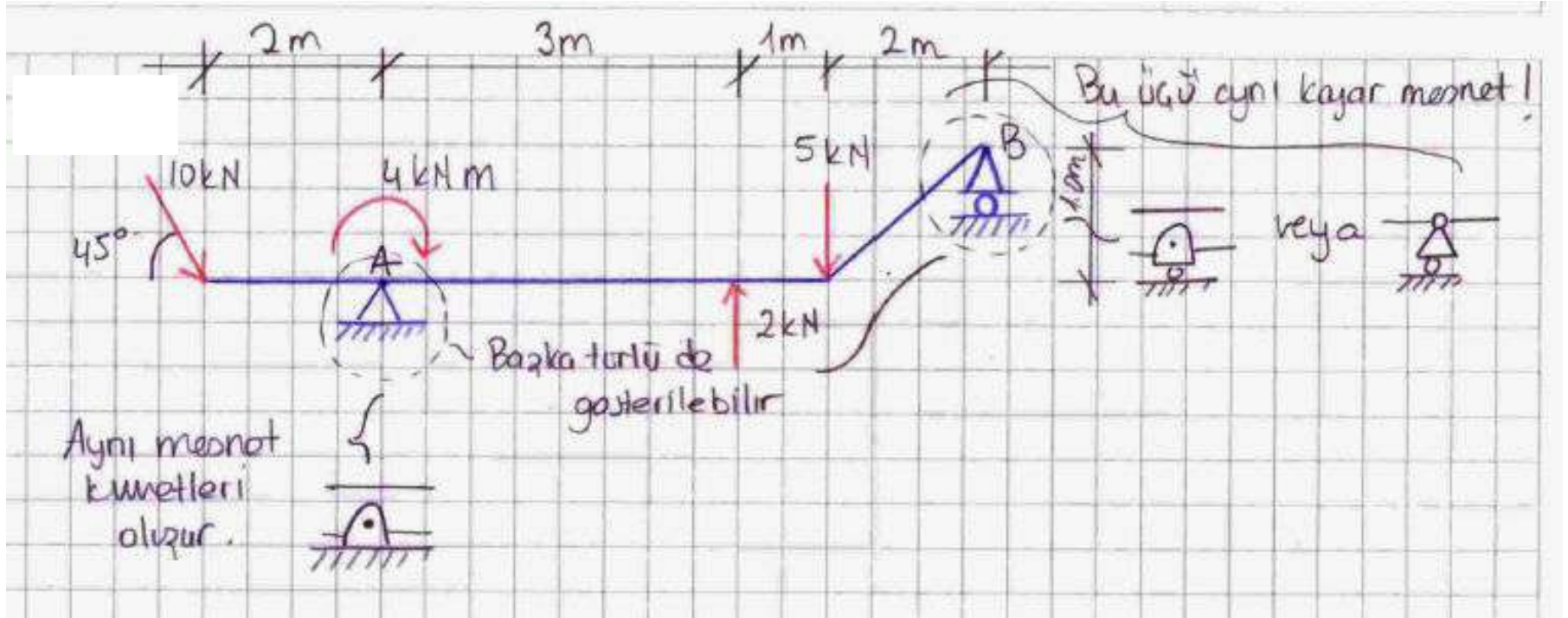
veya

$$+\circlearrowleft \sum M_B = 0; \quad M_A - \cancel{0(1 \sin 45)} - 500 + 900(1.5 + 1 \cos 45) = 0$$

$$M_A = -1486 \text{ Nm} = 1.49 \text{ kNm} \quad \downarrow$$

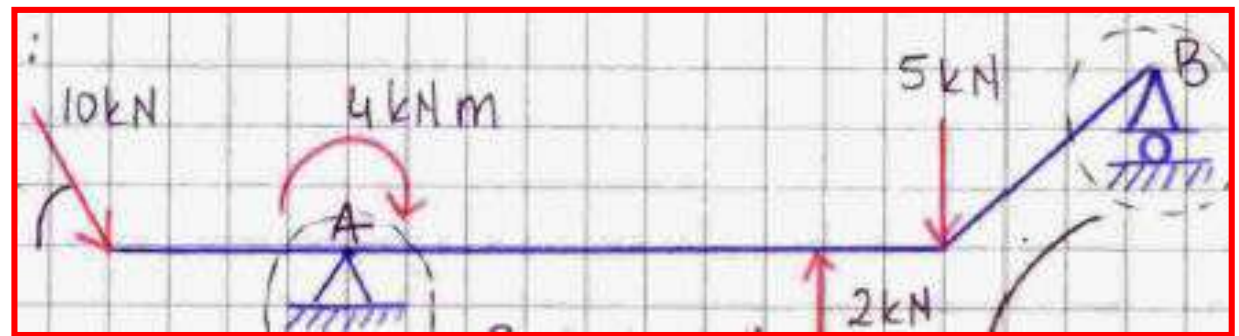
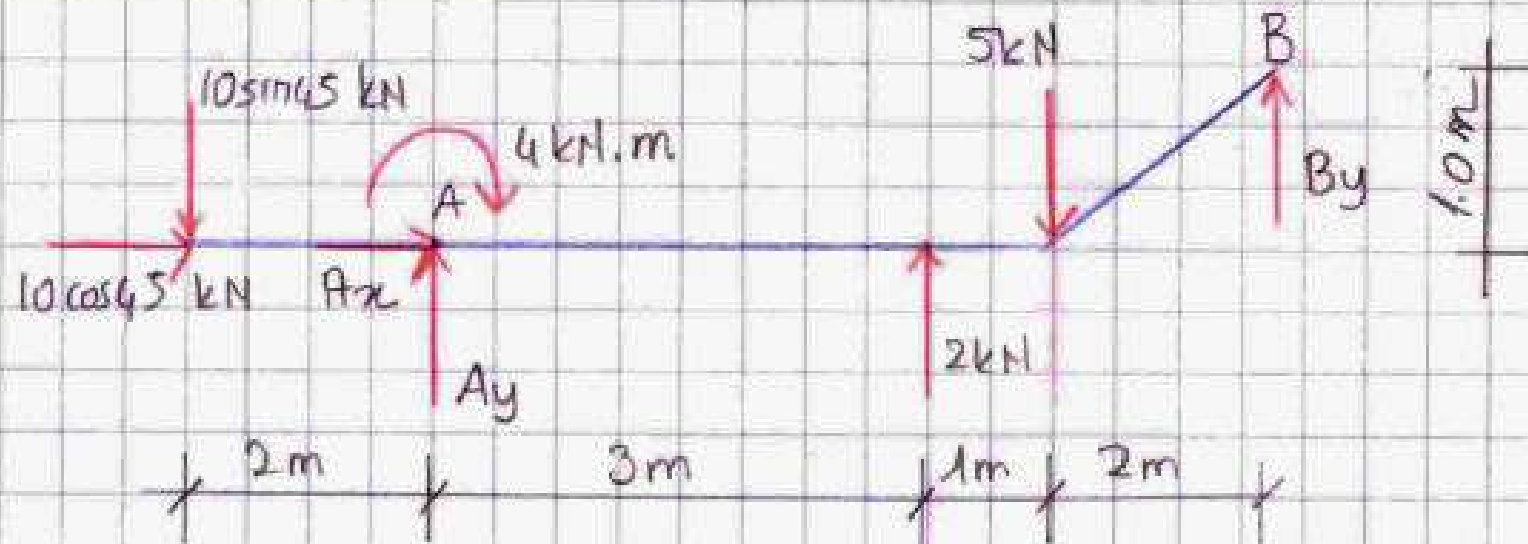


Örnek:



A ve B mesnetlerindeki reaksiyon kuvvetlerini (mesnet kuvvetlerini) bulunuz!

Serbest Aşım Diyagramı:



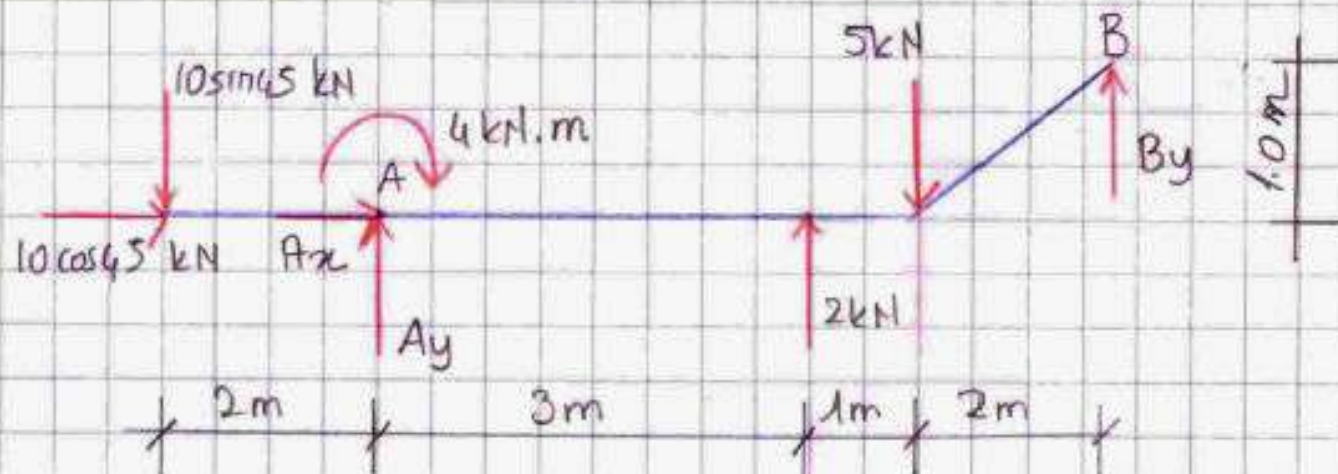
Denge Denklemleri:

A nok. göre moment alalım:

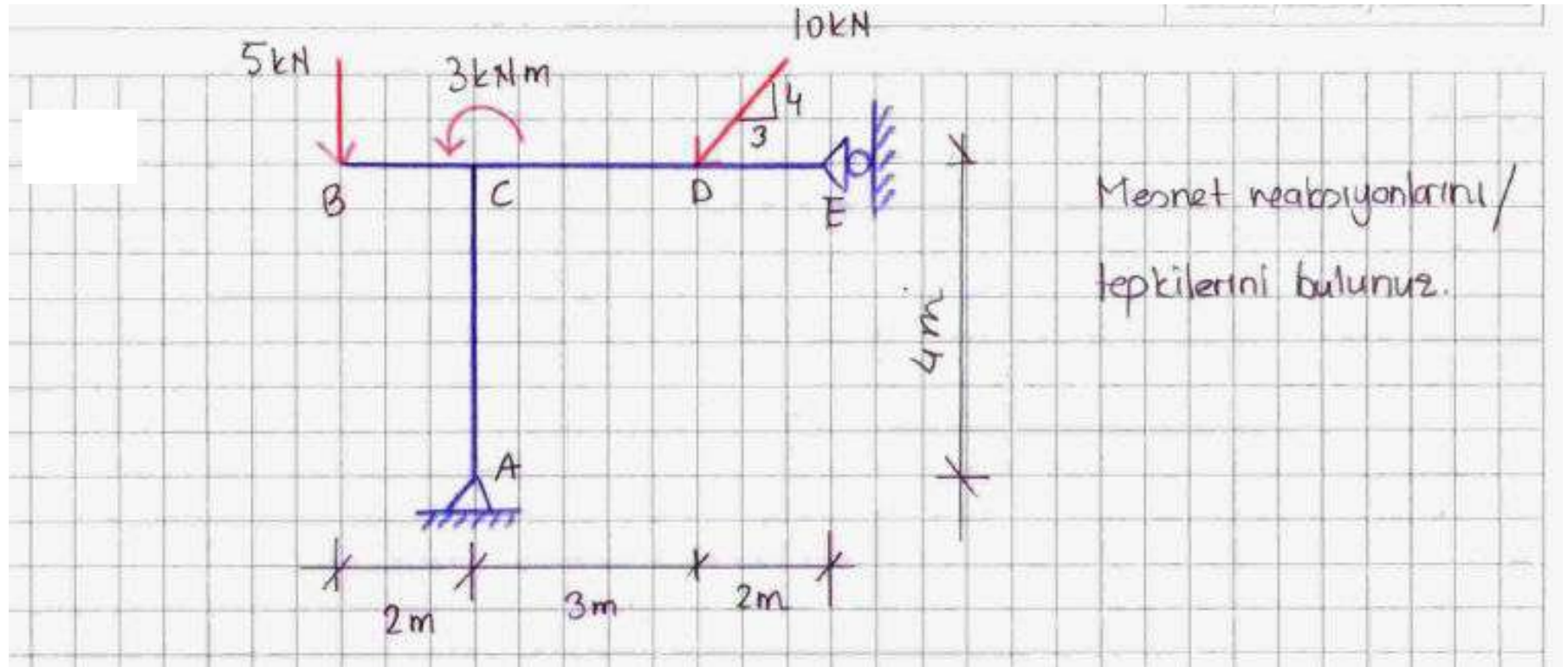
$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0; 10 \sin 45^\circ (2) + 2(3) - 5(4) - 4 + B_y(6) = 0$$

$$B_y = +0.64 \text{ kN} = 0.64 \text{ kN}(\uparrow)$$

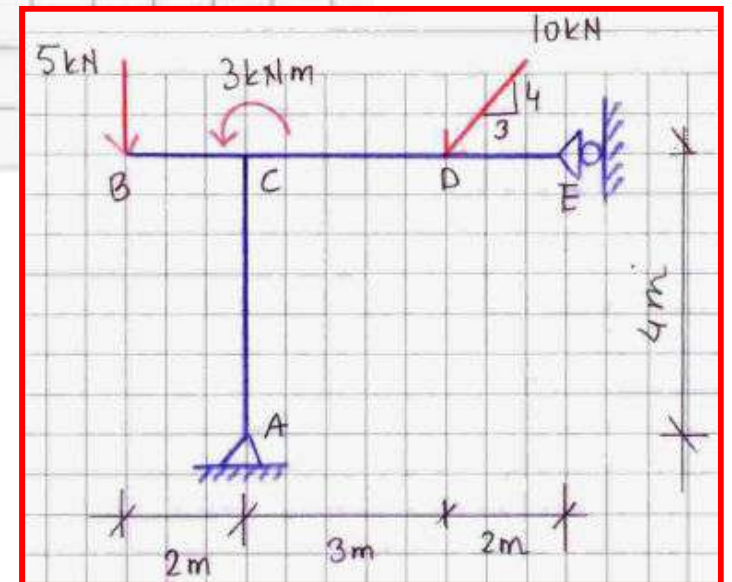
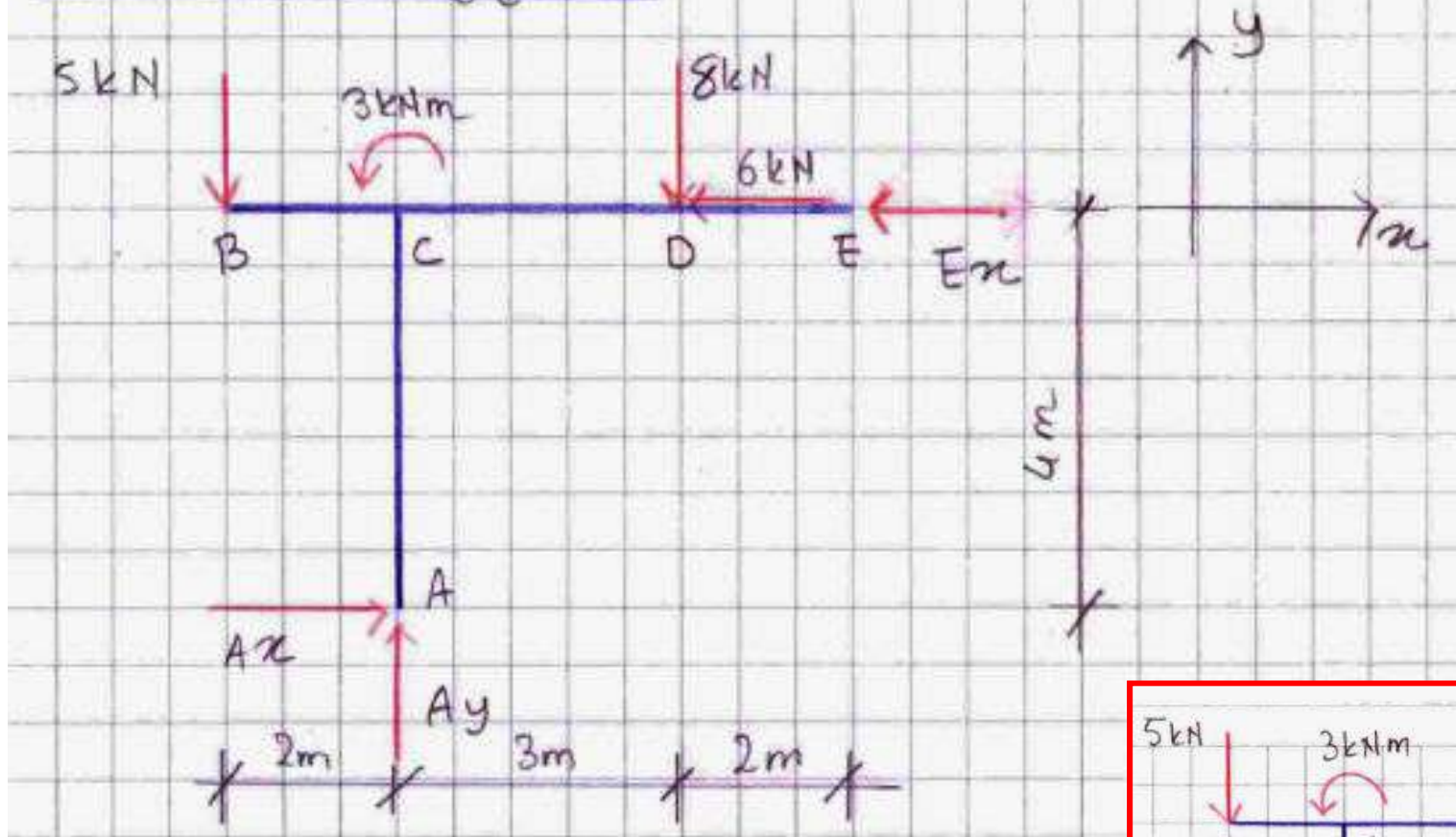
Serbest Cisim Diyagramı:



Örnek:



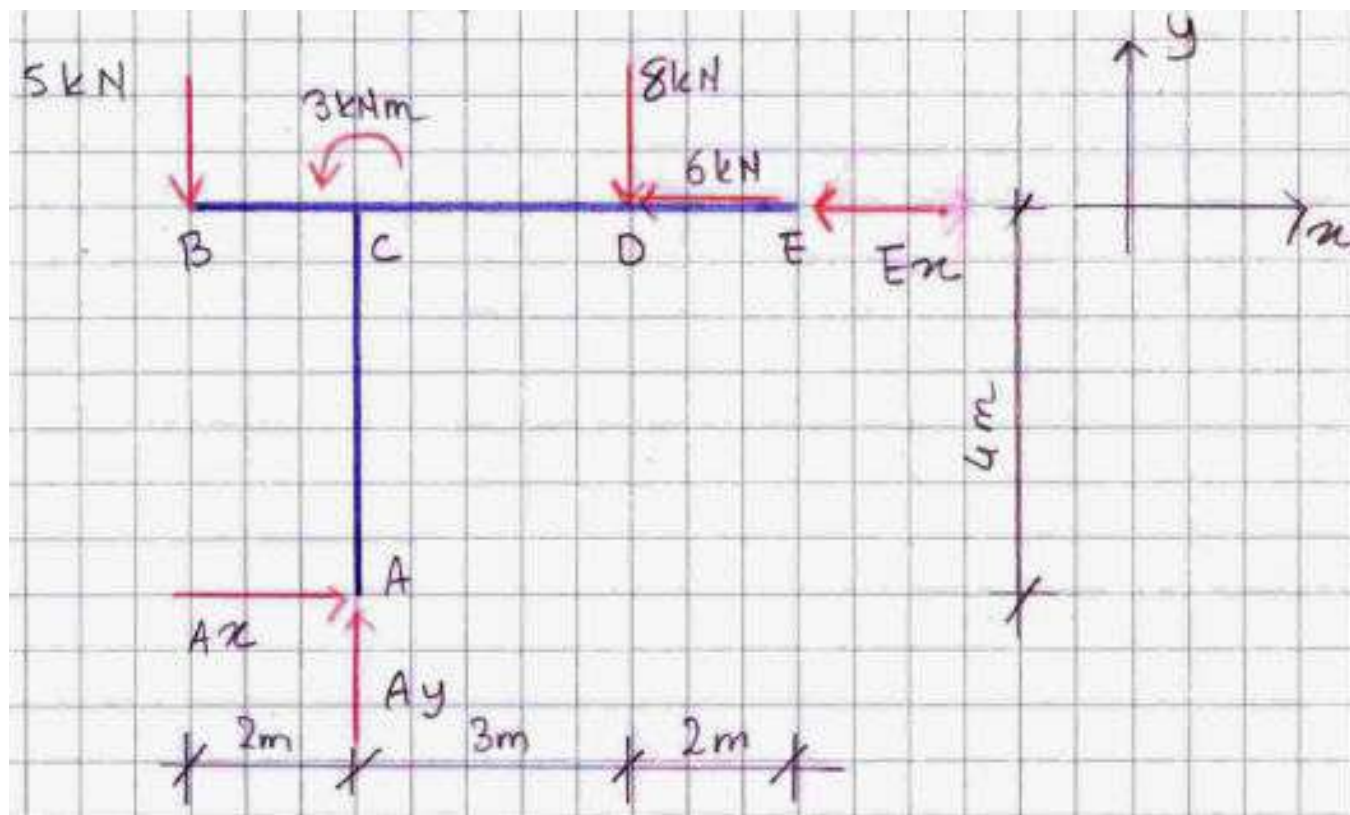
Serbest Cisim Diyagramı:



Denge Denklemleri:

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0; \quad 5(2) + 3 - 8(3) + 6(4) + E_x(4) = 0$$

$$E_x = -3.25 \text{ kN} = \underline{3.25 \text{ kN}} \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{bu yön dikkate} \\ \text{alınarak } \sum F_x = 0 \\ \text{denkleminde yerine} \\ \text{konur.} \end{array}$$

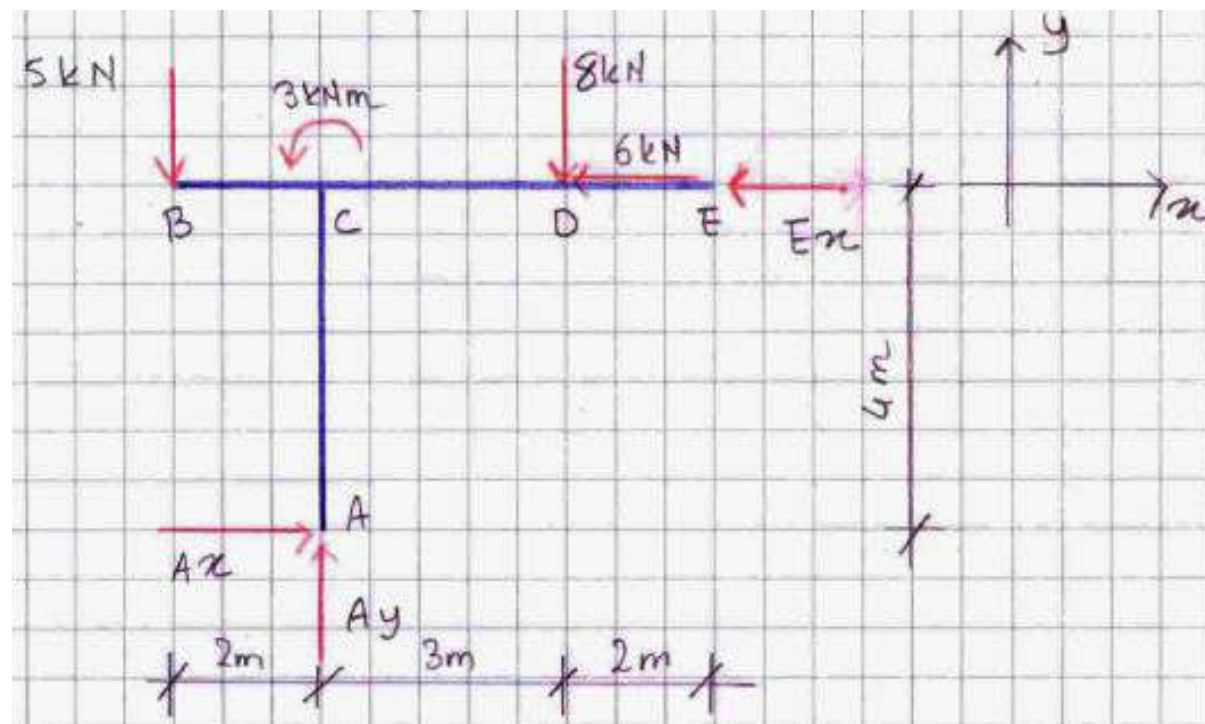


$$\rightarrow \sum F_x = 0; \quad A_x - 6 + 3.25 = 0$$

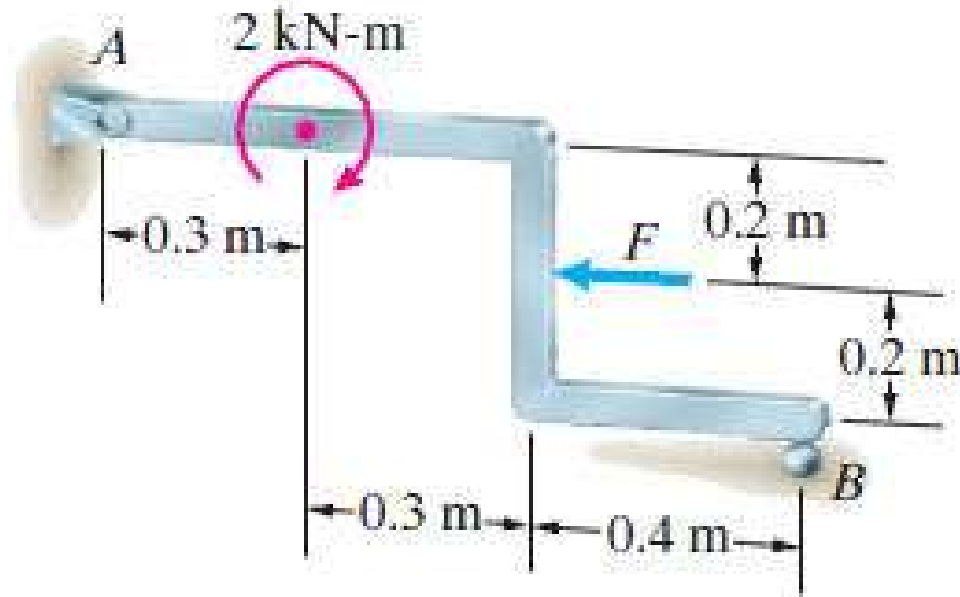
$$\underline{A_x = 2.75 \text{ kN} (\rightarrow)}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0; \quad -5 + A_y - 8 = 0$$

$$\underline{A_y = 13 \text{ kN} (\uparrow)}$$

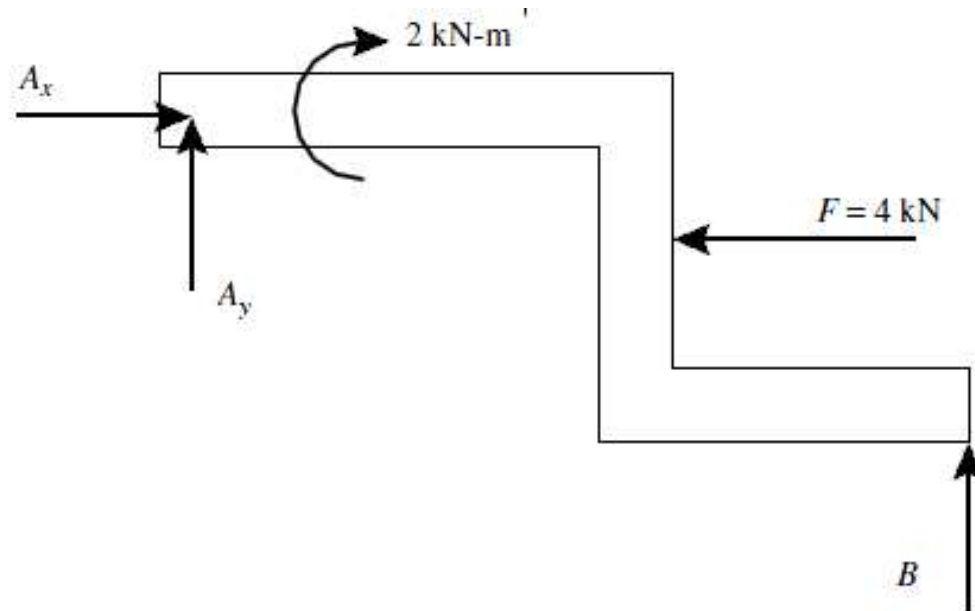


Örnek:



Şekilde gösterilen cismin serbest cisim diyagramını çiziniz ve denge denklemlerini uygulayarak, A ve B mesnetlerinde oluşan reaksiyon kuvvetlerini bulunuz.

Serbest cisim diyagramı:



Denge denklemleri uygulanarak mesnet reaksiyonları hesaplanır:

$$\sum M_A : -2 \text{ kN-m} - 4 \text{ kN}(0.2 \text{ m}) + B(1.0 \text{ m}) = 0$$

$$\sum F_x : A_x - 4 \text{ kN} = 0$$

$$\sum F_y : A_y + B = 0$$

$A_x = 4 \text{ kN}, A_y = -2.8 \text{ kN}, B = 2.8 \text{ kN}$

STATİK

BÖLÜM 5. RİJİT CİSİMLERİN DENGESİ

ÖRNEK SORU ÇÖZÜMLERİ

1. Şekilde gösterilen sistemde makaraya bağlı ipteki kuvveti ve A noktasındaki yatay ve düşey reaksiyonları bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$\sum M_A = 0; T(2) + T\left(\frac{4}{5}\right)(4) - 80(9.81)(5.5) = 0$$

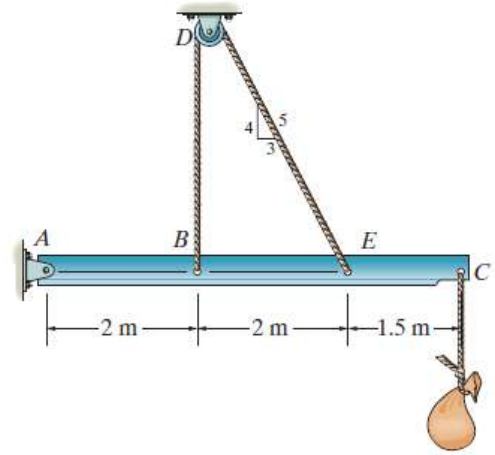
$$T = 830.1 \text{ N} = 830 \text{ N} \quad \text{Ans}$$

$$\sum F_x = 0; A_x - 830.1\left(\frac{3}{5}\right) = 0$$

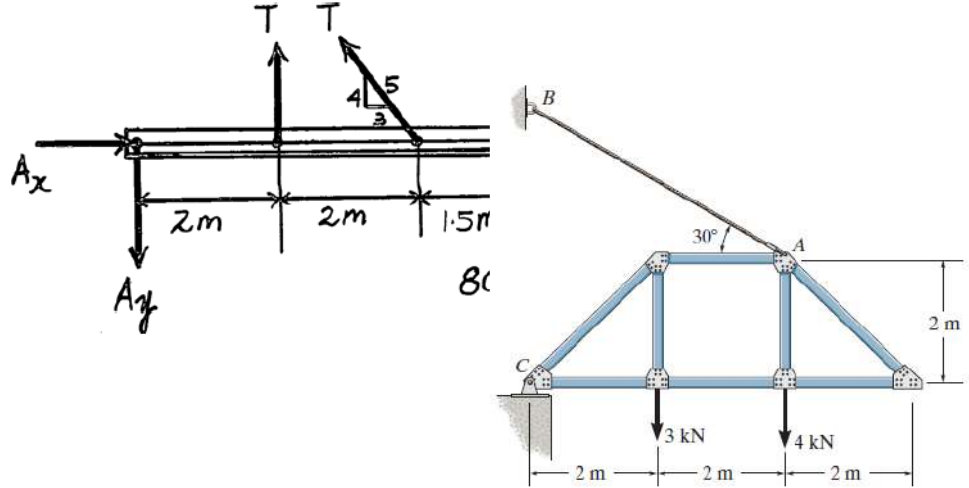
$$A_x = 498 \text{ N} \quad \text{Ans}$$

$$\sum F_y = 0; -A_y + 830.1 + 830.1\left(\frac{4}{5}\right) - 80(9.81) = 0$$

$$A_y = 709 \text{ N} \quad \text{Ans}$$



2. Şekilde gösterilen kafes sistemde AB kabloındaki kuvveti ve C noktasındaki yatay ve düşey reaksiyonları bulunuz.

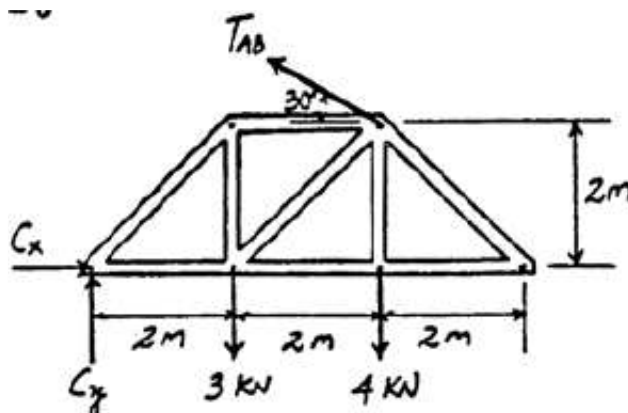


ÇÖZÜM:

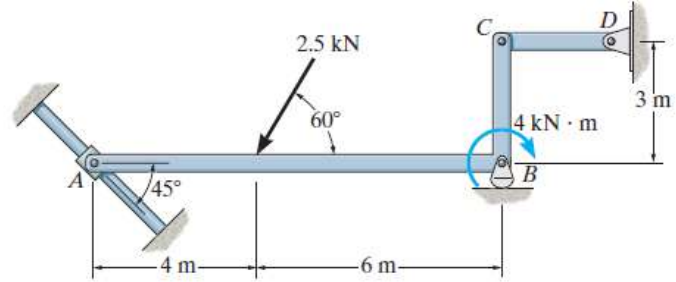
$$\begin{aligned} \sum M_C = 0; \quad T_{AB} \cos 30^\circ (2) + T_{AB} \sin 30^\circ (4) - 3(2) - 4(4) &= 0 \\ T_{AB} &= 5.89 \text{ kN} \quad \text{Ans} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0; \quad C_x - 5.89 \cos 30^\circ &= 0 \\ C_x &= 5.11 \text{ kN} \quad \text{Ans} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0; \quad C_y + 5.89 \sin 30^\circ - 3 - 4 &= 0 \\ C_y &= 4.05 \text{ kN} \quad \text{Ans} \end{aligned}$$



3. Şekilde gösterilen sistemde A ve B noktalarındaki normal reaksiyon kuvvetlerini bulunuz. Ayrıca CD elemanına etki eden kuvveti belirleyiniz.



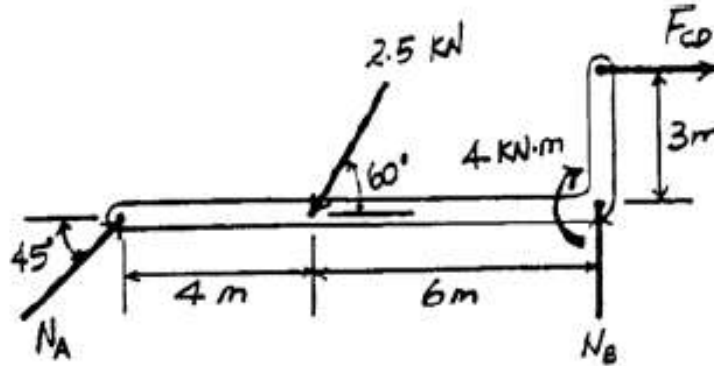
ÇÖZÜM:

$$\begin{aligned} \left(+ \Sigma M_C = 0; \right. & \quad 2.5 \sin 60^\circ (6) - 2.5 \cos 60^\circ (3) - 4 \\ & \quad \left. + N_A \cos 45^\circ (3) - N_A \sin 45^\circ (10) = 0 \right. \end{aligned}$$

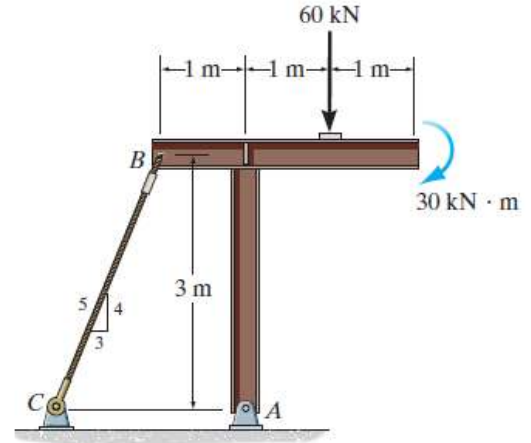
$$N_A = 1.059 \text{ kN} = 1.06 \text{ kN} \quad \text{Ans}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \Sigma F_x = 0; & \quad 1.059 \cos 45^\circ - 2.5 \cos 60^\circ + F_{CD} = 0 \\ & \quad F_{CD} = 0.501 \text{ kN} \quad \text{Ans} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + \uparrow \Sigma F_y = 0; & \quad N_B + 1.059 \sin 45^\circ - 2.5 \sin 60^\circ = 0 \\ & \quad N_B = 1.42 \text{ kN} \quad \text{Ans} \end{aligned}$$



4. Şekilde gösterilen çelik çerçeve sisteminde A mesnedine etki eden reaksiyonun yatay ve dikey bileşenlerini bulunuz. Ayrıca çerçeveyi desteklemek için kullanılan BC kablusunda oluşan çekme kuvvetini hesaplayınız.



ÇÖZÜM:

$$\begin{aligned} \left(+\Sigma M_A = 0; \right. & \quad T \left(\frac{3}{5} \right) (3) + T \left(\frac{4}{5} \right) (1) - 60(1) - 30 = 0 \\ & \quad T = 34.62 \text{ kN} = 34.62 \text{ kN} \end{aligned}$$

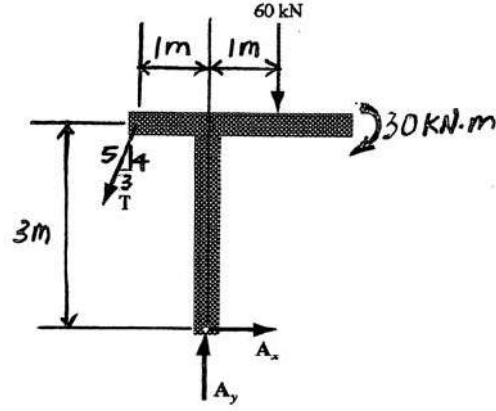
Ans.

$$\begin{aligned} \left(+\Sigma F_x = 0; \right. & \quad A_x - 34.62 \left(\frac{3}{5} \right) = 0 \\ & \quad A_x = 20.77 \text{ kN} = 20.8 \text{ kN} \end{aligned}$$

Ans.

$$\begin{aligned} \left(+\Sigma F_y = 0; \right. & \quad A_y - 60 - 34.62 \left(\frac{4}{5} \right) = 0 \\ & \quad A_y = 87.69 \text{ kN} = 87.7 \text{ kN} \end{aligned}$$

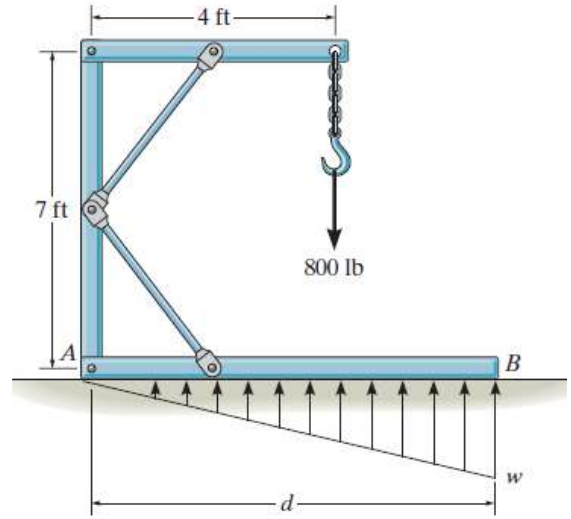
Ans.



(a)

5. Şekilde gösterilen çerçeve düz zeminde bulunan AB elemanı tarafından desteklenmektedir. Çerçeve yüklendiğinde AB'deki basınç dağılımı şekilde gösterildiği gibi lineer olmaktadır. Buna göre AB elemanının d uzunluğunu ve w basınç değerini bulunuz.

ÇÖZÜM:





$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad F_p - 800 = 0$$

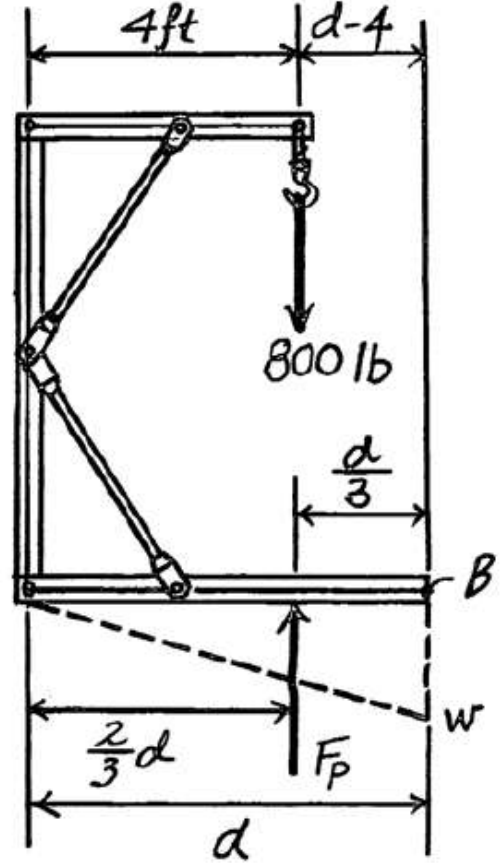
$$F_p = 800 \text{ lb}$$

$$\left(+\Sigma M_B = 0; \quad -800\left(\frac{d}{3}\right) + 800(d-4) = 0 \right.$$

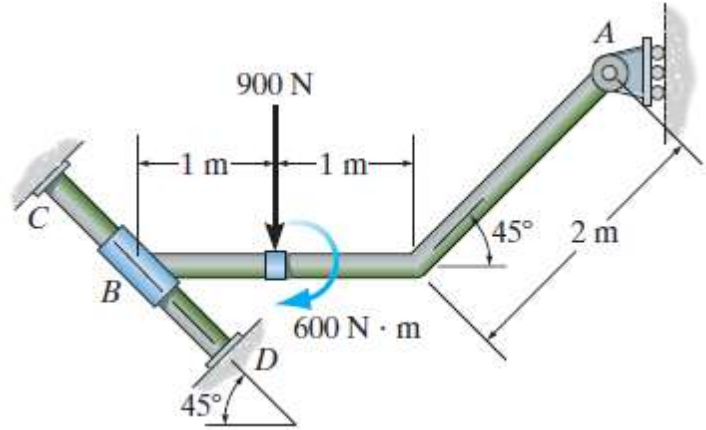
$$d = 6 \text{ ft} \quad \text{Ans}$$

$$F_p = \frac{1}{2}wd = \frac{1}{2}(w)(6) = 800$$

$$w = 267 \text{ lb/ft} \quad \text{Ans}$$



6. Şekilde gösterilen sistemde A hareketli mesnedinde ve B halkasında oluşan mesnet reaksiyonlarını bulunuz. B halkası AB boyunca tutulmuş (ankastre), ancak CD boyunca kayabilmektedir.



ÇÖZÜM:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0;$$

$$N_B \sin 45^\circ - 900 = 0$$

$$N_B = 1272.79 \text{ N} = 1.27 \text{ kN}$$

Ans.

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0;$$

$$1272.79 \cos 45^\circ - A_x = 0$$

$$A_x = 900 \text{ N}$$

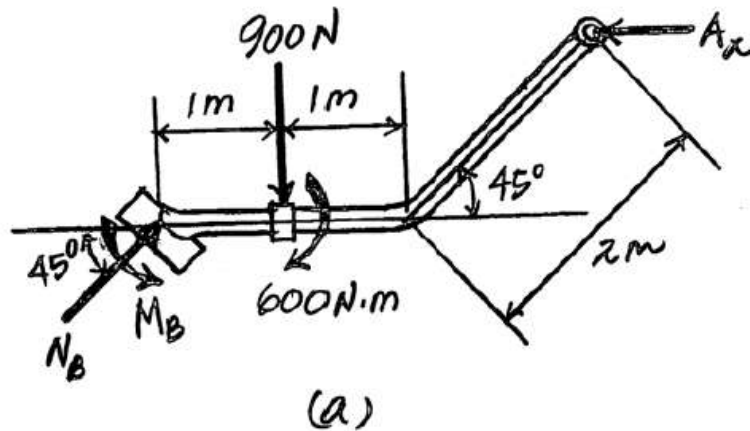
Ans.

$$\curvearrowright + \Sigma M_B = 0;$$

$$-900(1) + 900(2) \sin 45^\circ - 600 + M_B = 0$$

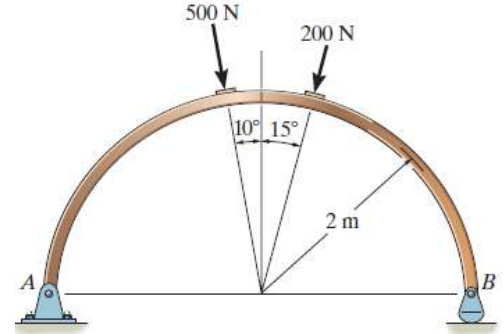
$$M_B = 227 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Ans.



7. Şekilde görülen eğik kirişin A ve B mesnedinde oluşan reaksiyonları bulunuz.

ÇÖZÜM:



$$\sum M_A = 0; N_B (4) - 200 \cos 15^\circ (2) - 500 \cos 10^\circ (2) = 0$$

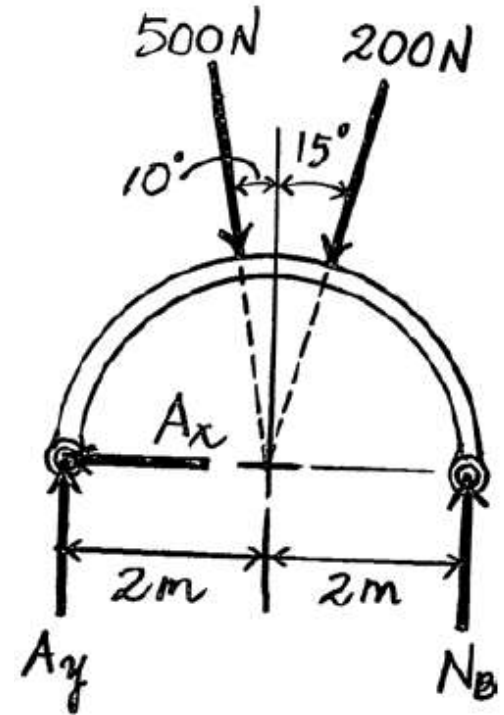
$$N_B = 342.79 = 343 \text{ N} \quad \text{Ans}$$

$$\sum F_y = 0; A_y - 500 \cos 10^\circ - 200 \cos 15^\circ + 342.79 = 0$$

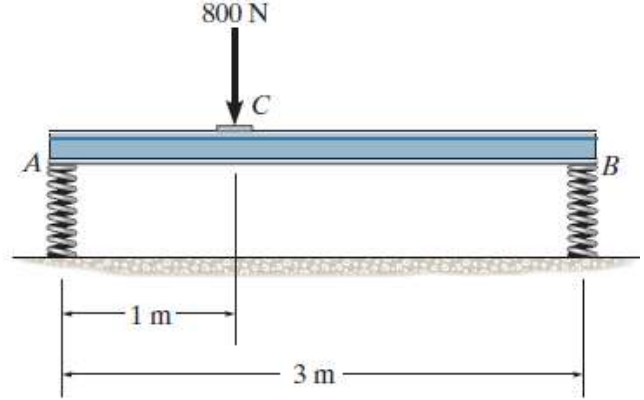
$$A_y = 342.8 = 343 \text{ N} \quad \text{Ans}$$

$$\sum F_x = 0; -A_x + 500 \sin 10^\circ - 200 \sin 15^\circ = 0$$

$$A_x = 35.1 \text{ N} \quad \text{Ans}$$



8. Şekilde görülen yatay kiriş A ve B noktalarında rijitlikleri $k = 5 \text{ kN/m}$ olan yaylar tarafından desteklenmektedir. Yayların uzamamış haliyle kiriş yatay kalmaktadır. Eğer kiriş C noktasından 800 N ile yüklenirse kirişin dönme açısını bulunuz.



CÖZÜM:

$$\uparrow + \Sigma M_B = 0; \quad 800(2) - F_A(3) = 0 \quad F_A = 533.33 \text{ N}$$

$$\uparrow + \Sigma M_A = 0; \quad F_B(3) - 800(1) = 0 \quad F_B = 266.67 \text{ N}$$

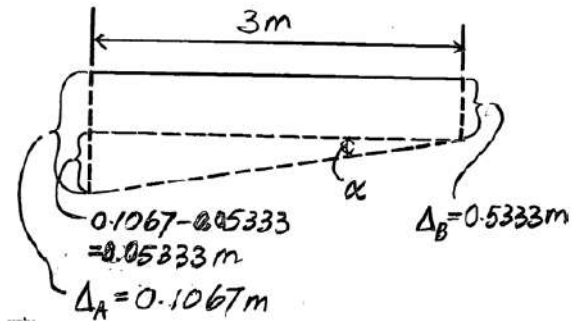
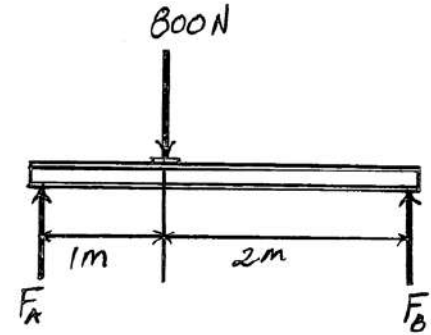
Yaydaki uzama şu formülle hesaplanır: $\Delta = \frac{F}{k}$

$$\Delta_A = \frac{533.33}{5(10^3)} = 0.1067 \text{ m}$$

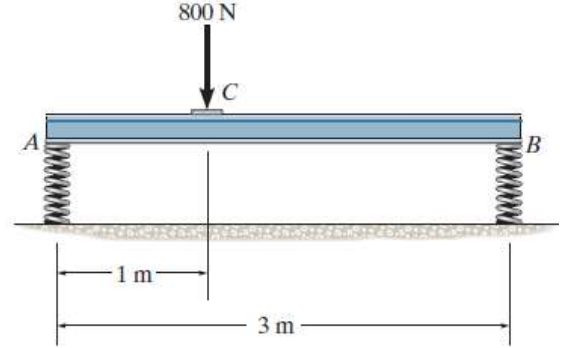
$$\Delta_B = \frac{266.67}{5(10^3)} = 0.05333 \text{ m}$$

Dönme açısı α geometriden hesaplanabilir.

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{0.05333}{3}\right) = 1.02^\circ$$



9. Şekilde görülen yatay kiriş A ve B noktalarında yaylar tarafından desteklenmektedir. Eğer A noktasındaki yayın rijitliği $k_A = 5 \text{ kN/m}$ 'dir. Kiriş C noktasından 800 N ile yüklendiği zaman bu yük altında kirişin yatay kalabilmesi için B noktasındaki yayın rijitliği ne olmalıdır?



ÇÖZÜM:

$$\left(+ \sum M_B = 0; \quad 800(2) - F_A(3) = 0 \quad F_A = 533.33 \text{ N} \right.$$

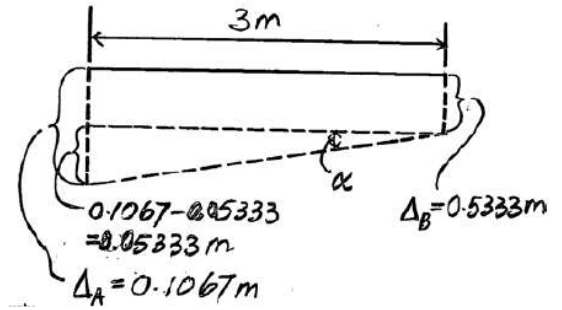
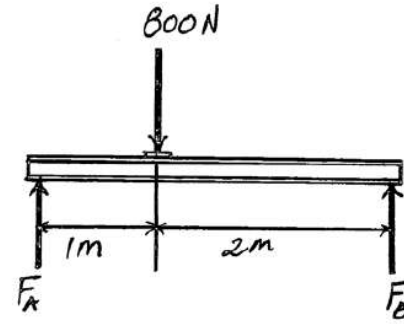
$$\left(+ \sum M_A = 0; \quad F_B(3) - 800(1) = 0 \quad F_B = 266.67 \text{ N} \right.$$

Yayda oluşan sıkışma miktarı şu formülle bulunur:

$$\Delta = \frac{F}{k}$$

Bu durumda;

$$\Delta_A = \frac{533.33}{5(10^3)} = 0.1067 \text{ m} \quad \Delta_B = \frac{266.67}{k_B}$$



Kirişin yatay kalabilmesi için A ve B noktalarındaki deplasmanların (yer değiştirmelerin) eşit olması gerekir.

$$\Delta_B = \Delta_A \quad \frac{266.67}{k_B} = 0.1067$$

$$k_B = 2500 \text{ N/m} = 2.50 \text{ kN/m}$$

10. Şekilde görülen yatay plakanın ağırlığını ihmal ederek, AB, CD ve EF kablolarında oluşan çekme kuvvetlerini bulunuz.

$P = 6 \text{ kN}$, $x = 0.75 \text{ m}$ ve $y = 1 \text{ m}$ olarak alınız.

ÇÖZÜM:

$$\Sigma M_x = 0; T_{CD} (2) - 6(1) = 0$$

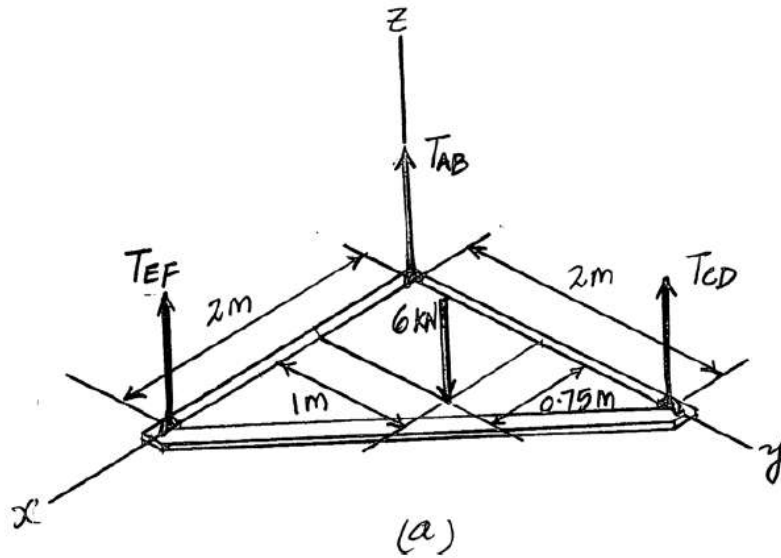
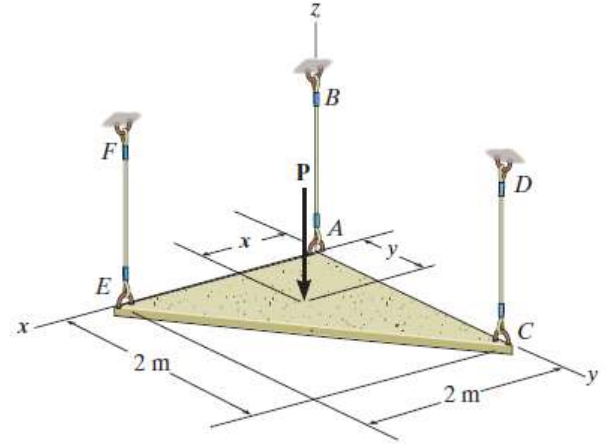
$$T_{CD} = 3 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_y = 0; T_{EF} (2) - 6(0.75) = 0$$

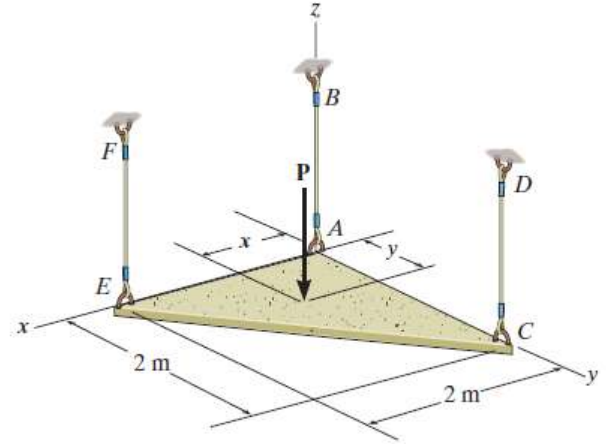
$$T_{EF} = 2.25 \text{ kN}$$

$$\Sigma F_z = 0; T_{AB} + 3 + 2.25 - 6 = 0$$

$$T_{AB} = 0.75 \text{ kN}$$



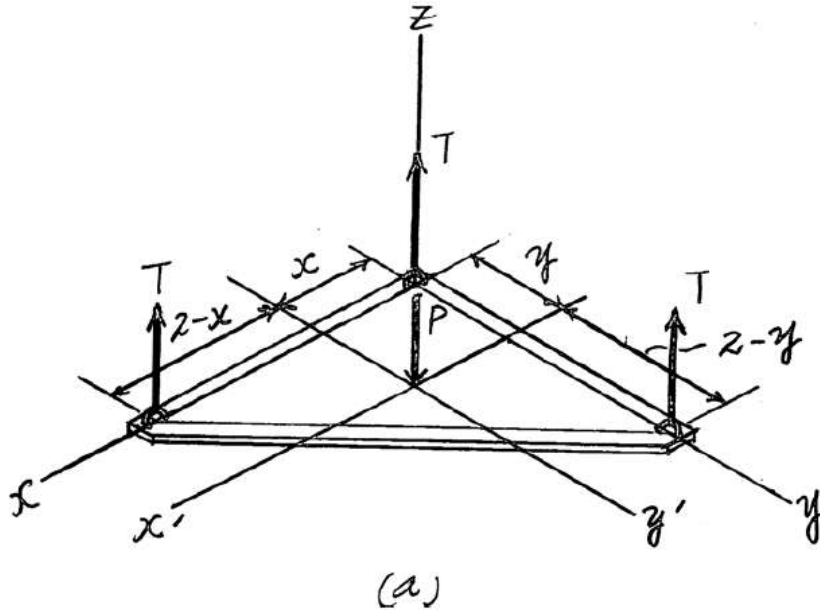
11. Şekilde görülen yatay plakanın ağırlığını ihmal ederek; AB, CD ve EF kablolarında oluşan çekme kuvvetlerinin birbirine eşit olabilmesi için P kuvvetinin etkiye noktasının koordinatları olan x ve y'nin değerlerini bulunuz.



ÇÖZÜM:

Şekil (a)'ya göre x' ve y' eksen takımı dikkate alınarak moment alınabilir.

$$\begin{aligned} \Sigma M_{x'} &= 0; & T(2-y) - 2T(y) &= 0 \\ & & y &= 0.667 \text{ m} \\ \Sigma M_{y'} &= 0; & 2T(x) - T(2-x) &= 0 \\ & & x &= 0.667 \text{ m} \end{aligned}$$



12. Şekilde görülen sistemde A mesnedindeki reaksiyonları ve BC kablosundaki kuvveti hesaplayınız.

ÇÖZÜM:

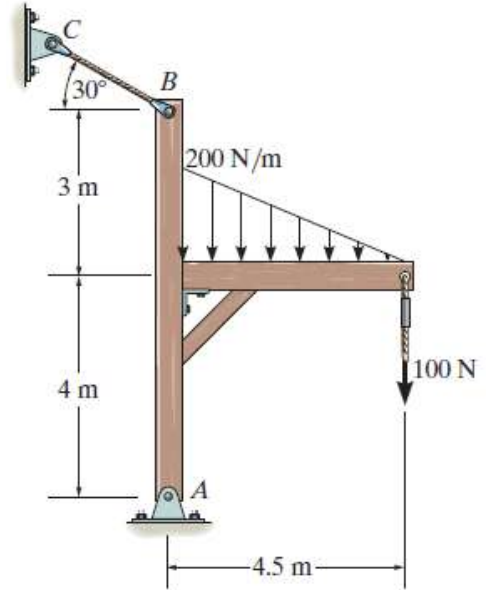
$$\sum \mathcal{M}_A = 0; \quad F_{BC} \cos 30^\circ (7) - 450(1.5) - 100(4.5) = 0$$

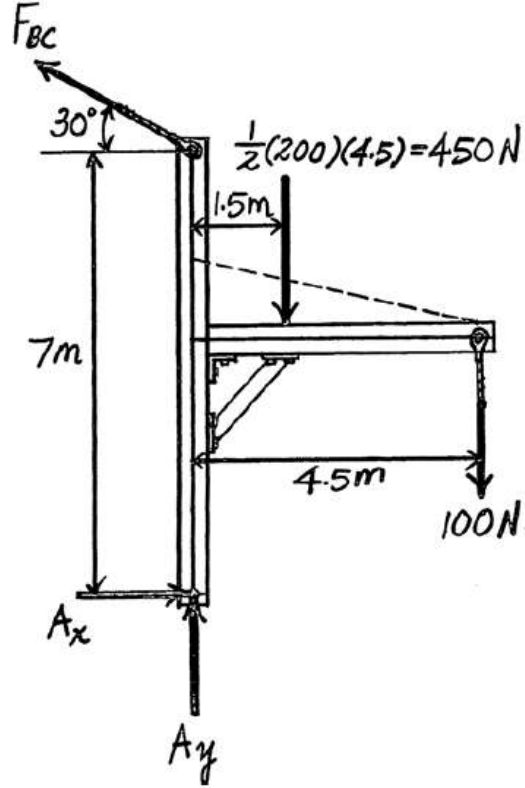
$$F_{BC} = 185.58 \text{ N} \approx 186 \text{ N}$$

$$\sum F_x = 0; \quad A_x - 185.58 \cos 30^\circ = 0 \quad A_x = 161 \text{ N}$$

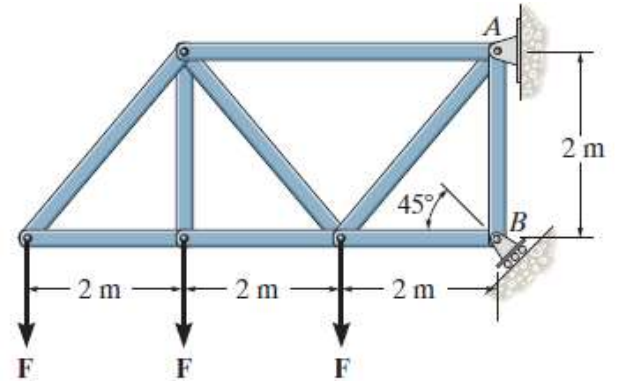
$$\sum F_y = 0; \quad A_y + 185.58 \sin 30^\circ - 450 - 100 = 0$$

$$A_y = 457 \text{ N}$$





13. Şekilde görülen kafes sistemde $F = 600 \text{ N}$ olarak A ve B mesnedindeki reaksiyonları hesaplayınız.



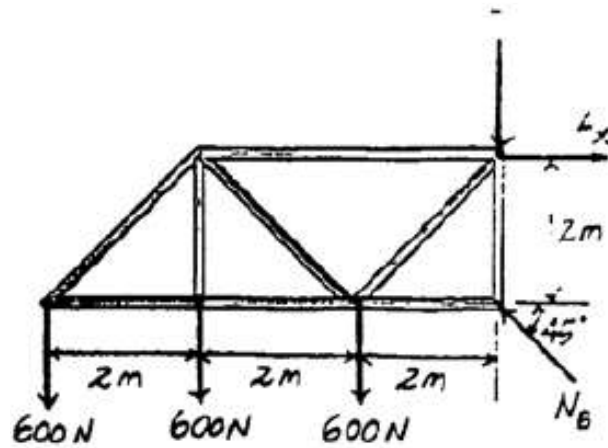
ÇÖZÜM:



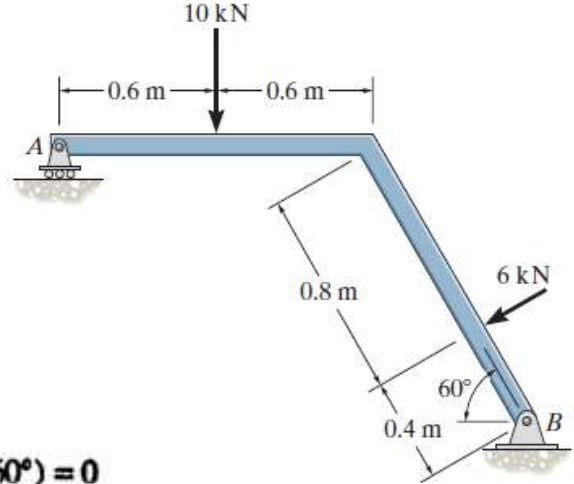
$$\begin{aligned} \left(+ \Sigma M_A = 0; \quad 600(6) + 600(4) + 600(2) - N_B \cos 45^\circ (2) = 0 \right. \\ \left. N_B = 5091.17 \text{ N} = 5.09 \text{ kN} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad A_x - 5091.17 \cos 45^\circ = 0 \\ A_x = 3600 \text{ N} = 3.60 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + \uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 5091.17 \sin 45^\circ - 3(600) - A_y = 0 \\ A_y = 1800 \text{ N} = 1.80 \text{ kN} \end{aligned}$$



14. Şekilde görülen sistemde A ve B mesnedindeki reaksiyonları hesaplayınız.



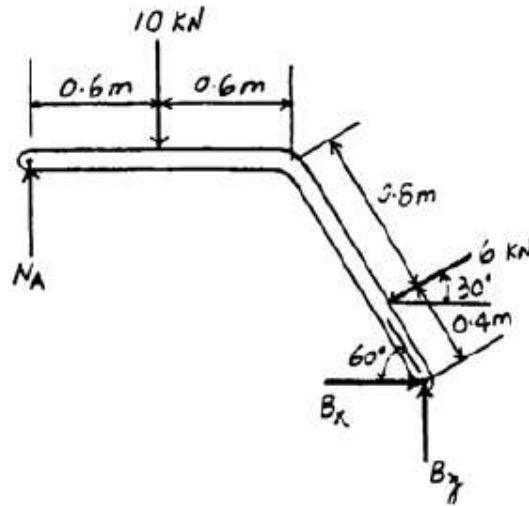
ÇÖZÜM:

$$\begin{aligned} \curvearrowleft + \Sigma M_A = 0; \quad & 10(0.6 + 1.2 \cos 60^\circ) + 6(0.4) \\ & - N_A(1.2 + 1.2 \cos 60^\circ) = 0 \end{aligned}$$

$$N_A = 8.00 \text{ kN}$$

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad B_x - 6 \cos 30^\circ = 0 \quad B_x = 5.20 \text{ kN}$$

$$\begin{aligned} + \uparrow \Sigma F_y = 0; \quad & B_y + 8.00 - 6 \sin 30^\circ - 10 = 0 \\ & B_y = 5.00 \text{ kN} \end{aligned}$$



Engineering Mechanics: Statics in SI Units, 12e

6**Yapısal Analiz
(Düzlemde Taşıyıcı Sistemler)**

Copyright © 2010 Pearson Education South Asia Pte Ltd

1

Bu Bölümde Öğrenilecek Konular:

- Düğüm noktası yöntemini ve kesit yöntemini kullanarak bir kafes kirişinin elemanlarındaki kuvvetlerin belirlenmesi
- Mafsal bağlantılı elemanlardan oluşan çerçeveler ve makine elemanlarına etki eden kuvvetlerin analizi.

Copyright © 2010 Pearson Education South Asia Pte Ltd

2

Yapı Analizi:

Amaçlar:

- (1) Kafes sistemlerde eleman kuvvetlerinin, düğüm noktası ve kesit yöntemleriyle bulunması,



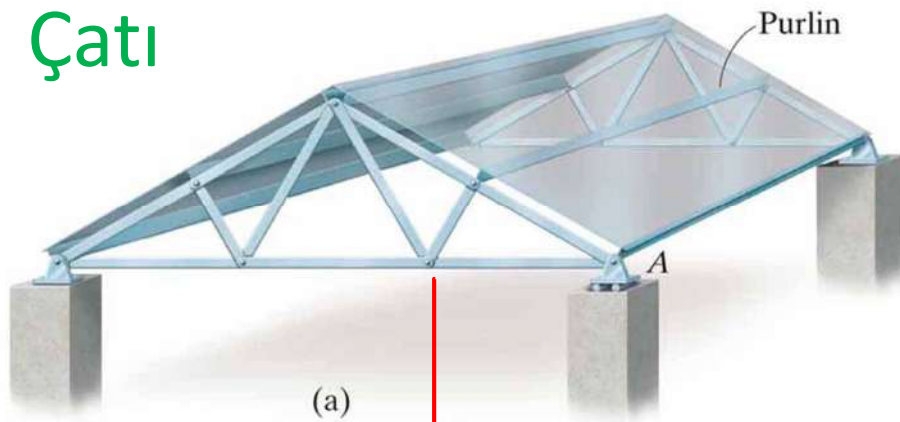
CO_06.jpg - The forces within the members of each truss bridge must be determined if the members are to be properly designed.

Basit Kafesler :

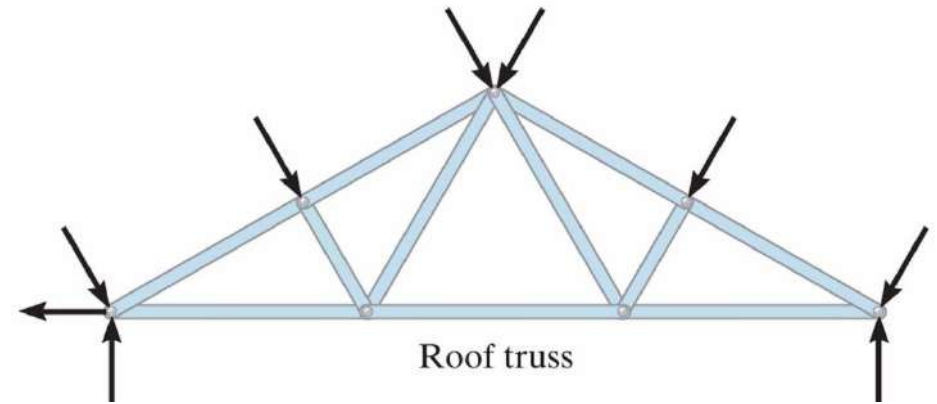
Narin elemanların uç noktalarından bir araya getirildiği yapılara kafes yapılar denir. Narin elemanlar genellikle ahşap gergilerden veya metal çubuklardan oluşmaktadır.

Özel bir durum olan düzlem kafesler tek bir düzlemde bulunurlar ve genellikle çatı ve köprülerin taşımasında kullanılırlar.

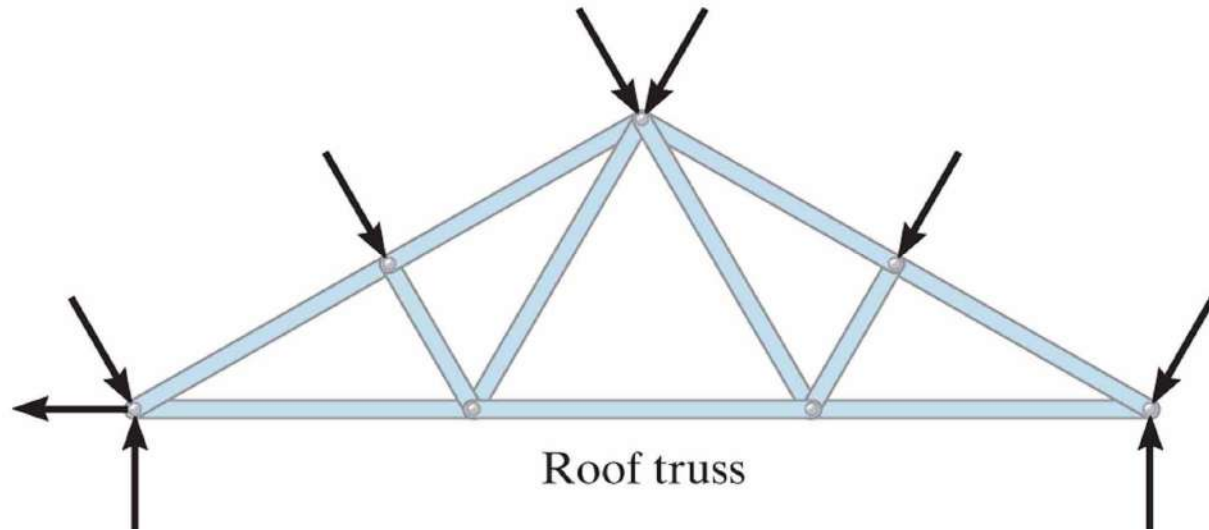
Çatı



Düzlem Çatı Makası

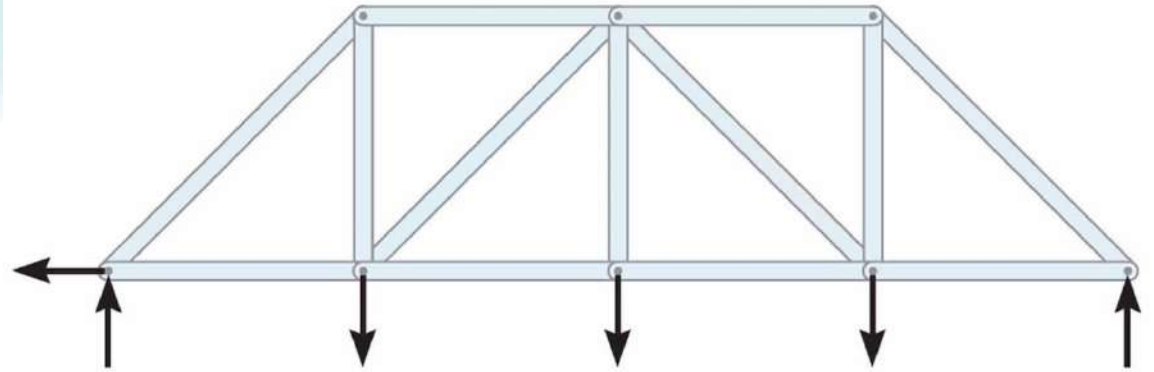
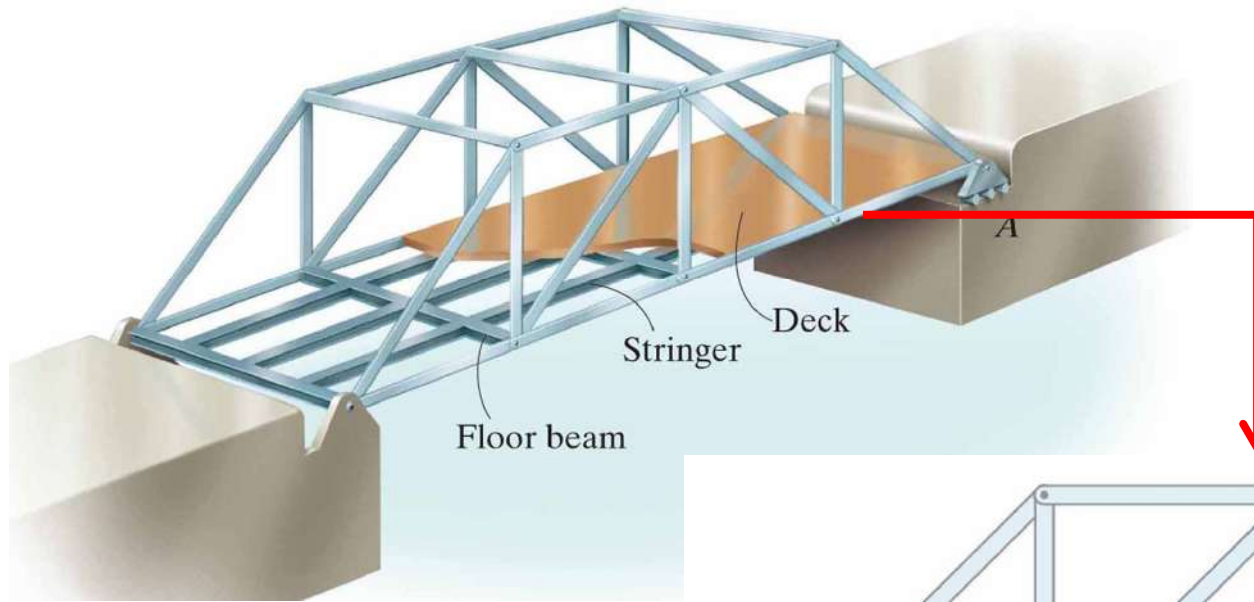


Burada, çatı yükü/kuvvetleri kafese düğüm noktaları (joints) üzerine bir seri aşık (purlin) aktarılmaktadır. Bu aktarılan kuvvetler kafese aynı düzlemde olduklarından, kafes elemanlarında oluşan kuvvetlerin analizi iki boyutlu analiz olacaktır.



Düzlem Çatı Kafesi/Makası

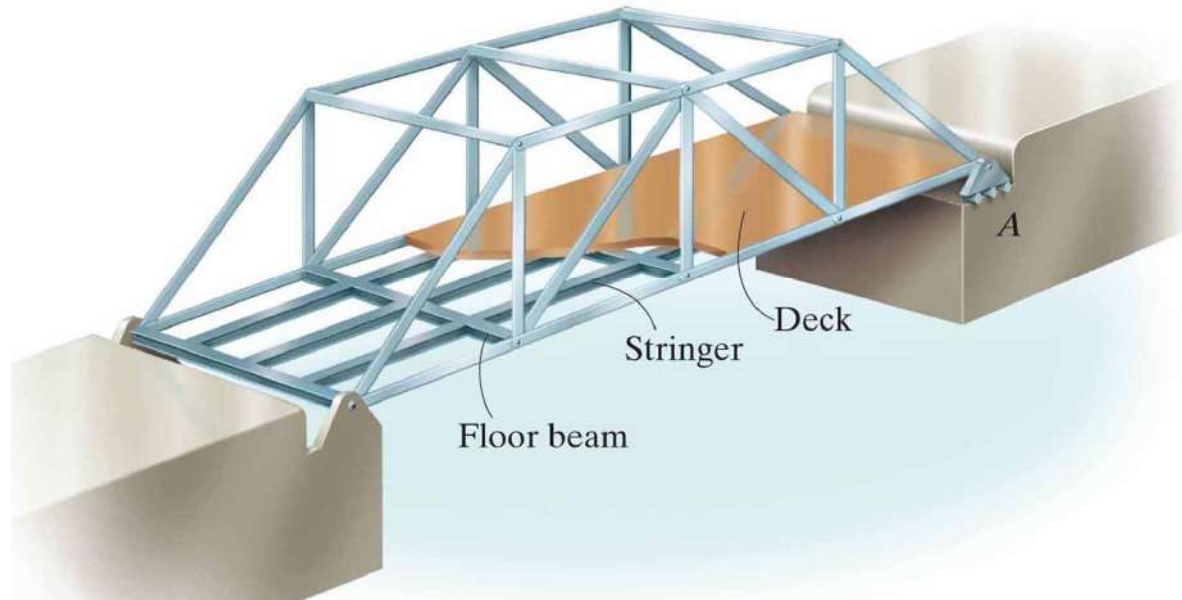
Kafes köprülerde ise yüklerin kafes sisteme aktarılması önce boyuna olan kirişler üzerinden, taban kirişlerine, oradan da iki yanda bulunan kafesin düğüm noktalarına aktarılmaktadır. (kuvvetlerle, kafes aynı düzlemde!)



Bridge truss

köprünün bir ucunu mesnetlenerek
1912

Köprülerin uzun mesafeleri geçmeleri durumunda sallanan mesnet (rocker) veya hareketli/kayar mesnet kullanılmaktadır. Böylece köprünün sıcaklık etkilerinden kaynaklı utama veya büzülmesine olanak verilerek, köprüde bu etkilerden dolayı kuvvetlerin oluşması engellenmektedir.



Tasarım kabulleri:

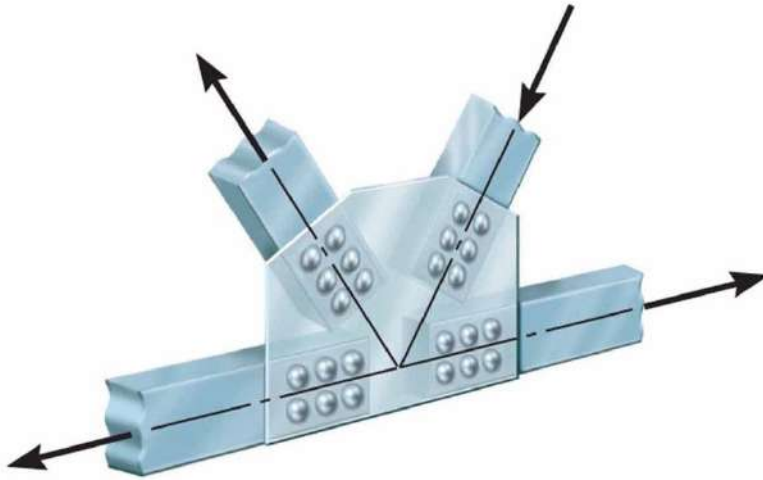
Kates elemanlarının ve düğüm noktalarının (joints) tasarımının yapılması için, öncelikle her bir elemanda dışarı kuvvetlerin bulunması gerekir. Bunun için iki önemli kabul yapılır:

- (1) Tüm yüklemeler düğüm noktalara yapılmaktadır: Birçok durum için bu kabul doğrudur. Sıklıkla, elemanın kendi ağırlığı ihmal edilir, çünkü tasarım yükü elemanın kendi ağırlığından çok çok fazladır. Ancak bu yüklerde dikkate alınmak isteniyorsa elemanın iki ucuna kendi ağırlığı eüt olarak paylaştırılır.

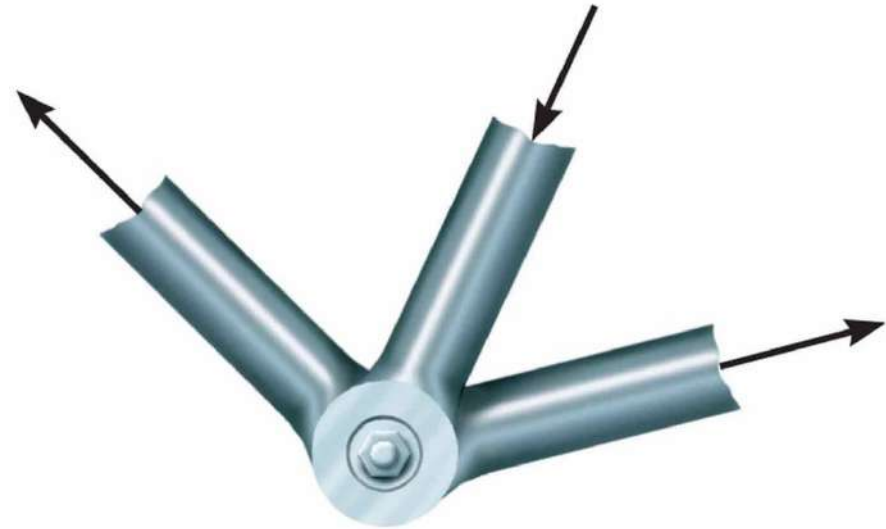
(2) Elemanlar sürtünmesiz mafsallarla/pinlerle veya bir plaka yardımıyla birleştirilmiştir.

İçerisinde birleşimleri genellikle perçinlerle veya kaynaklı olarak oluşturulur. Elemanlar ortak bir plaka olan gusset plakası üzerinde birleştirilirler veya uzunca bir cıvata kullanılarak bir düğüm noktasından geçen tüm elemanlar birleştirilir, böylece aynı noktadan geçen kuvvetler sistemi oluşur.

Gusset Plakası
Üzerinde Birleşim



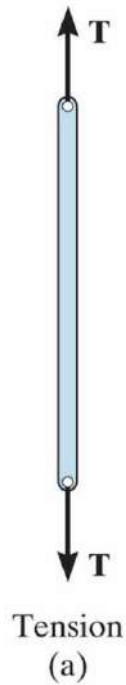
Pinli/Civatalı Birleşim



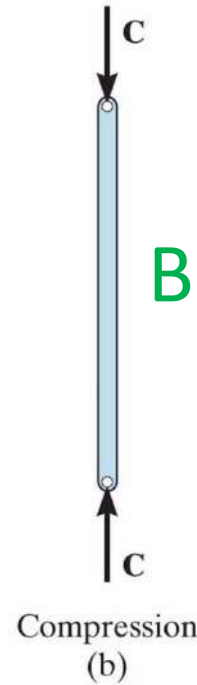
Bu iki tabulden dolgy, herbir kafes elemanina, elemanın eksenini doğrultusunda iki ucuна tek bir kuvvet etki eder.

Eger bu kuvvet, elemanın boyunu uzatıcı yönde etki oluştuyorsa çekme kuvveti (tensile force) T , boyunu kısaltıcı yönde bir etki oluştuyorsa basınç kuvveti (compressive force) C etki ediyor denir.

Çekme



Basınç



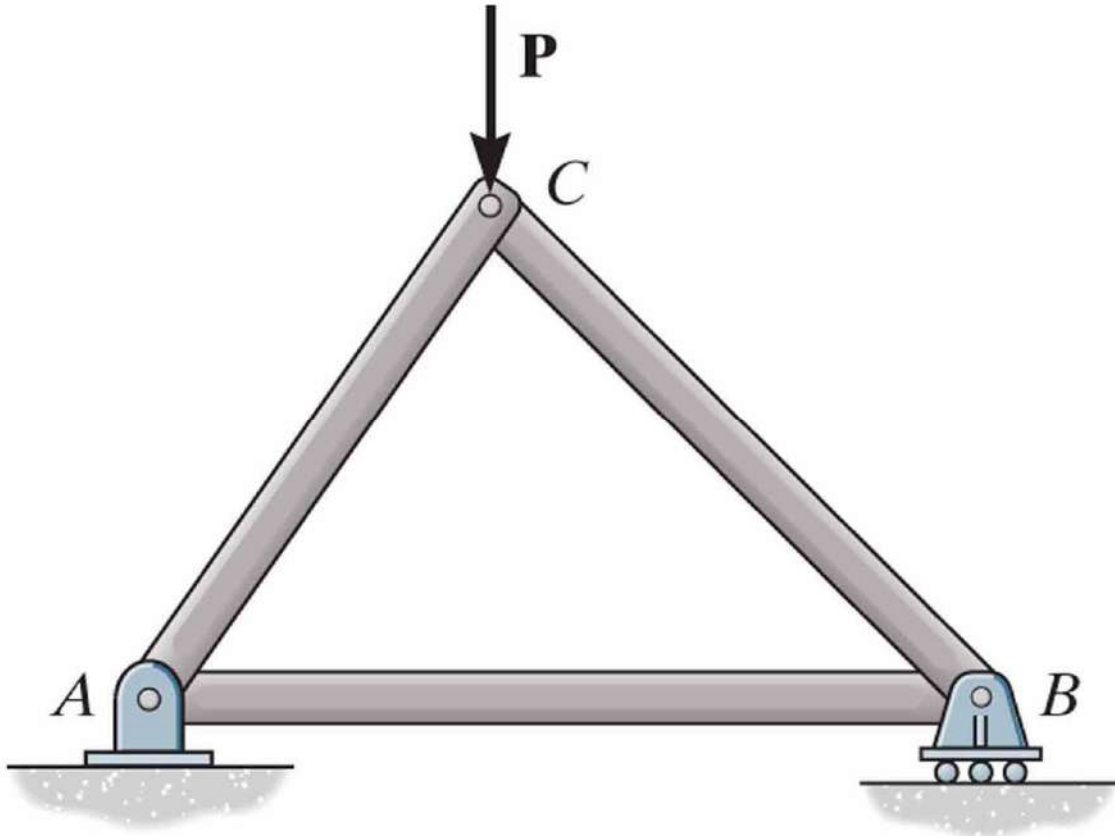
Tasarım yapılırken aubük/kafes elemanın çekme mi basıncı mı etkisi olduğu mutlaka dikkate alınmalıdır. Genellikle, basıncı elemanları (basıncı kuvveti etkisi altında) burkulma veya kolon etkisi nedenlerinden dolayı daha kalın tasarlanırlar.



Gusset Plakalarının
Gerçek Bir Yapıda
Kullanım Örneği

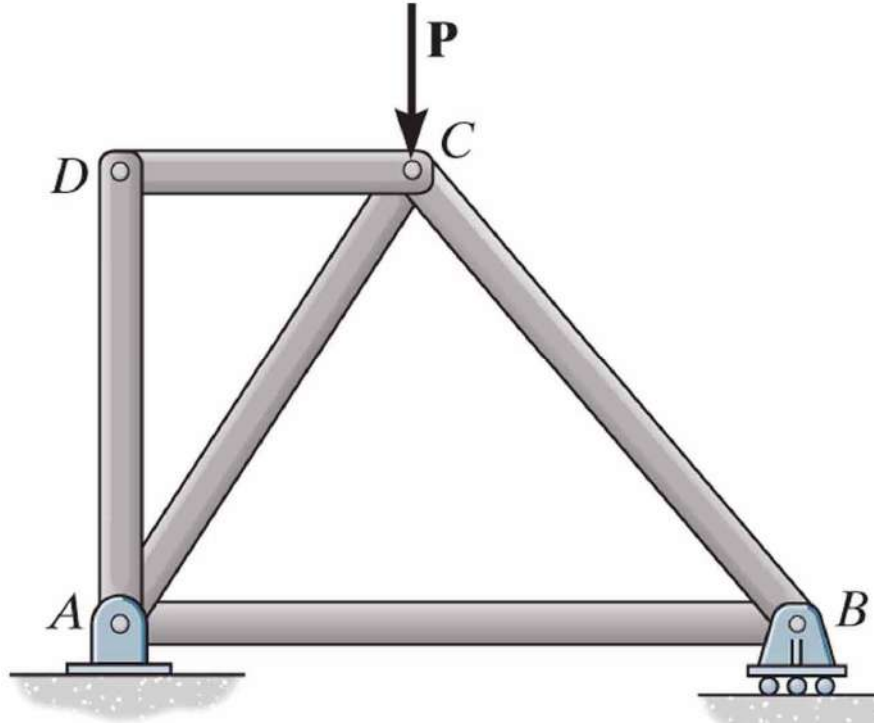
BASİT KAFES

Eğer üç kafes demanı üçgen oluşturacak şekilde uçlarından birleştirilerek bir araya getirilirlerse rijit bir form oluştururlar :



Üçgen Form
(Building Block)

İki tane daha kafes / aubuk elemanı eklenerek bu iki eleman bir başka D noktasında birleştirilirse aşağıdaki kafes sistem oluşur:



Üçgen Formlar (Kafes Büyüdü)

Bu işlem istenildiği kadar tekrarlanarak, istediğimiz büyüklükte kafes sistem elde edilir; bu tip üçgenlerden oluşmuş kafeslere basit kafes denir.

Düğüm Noktası veya Düğüm Metodu (Method of Joints)

Bir kafesi analiz etmek veya tasarlamak için, kafesi oluşturan elemanlara etkiyen kuvvetlerin bulunması gerekmektedir. Bunu yapmanın bir yolu düğüm metodudur.

Düğüm metodu şu gerçeğe dayanır; eğer tüm kafes dengedeyse, her bir düğüm noktası da dengede olmak zorundadır. Bu durumda düğüm noktalarının her birinin serbest cisim diyagramı çizilirse, denge denklemleri kullanılarak o düğüme biteren elemanlarda oluşan kuvvetler bulunabilir.

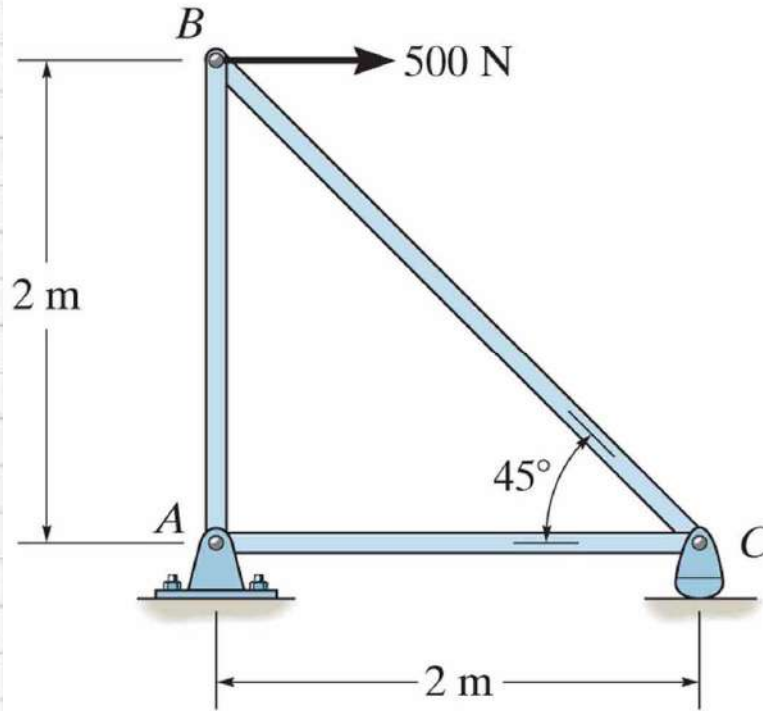
Kafesler düzlem kafes olduklarından dolayı, düğüm noktalarına etkiyen kuvvetler aynı düzlemde bulunan kuvvet sistemini oluştururlar. Böylece denge denklemleri aşağıdaki formu alır:

$$\left. \begin{array}{l} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{array} \right\} \text{skalar denge denklemleri}$$

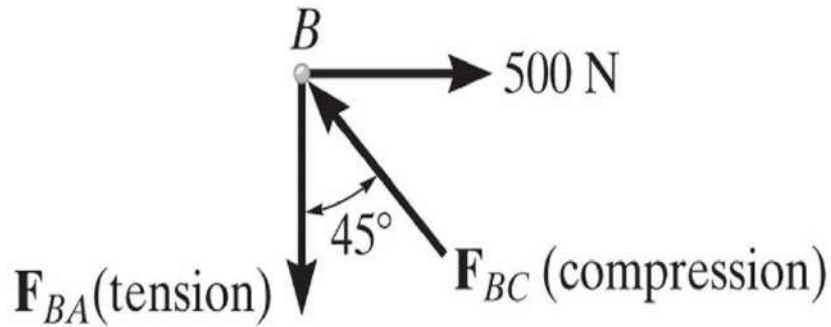
Dikkat edilirse;

$$\sum M_j = 0 \text{ otomatik olarak sağlanmaktadır.}$$

Aşağıdaki basit kafes sistemi düzenelim:

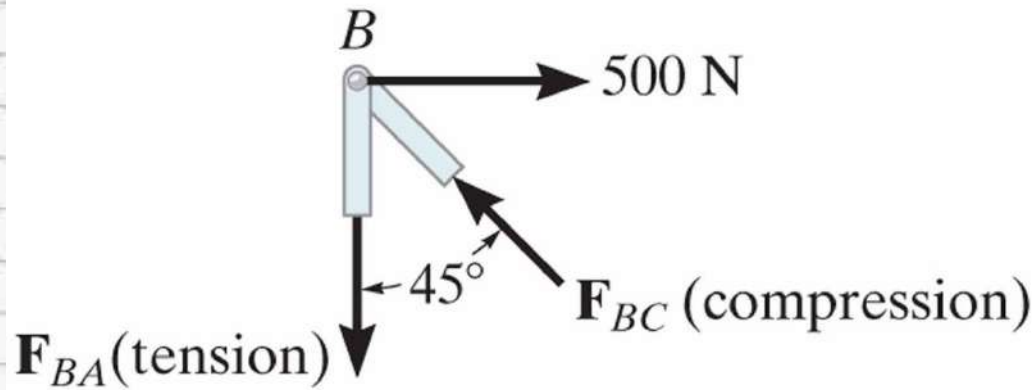


B düğüm noktasına etkiyen kuvvetleri düzenerek, bu noktanın zerbert cisim diyagramını çizelim:



BC kates elemanı B nok.'sına basınca uyguluyor; BA kates elemanı ise B noktasını çekerek, çekme etkisi oluşturun.

Bu durumda BA çubuk elemanı çekme kuvveti etkisi altında, BC de basınç kuvveti etkisi altındadır. Bu etkiler aşağıdaki şekilde açıkça gösterilmiştir.



Aynı düzlemdeki kuvvet sistemi
(iki boyutlu bir problem!)

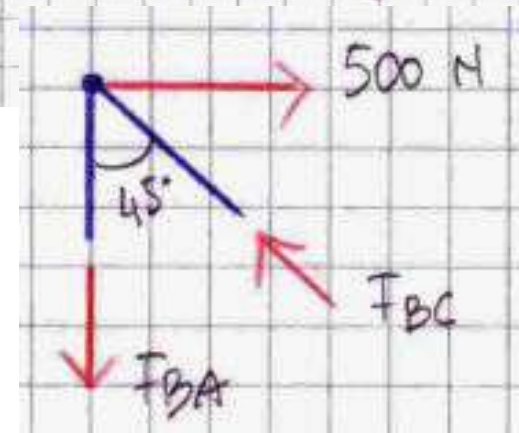
Basit katesler
rarr

Düğüm noktası yöntemi kullanılırken; her zaman en az bir bilinen
ve en çok iki bilinmeyenli olan düğüm noktasından başlamak gerekir. Böylece

$\sum F_x = 0$ ve $\sum F_y = 0$ denge denklemleri iki cebirsel denklem verir
ve iki bilinmeyen olması durumunda, ilaist de bulunabilir.

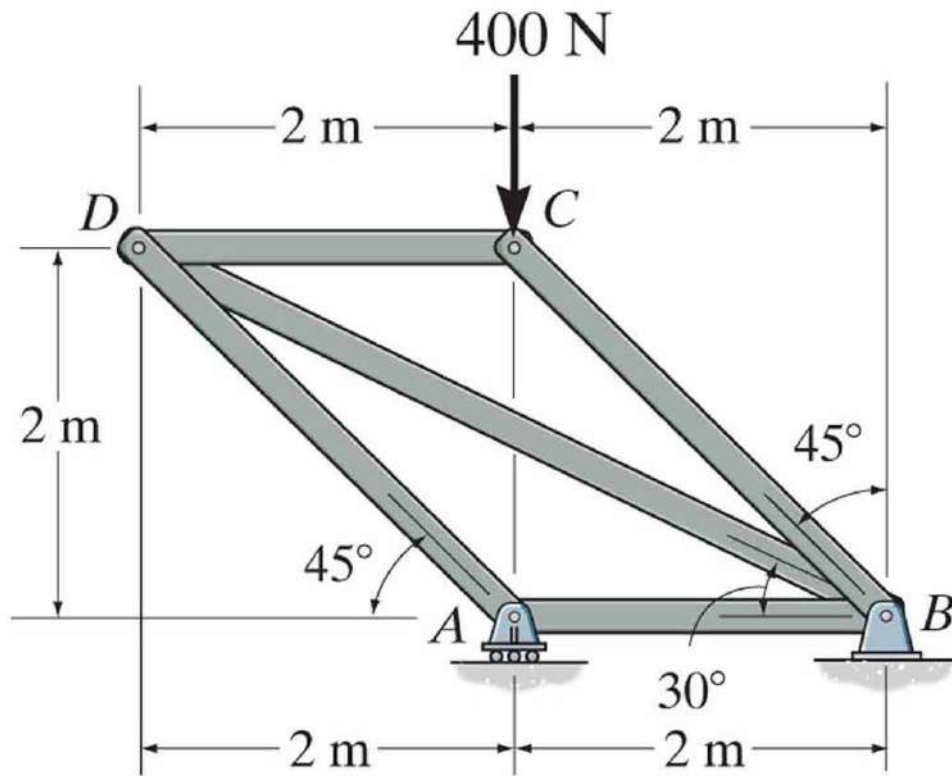
Bu denklemler uygulanırken, katı elemanlarda oluşan bilinmeyen kuvvetlerin doğru yönleri ^{farklı} iki metod kullanılarak bulunabilir:

- (1) Doğru yön, birçok durumda tetkik yoluyla (by inspection) bulunabilir. Örneğin, $\vec{F}_{BC}$ düğüm noktasına bastırmak zorundadır, çünkü bu kuvvetin yatay bileşeni $F_{BC} \sin 45$ 500 N'luk yatay kuvveti dengelemek zorundadır ($\sum F_x = 0$). Benzer şekilde $\vec{F}_{BA}$ çekme kuvveti olmak zorundadır, çünkü $\vec{F}_{BC}$ 'nin dikey bileşeni olan $F_{BC} \cos 45$ şiddetindeki kuvveti dengelemek zorundadır ($\sum F_y = 0$).
- Daha karmaşık durumlarda, bilinmeyen kuvvetlerin yönleri kabul edilebilir, denge denklemleri uygulandığında çıkan sonuçta göre yönlerin doğru olup olmadığı ortaya çıkar.

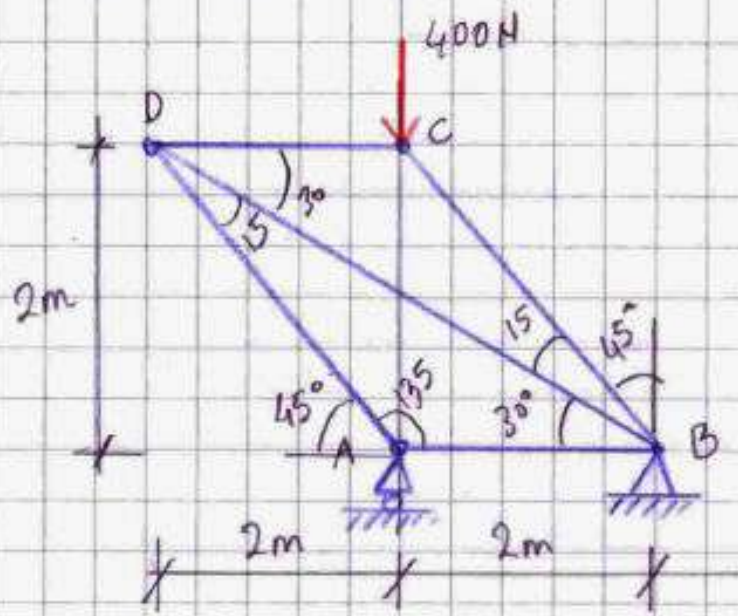


(2) Düğüm noktasına etkiyen bilinmeyen kuvvetlerin hepsini serbest cisim diyagramında çekme durumunda gösteriniz. Denge denklemleri sırasında, sayısal çözüm (+) çıkarsa, o eleman çekme, (-) çıkarsa o eleman basma kuvvetleri altındadır. Bilinmeyen katışık eleman kuvvetlerinin şiddetleri ve ^{doğru} yönleri bulunduğundan sonra doğru yönler kullanılarak, diğer düğüm noktalarının serbest cisim diyagramında kullanılır.

Örnek:



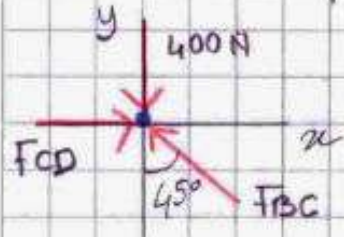
Kafes sistemin eleman kuvvetlerini bulunuz, çekme ve basınç elemanlarını gösteriniz.



Kafes sistemin eleman kuvvetlerini bulunuz, ve çekme ve basınç elemanlarını gösteriniz.

C düğüm noktasında bir bilinen, iki de bilinmeyen kuvvet olduğundan, buradan başlamak mümkündür, daha sonra D nok. ve A nok. geçmek mümkündür, böylece A ve B nok. mesnet kuvvetlerini ayrıca bulmaya gerek kalmaz!

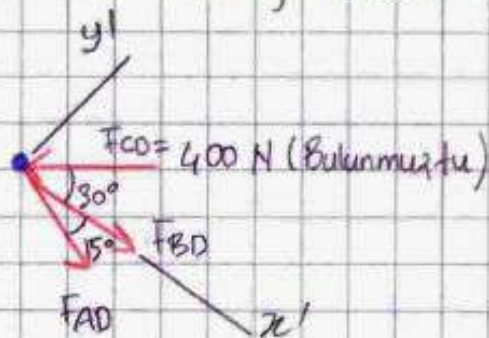
C noktası : (Inspector Yolu ile serbest cisim diyagramı çizildi)



$$\uparrow \sum F_y = 0 ; -F_{BC} \cos 45 - 400 = 0 \quad F_{BC} = 565.69 \text{ N (Basıncı)}$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0 ; F_{CD} - F_{BC} \sin 45 = 0 \quad F_{CD} = 400 \text{ N (Basıncı)}$$

D noktası : (serbest cisim diyagramı, bilinmeyen kuvvetlerin eyleme kuvveti olduğu kabulü yapılarak çizildi)



$\left. \begin{array}{l} x' \text{ ve } y' \text{ koordinatları} \\ \text{bu şekilde seçildi, başka türlü de seçilebilirdi} \\ \text{Bu şekilde } F_{AD} \text{ direkt olarak bulunabilir.} \end{array} \right\}$

$$\uparrow \sum F_{y'} = 0 \quad -F_{AD} \sin 15 - 400 \sin 30 = 0$$

$$F_{AD} = -772.74 \text{ N} = 772.74 \text{ (Basıncı)}$$

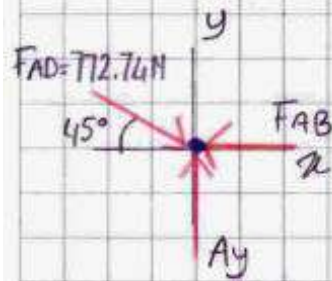
negatif, zıt yönün doğru olduğunu gösterir, eyleme değil basıncı, çekme.



$\downarrow \sum F_x = 0$, $F_{BD} + (-772.74 \cos 15) - 400 \cos 30 = 0$ ↗ doğru yönde kullanıldı.

$F_{BD} = 1092.82 \text{ N (tension)}$

A noktası: (inspector yoluyla çizilebilir)



$\rightarrow \sum F_x = 0$; $(772.74) \cos 45 - F_{AB} = 0$

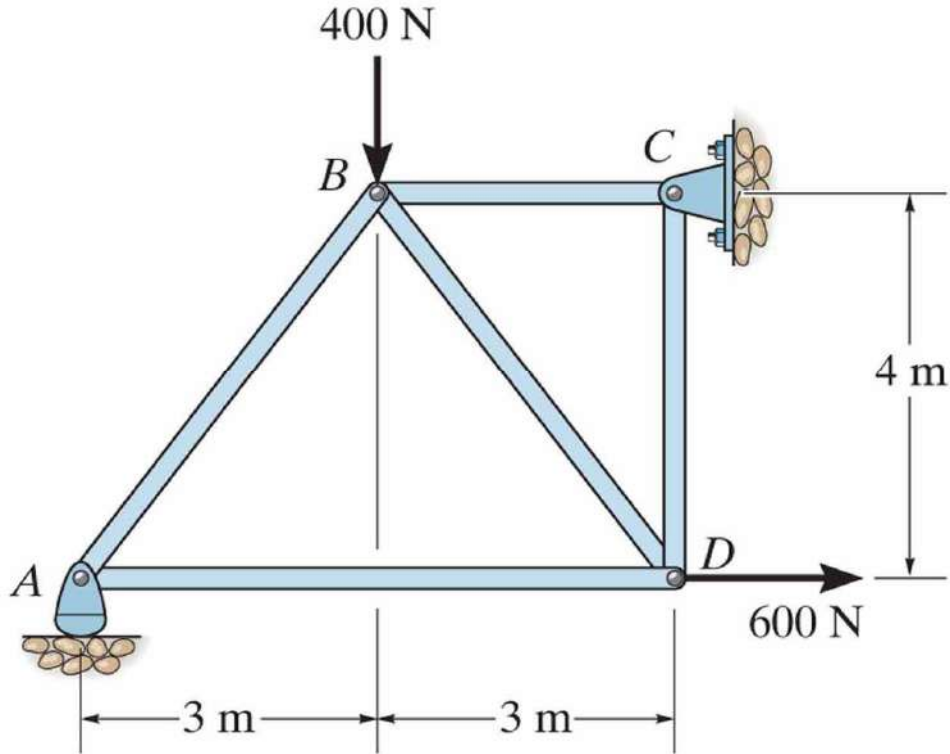
$F_{AB} = 546.41 \text{ (Compression)}$

$\uparrow \sum F_y = 0$; $-772.74 \sin 45 + A_y = 0$

$A_y = 546.41 \text{ (Yön doğru)}$

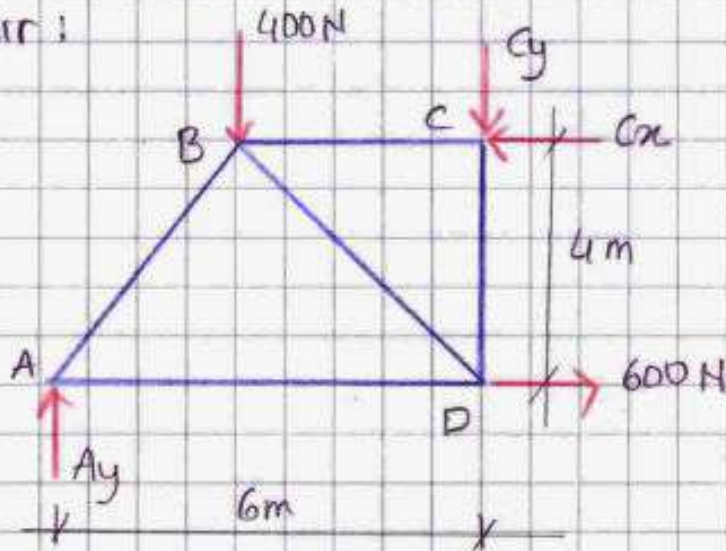
B noktasının serbest cisim diyagramından ve denge denklemleri kullanarak B mesnedinin reaksiyon kuvvetleri bulunabilir. Dikkat edilirse B noktasına (düğüm nok.) bağlanan tüm üçlü kuvvetleri artık biliniyor.

ÇÖZÜMLÜ ÖDEV



Çubuk kuvvetlerini bulunuz ve
çekme mi, basınç mı oldukla-
rını gösteriniz.

Dikkat edilirse, her bir kafes eleman / çubuk eleman mesnet kuvvetleri bulunmadan çözülememektedir! Bu durumda ilk önce mesnet kuvvetleri bulunmak zorundadır. Bunun için kafes sistemin serbest cisim diyagramı çizilmelidir:



$$\rightarrow \sum F_x = 0; \quad 600 - C_x = 0 \quad C_x = 600 \text{ N} \quad (\leftarrow)$$

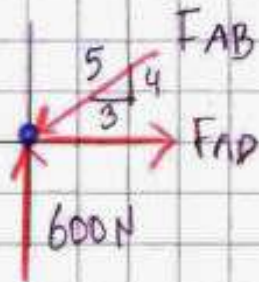
$$+\downarrow \sum M_C = 0; \quad -A_y(6) + 400(3) + 600(4) = 0$$

$$A_y = 600 \text{ N} \quad (\uparrow)$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad 600 - 400 - C_y = 0; \quad C_y = 200 \text{ N} \quad (\downarrow)$$

Artık bu kuvvet bilindiğine göre, A veya C noktalarından bağlanarak sistem çözülebilir:

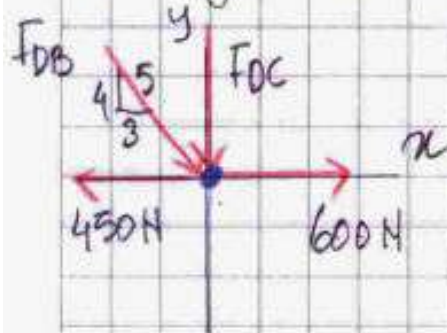
A Dugum Noktası: (inspector yoluyla, yönler tayin edildi)



$$\uparrow \sum F_y = 0; \quad 600 - F_{AB} \left(\frac{4}{5} \right) = 0 \quad F_{AB} = 750 \text{ N (Borina)} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \sum F_x = 0; \quad F_{AD} - F_{AB} \left(\frac{3}{5} \right) = 0 \quad F_{AD} = 450 \text{ N (Gekme)}$$

Bilmeyen kuvvetler
D Dugum Noktası: Yönleri borina olarak kabul edilerek robot cism diyagramında gösterildi

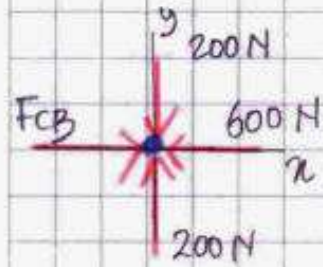


$$\rightarrow \sum F_x = 0; \quad -450 + 600 + F_{DB} \left(\frac{3}{5} \right) = 0$$

$$F_{DB} = -250 \text{ N} = 250 \text{ N (Gekme)}$$

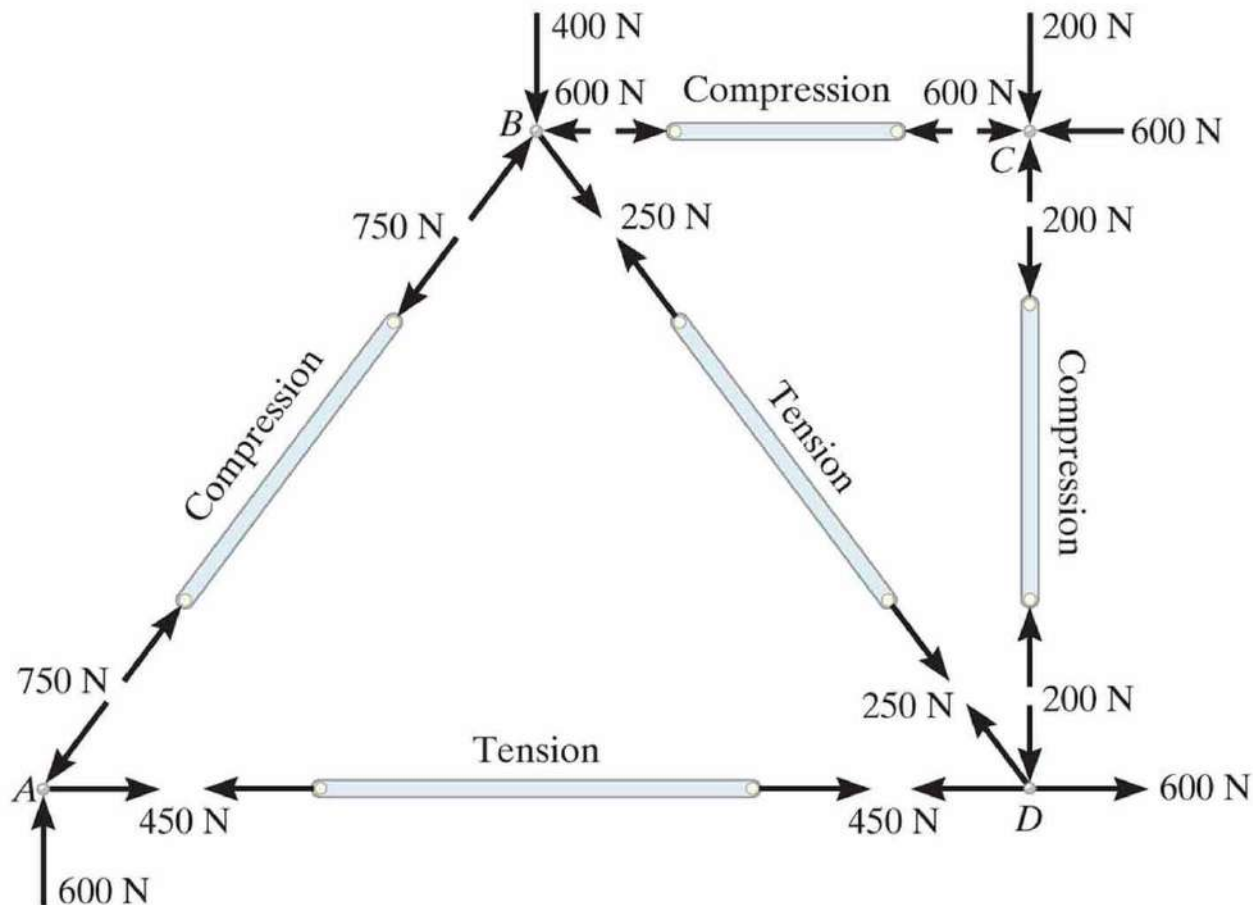
$$\uparrow \sum F_y = 0; \quad -F_{DC} - (-250) \left(\frac{4}{5} \right) = 0 \quad F_{DC} = 200 \text{ N (Borina)}$$

C Düzüm Noktası: Bilinmeyen tek kuvvet F_{CB} 'dir.



$$\rightarrow \sum F_x = 0; \quad F_{CB} - 600 = 0 \quad F_{CB} = 600 \text{ N (Boruna)}$$

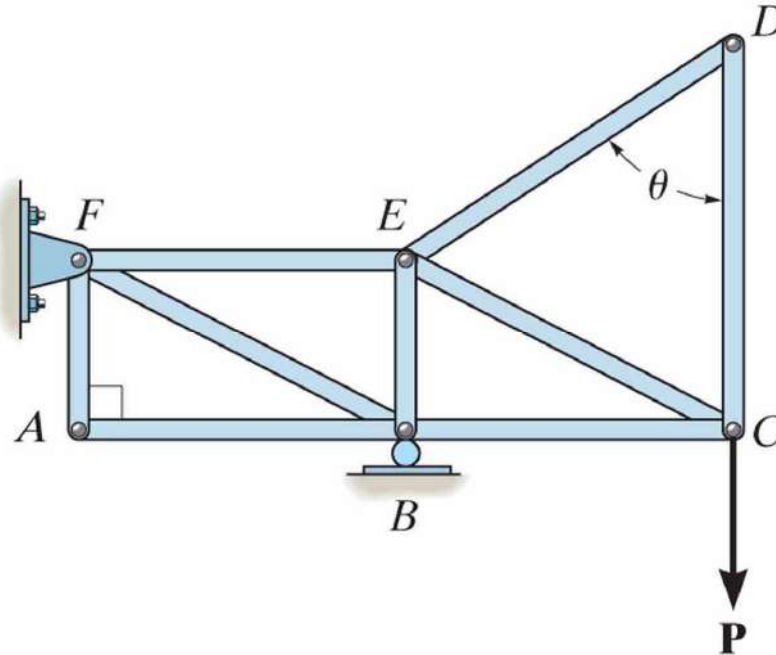
$$\uparrow \sum F_y = 0; \quad 200 \text{ N} - 200 \text{ N} = 0 \quad (\text{kontrol işlemi})$$



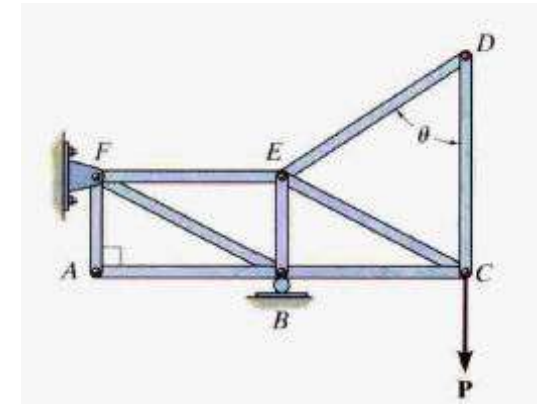
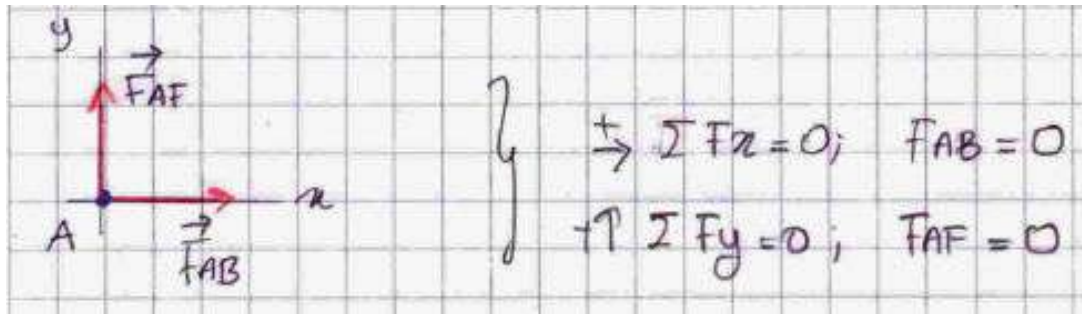
SIFIR KUVVET ELEMANLARI

Düğüm metoduyla kafes analizi kuvvet taşımayan kafes elemanlarının tespitiyile oldukça kolaydır. Bu sıfır-kuvvet elemanlar kafesin inşaatı sırasında stabiliteyi arttırmak için ve yüklenmelerin değişmesi durumunda ek destek olmaktadır.

Sıfır-kuvvet elemanları genellikle tekille bulunabilmektedir:

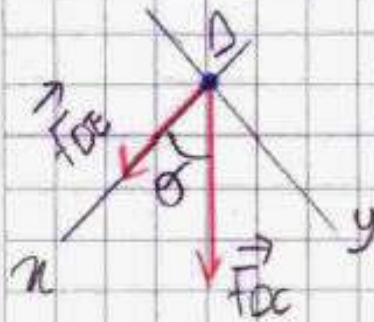


A Noktası:



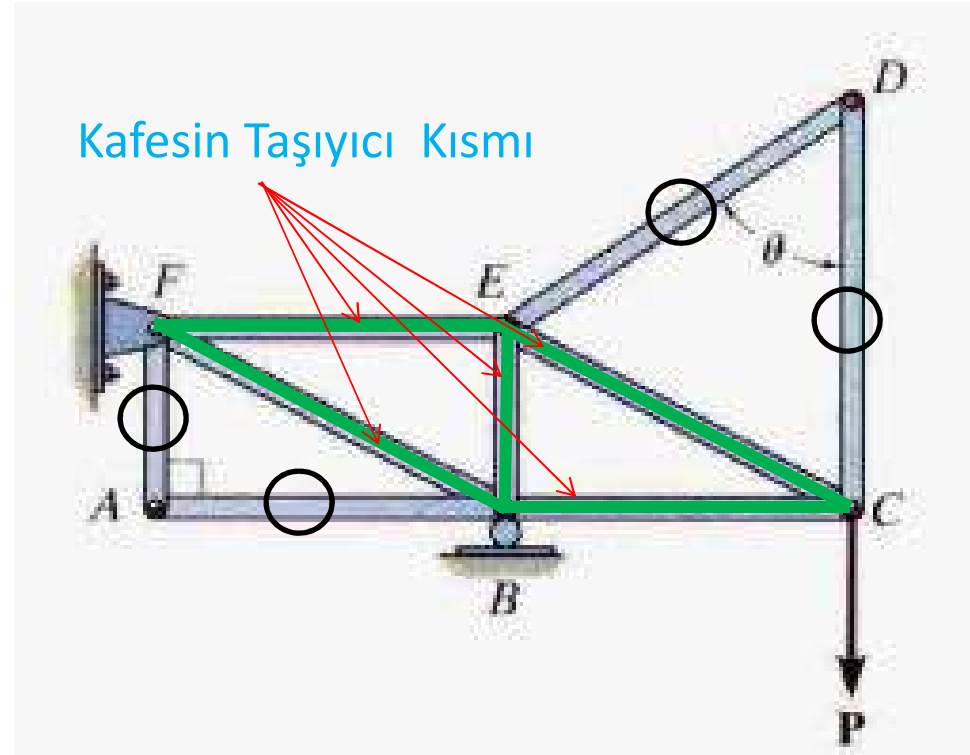
Dikkat edilirse, bu sonucu F veya B dögümbrinden hesaplılsaydı direkt olarak ulaşılacaktı.

Beraber zekilde D dögüm noktesinin zerkent cisim diyagramını çizelim:

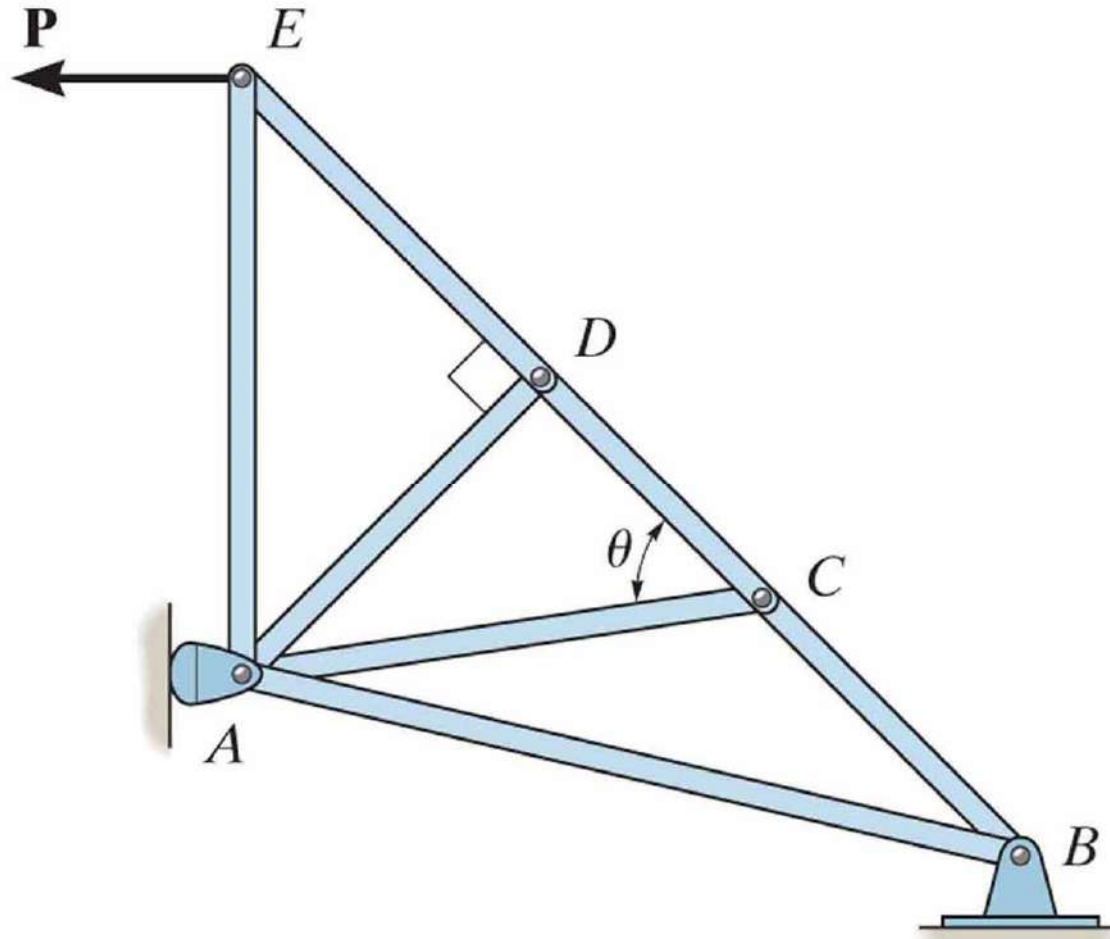


$$\left. \begin{array}{l} \downarrow \sum F_y = 0; \quad F_{DC} \sin \theta = 0 \Rightarrow F_{DC} = 0 \quad (\sin \theta \neq 0) \\ \leftarrow \sum F_x = 0; \quad F_{DE} + 0 = 0 \Rightarrow F_{DE} = 0 \end{array} \right\}$$

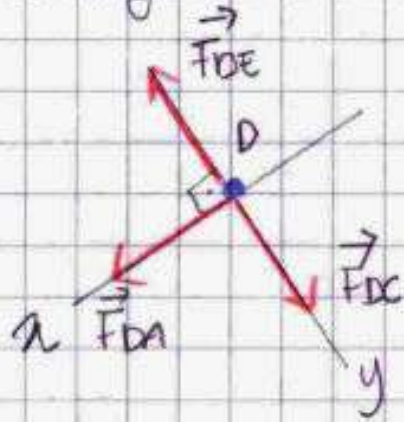
Bu görünümlerden Őu sonua varılabilir: eğer sadece iki kafes elemanı bir dıgm noktasında birleriorsa ve aynı noktaya bir dış kuvvet veya mesnet kuvveti etkimiyorsa, bu iki kafes elemanı sıfır-kuvvet elemanı olmak zorundadır. Bu durumda, kuvvet taşıyan kafes sistem aşağıda verilmiştir.



Şimdi bir başka durumu inceleyelim. Aşağıda gösterilen kafes sistemi ele alalım:



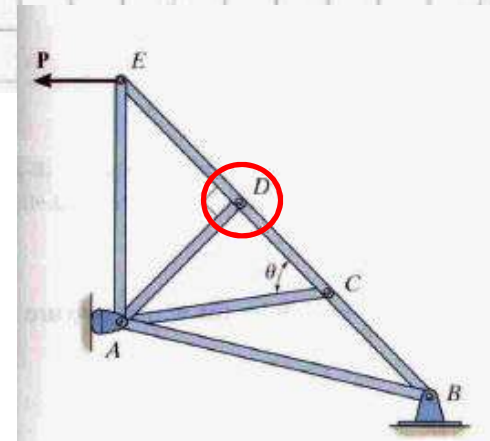
D düğüm noktasının serbest cisim diyagramına bakalım:



y eksenini DC ve DE elemanları doğrultusunda, x eksenini ise DA elemanı doğrultusunda yerleştirilirse DA elemanının sıfır-elemanı olduğu görülür.

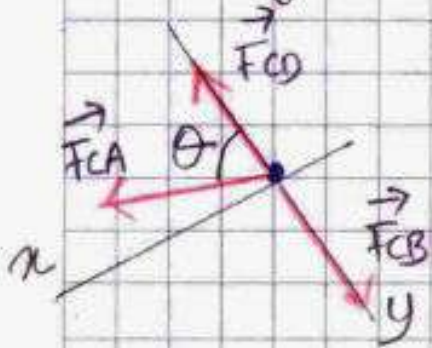
$$\downarrow \sum F_x = 0 ; F_{DA} = 0$$

$$\downarrow \sum F_y = 0, F_{DC} = F_{DE} \text{ olarak bulunur.}$$



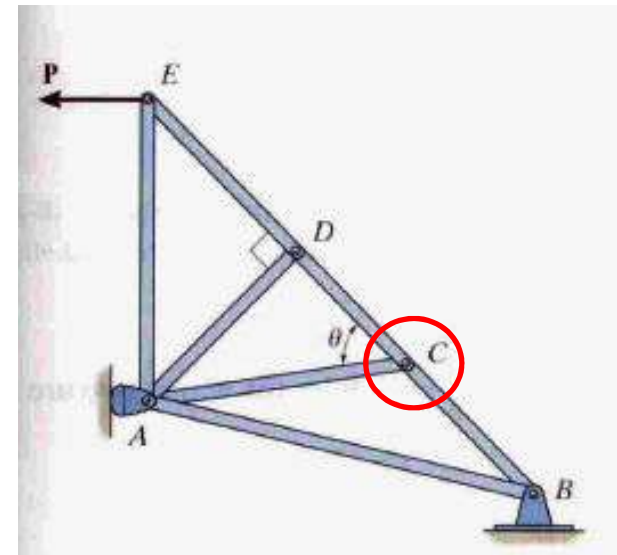
Aynı durum CA elemanı için de geçerlidir:

C düğüm noktasının serbest cisim diyagramı,



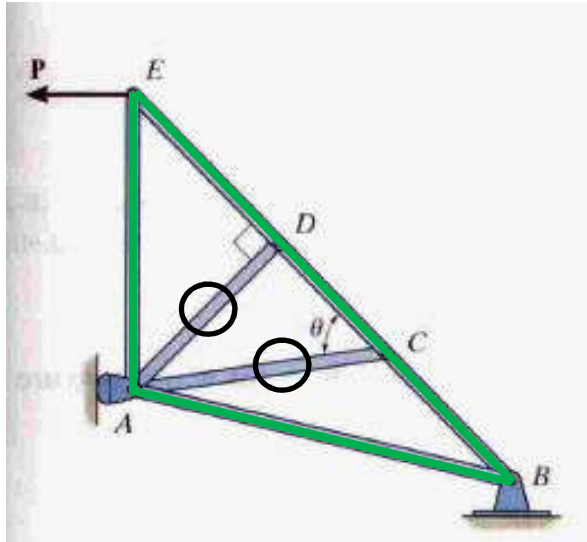
$$\uparrow \sum F_x = 0 ; F_{CA} \sin \theta = 0 , F_{CA} = 0 (\sin \theta \neq 0)$$

$$\downarrow \sum F_y = 0 ; F_{CB} = F_{CD}$$

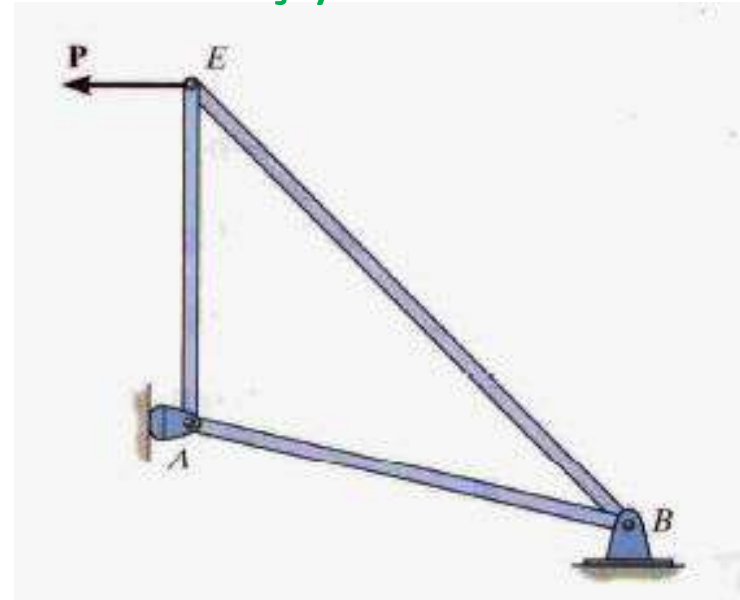


Yukarıdaki gözlemlere dayanarak, şu sonucu çıkarmak mümkün: eğer üç kafes elemanı bir düğüm noktasında birleşiyorsa ve bu üç eleman-
dan ikisi aynı doğrultuda ise (collinear), üçüncü eleman sıfır-kuvvet
elemanıdır; bunun geçerli olması için düğüm noktasına dış kuvvet etkiye-
mesi ve moment reaksiyonları olmaması gerekmektedir. Bu durumda taşıyıcı
kafes sistemi aşağıda gösterilmiştir:

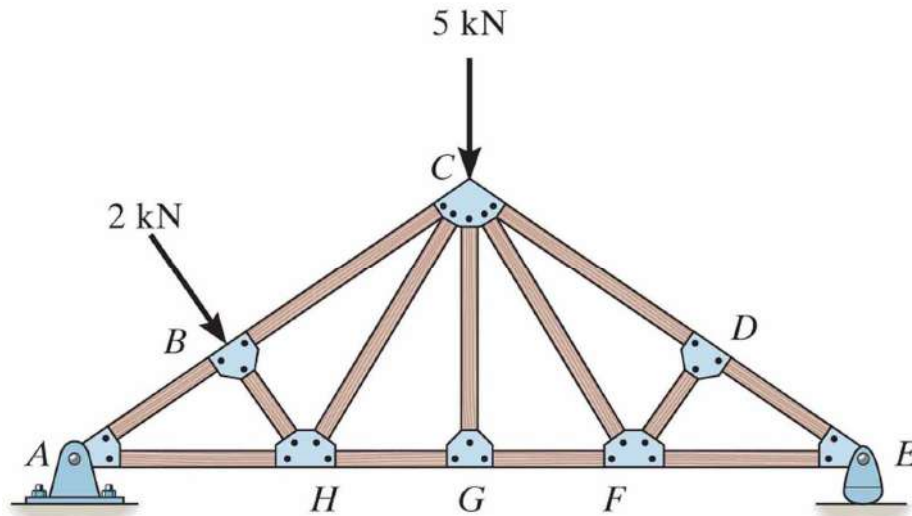
Original Kafes



Taşıyıcı Kafes

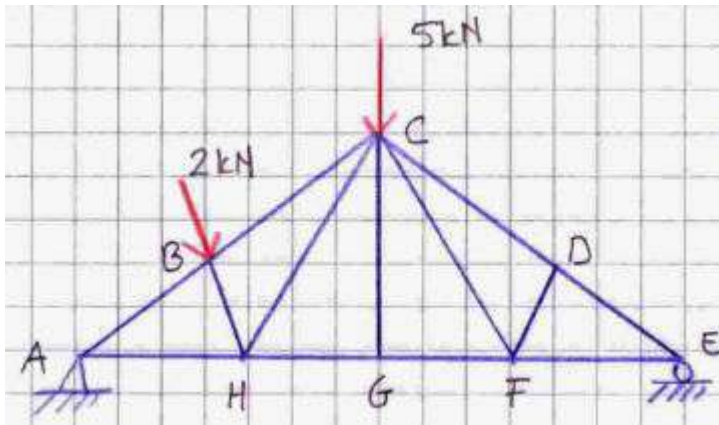


Örnek:

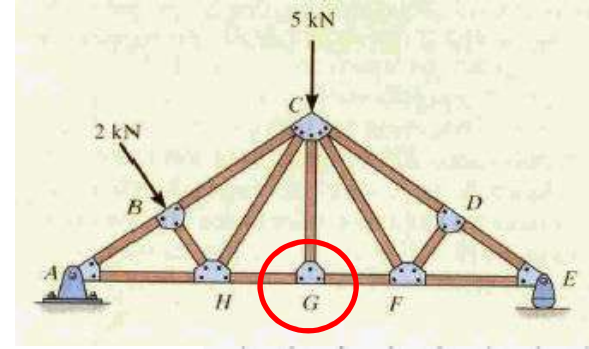


Tüm düğüm noktalarının mafsallı
birbirine olduğu kabulü altında,
şekilde gösterilen Tink kafesinin
tüm sıfır-kuvvet elemanlarını
bulunuz.

Pg: 112



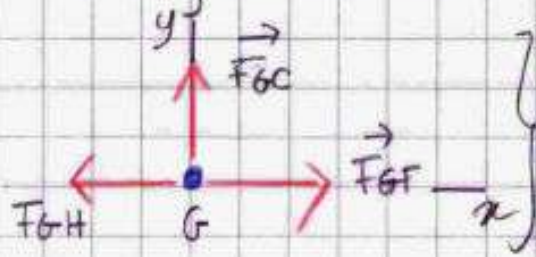
İdealize edilmiş model!



itisi aynı doğrultuda olan

Yük aubuk elemanların oluşturdugu düğüm noktalarına bakalım:

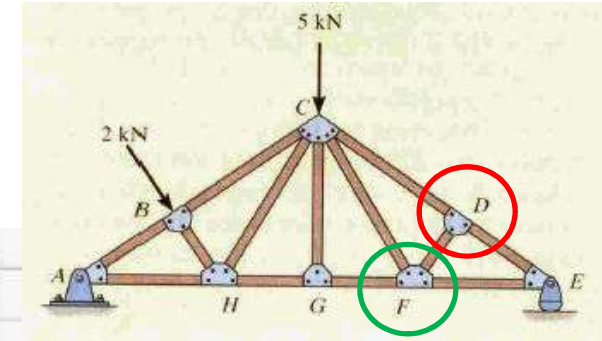
G düğüm noktası:



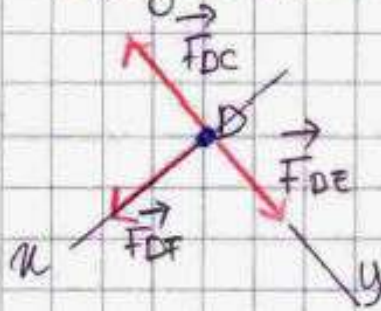
Dış kuvvet etkilememekte, bu durumda $\vec{F}_{GC}$ sıfır olmak zorundadır!

$$\uparrow \sum F_y = 0 ; F_{GC} = 0$$

Dikkat edilirse G noktasından başlayarak bu sonucu direkt ulaşılmazdı.



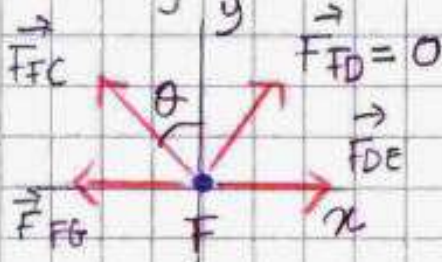
D düğüm noktası:



Yukarıdaki nedenden dolayı, F_{DF} sıfır-küvet elemanıdır:

$$+\circlearrowleft \sum F_x = 0; \quad F_{DF} = 0$$

F düğüm noktası:



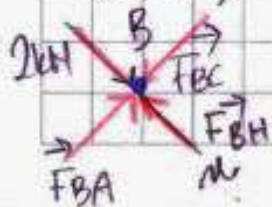
$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad F_{FC} \cos \theta - 0 = 0 \quad F_{FC} = 0$$

NOT: y)

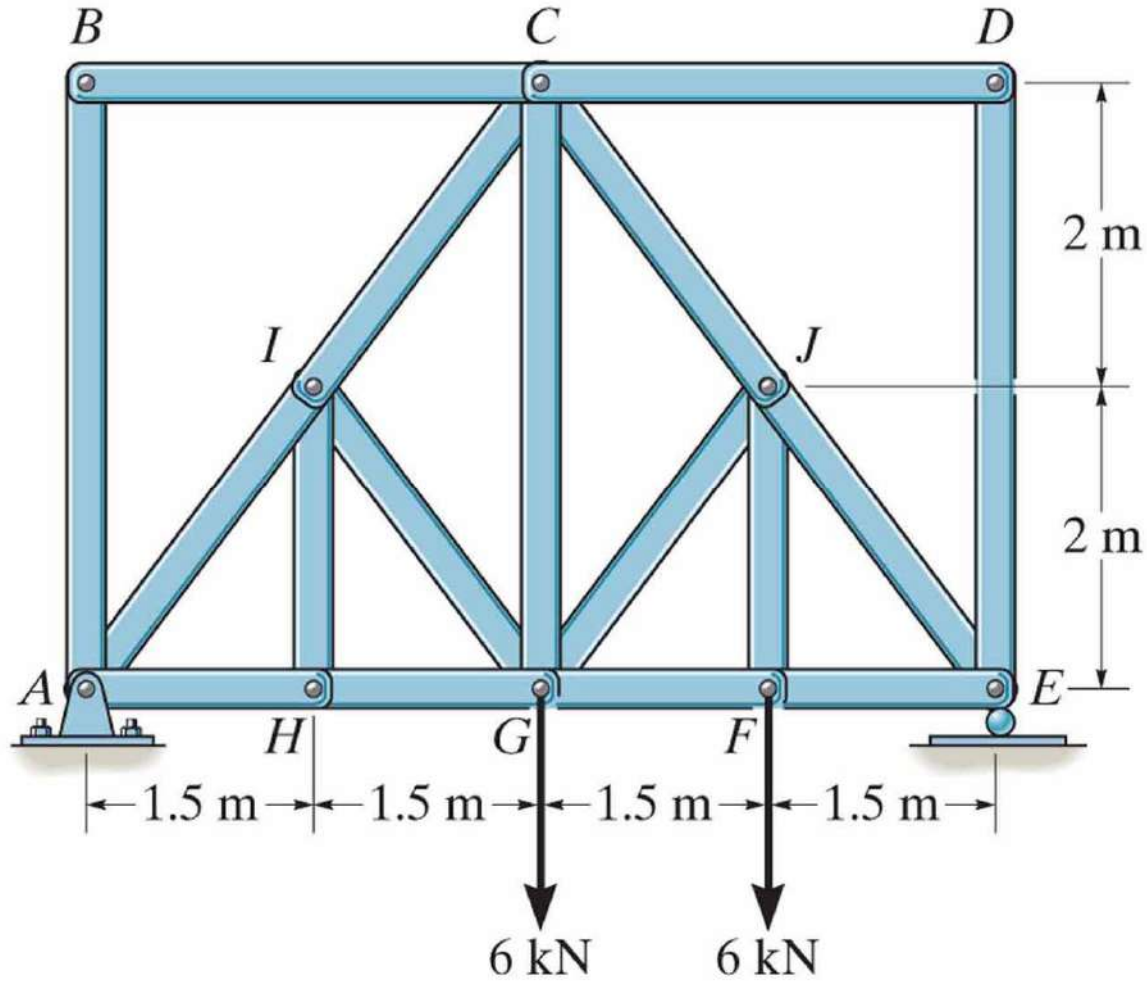
$F_{BH} = 2 \text{ kN}$ (Basınç)

$\downarrow \sum F_x = 0$ 'den bulunur. Bu durumda

F_{HC} 'nin sıfır-küvet elemanı olmadığı görülür.



Örnek:

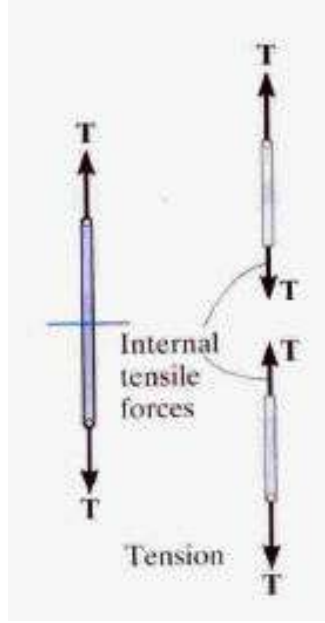


JF ve GF çubuklarındaki kuvvetleri bulunuz ve sıfır kuvvet çubuklarını gösteriniz.

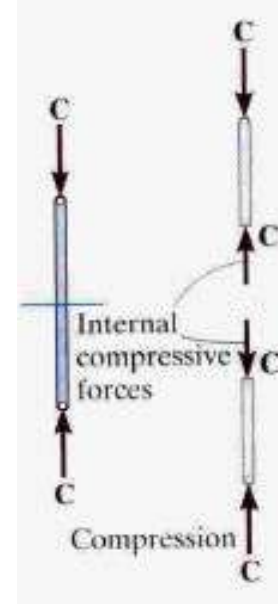
Kesit Metodu: (Method of sections)

Bir kafes sistemi analiz ederken, bazen sadece bazı elemanların kuvvetlerini bulmamız gerekebilir. Bu durumda kesit metodu kullanılır. Kesit metodu şu prensibe dayanır: eğer kafes sistem dengedeyse, kafesin herhangi bir bölümü/segmenti de dengede olmak zorundadır.

Örneğin; aşağıda gösterilen iki tane/çubuk elemanı dikkate alalım:



Çekme Çubuğu



Basınç Çubuğu

Elemanlarda oluşan iç kuvvetler bulunmak istendiğinde, sonal/imaginer bir kesitten eleman ikiye ayrılır (maxi çizgi), böylece eleman iç kuvvetleri ortaya çıkarılır. Artık bu iç kuvvetler, kesilmiş olan parçaların zorbent cisim diyagramında dış kuvvet olarak gösterilir. Dikkat edilirse, denge zorunluluğu iç kuvvetlerin yönünde belirlemektedir.

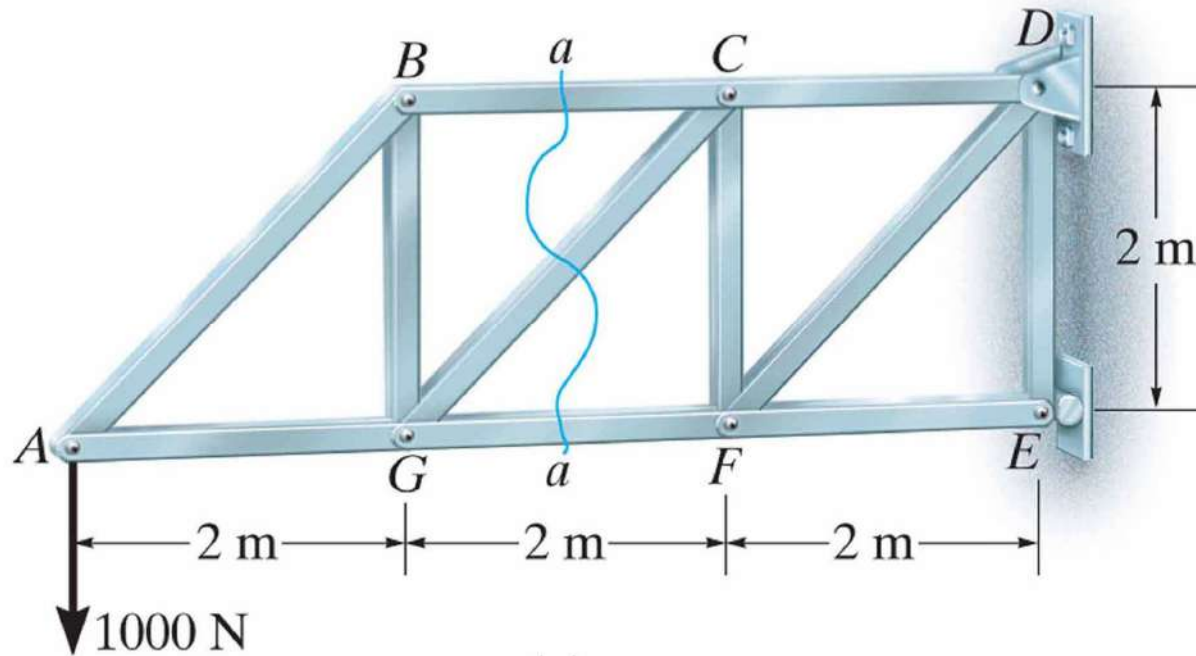
Kesit metodu bir kafes sistemin elemanlarını kesmek için kullanılabilir.

Böylece kesilen elemanların iç kuvvetleri ortaya çıkar, ve bu kuvvetler denge denklemleri kullanılarak bulunabilir. Denge denklemleri bağımsız

sadece üç denklemden oluştuğu için ($\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, $\sum M_o = 0$),

kafesi kestığımız yerde eleman kuvvetlerini bilmediğimiz maksimum üç eleman olmak zorundadır.

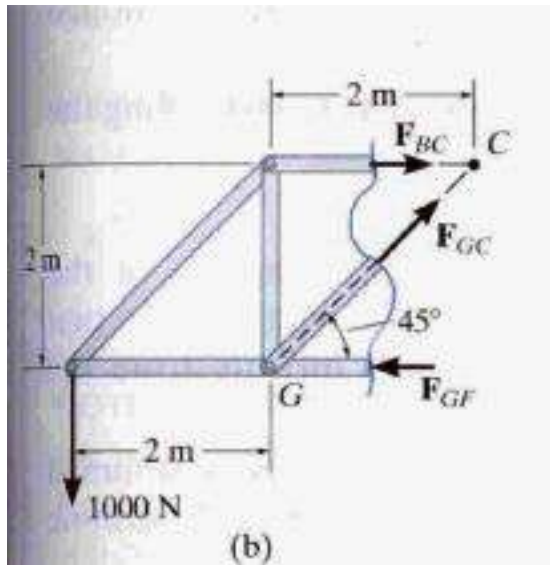
Örneğin aşağıda verilen kafesi düşünelim:



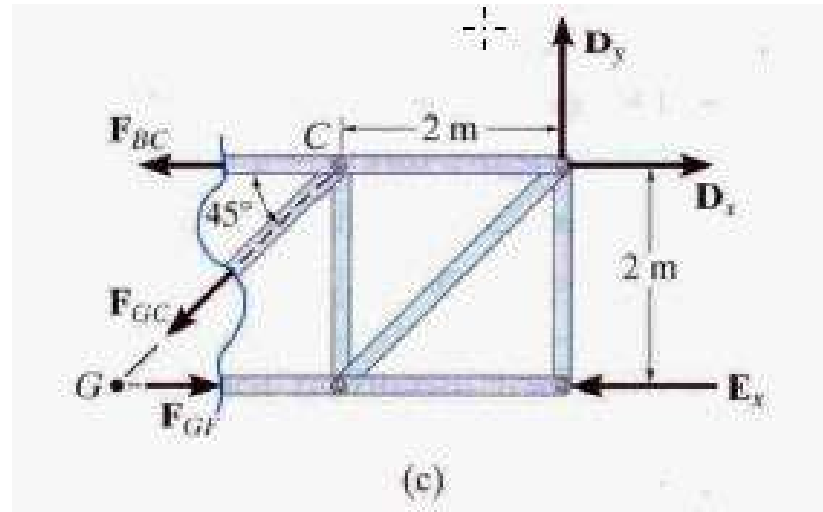
Eğer eleman kuvvetleri BC , GC ve GF bulunmak isteniyorsa a-a kesiti uygun bir kesit olmaktadır.

Kesitin solunda ve sağında kalan kısımlarının serbest cisim diyagramı aşağıda verilmiştir:

Sol Taraf

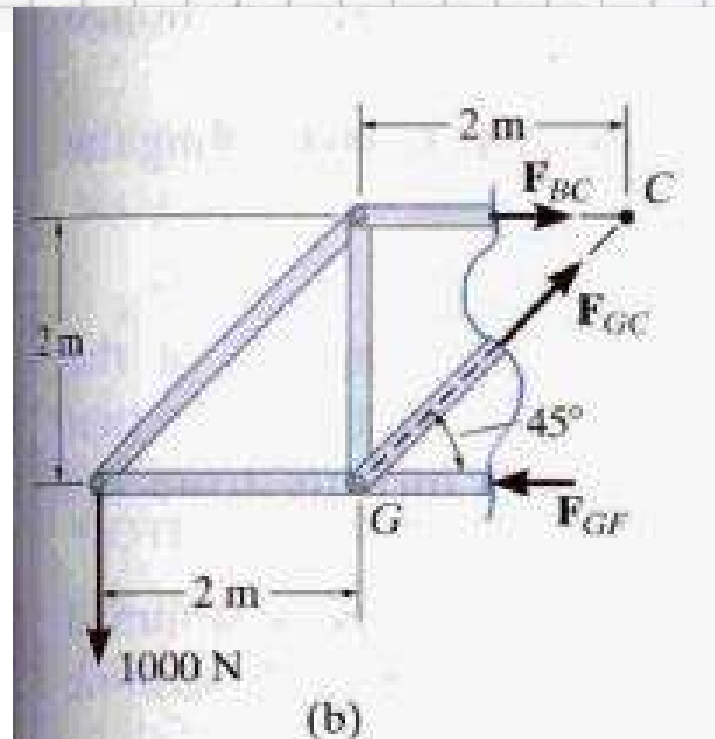


Sağ Taraf

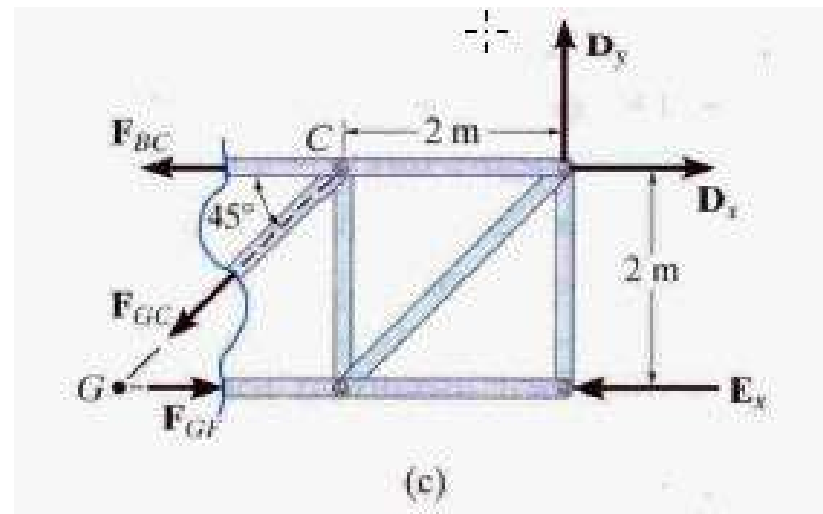
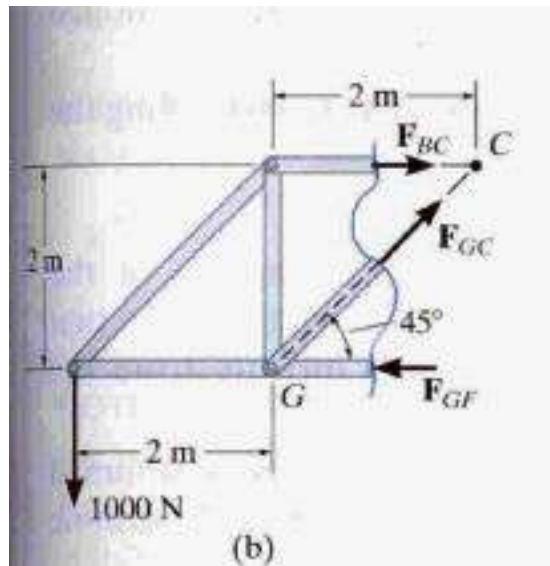


Dikkat edilirse eleman kuvvetlerinin etki arazileri, katesin geometrisinden ortaya çıkmıştır, çünkü kuvvetler eleman eksenleri boyunca olmaktadır.

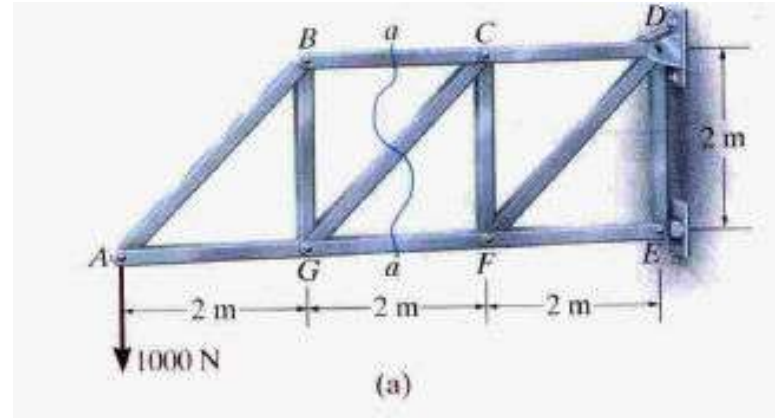
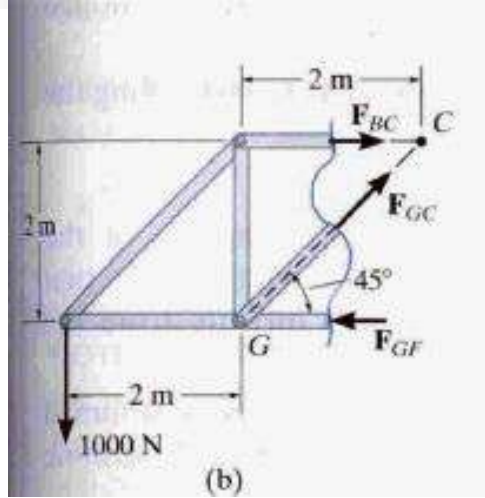
Ayrıca, Newton'un üçüncü yasasından dolayı katesin bir kesitinde ortaya çıkan kuvvetler, diğer kesitte eşit şiddetli ama ters yönlü olarak ortaya çıkar. BC ve GC elemanları gelmeye, GF elemanı ise bacakta kalırmaktadır.



$\vec{F}_{BC}$, $\vec{F}_{GC}$ ve $\vec{F}_{GF}$ bilinmeyen kuvvetleri serbest cisim diyagramları (herhangi biri) kullanılarak bulunabilir. Ancak dikkat edilirse sağda kalan serbest cisim diyagramı kullanılırsa mesnet kuvvetleri $\vec{D}_x$, $\vec{D}_y$ ve $\vec{E}_x$ bilinmek zorundadır, çünkü sadece üç denge denklemi mevcuttur.



Denge denklemleri uygulanırken denklemleri nasıl yazacağımıza dikkatlice düşündükten sonra başlamalıdır. Örneğin;

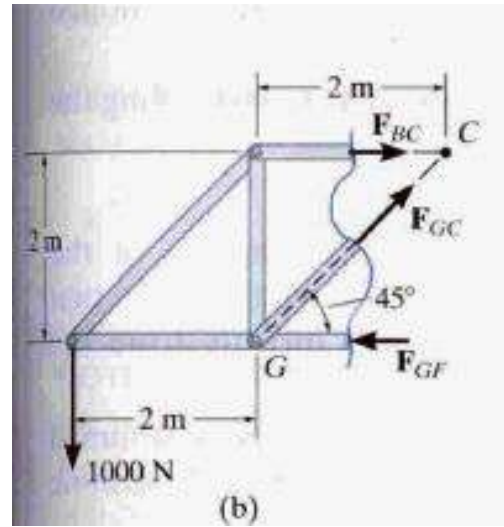


C noktasına göre moment alarak başlarırsa, $\vec{F}_{GF}$ direkt bulunabilir. Böylece birden fazla denklem çözülmek zorunda kalmıyız. Aynı şekilde $\vec{F}_{BC}$ G noktasına göre moment alınarak bulunabilir. $\vec{F}_{GC}$ ise dikey yönde kuvvet dengesi yazılarak bulunur.

Eğer aynı eleman kuvvetleri düğüm noktası metodu ile bulunmak istenseydi, önce A, sonra B, sonra da G düğüm noktalarının denge denklemleri yazılmak zorundaydı.

Düğüm noktası metodunda olduğu gibi, bilinmeyen eleman kuvvetlerinin yönleri iki şekilde bulunur:

(1) Tetkik (inspection) yoluyla. Örneğin;



Burada $\vec{F}_{BC}$ çekme gösterilmiştir, çünkü G noktasına göre moment dengesi 1000 N'luk kuvvetin oluşturduğu moment etkisini dengeleyecek şekilde olması gerekmektedir!..

Aynı şekilde $\vec{F}_{GC}$ cebre gösterilmiştir, ağırlık düzey bileşeni 1000 N'luk dış yükü dengelemek gereklidir.

(2) Kesilen yerdeki elemanların yönlerini her zaman cebre yönünde al.

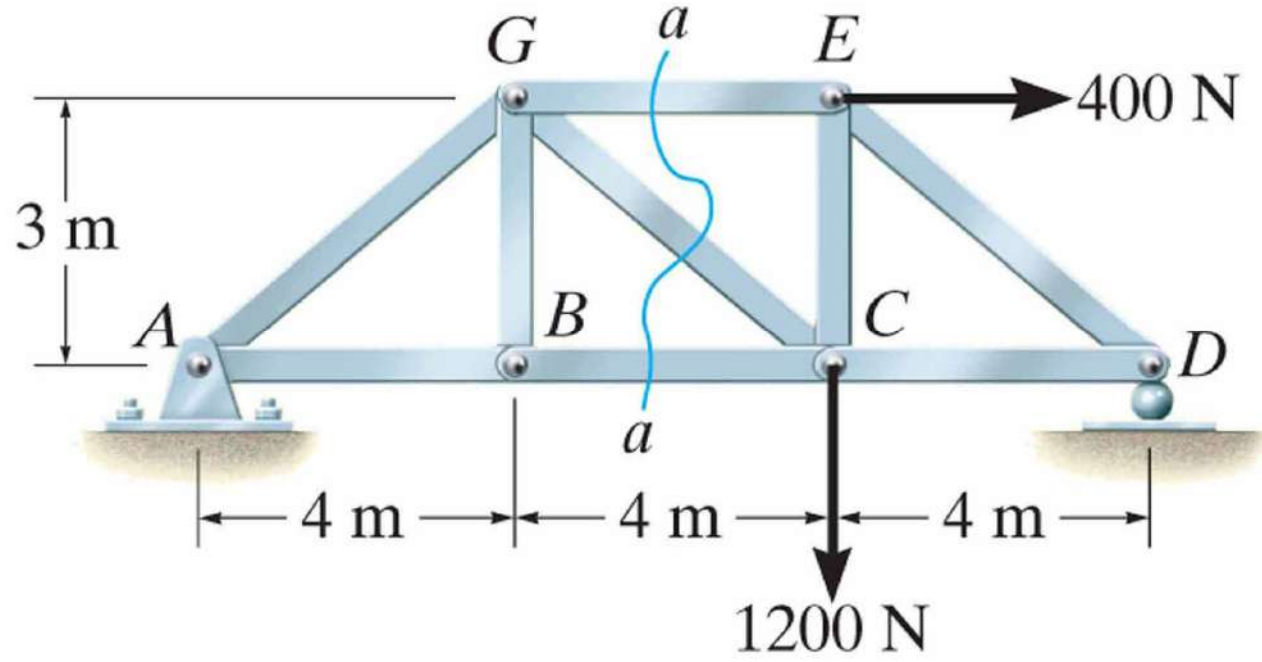
Böylece sayısal ağırlık cebre elemanları için (+), basınç elemanları için (-) sonuç verecektir.

Pratt kafesinin ilgilenilen elemanlarında oluşan iç kuvvetler kesit yöntemi ile rahatlıkla bulunabilir!



unfig06_03.jpg - The forces in selected members of this Pratt truss can readily be determined using the method of sections.

Örnek:

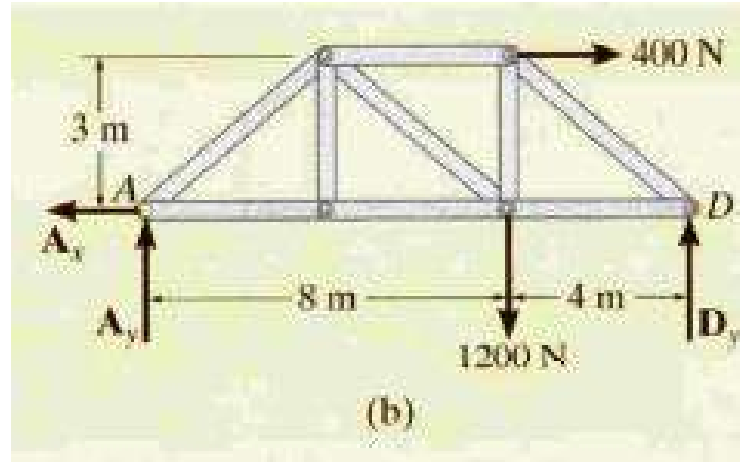


Pg: 116

GE, GC ve BC eleman kuvvetlerini
bulunuz ve çekme mi basınç mı
olduklarını gösteriniz

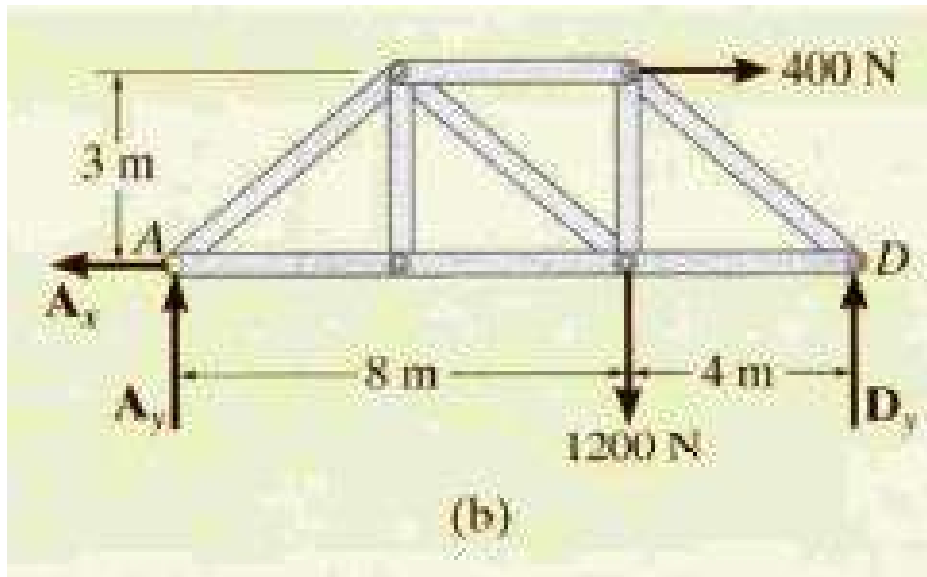
a-a kesiti alındıktan sonra, ilk bilinmeyen eleman kuvveti ve bilinmeyen mesnet kuvvetleri ortaya çıkacaktır. Bu durumda ilk önce tüm sisteme denge denklemleri uygulayarak mesnet tepkilerinin bulunması gerekmektedir.

Tüm sistemin serbest cisim diyagramı:

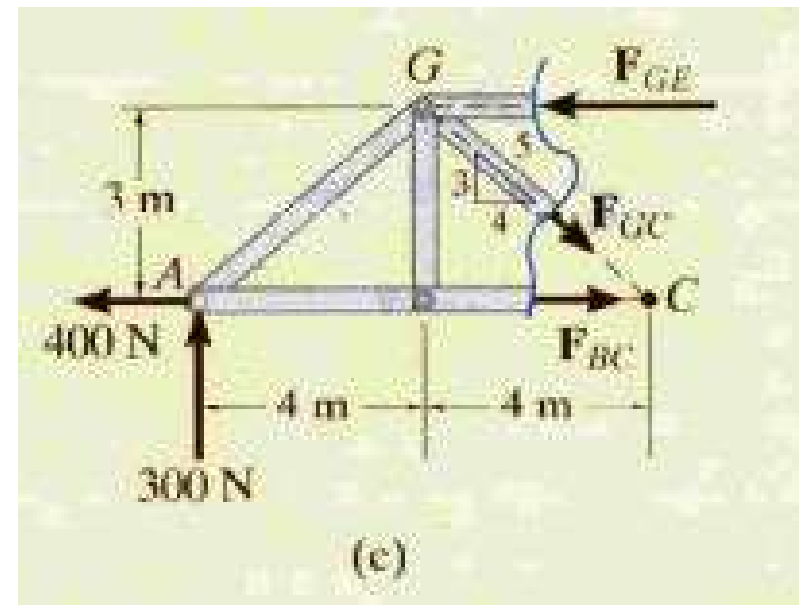


$$\begin{aligned} \rightarrow \sum F_x &= 0 ; & 400 - A_x &= 0 ; & A_x &= 400 \text{ N } (\leftarrow) \\ + \downarrow \sum M_A &= 0 ; & -1200(8) - 400(3) + D_y(12) &= 0 ; & D_y &= 900 \text{ N } (\uparrow) \\ + \uparrow \sum F_y &= 0 ; & A_y - 1200 + 900 &= 0 ; & A_y &= 300 \text{ N } (\uparrow) \end{aligned}$$

Gubuk/eleman kuvvetlerinin analizi için sol taraftaki bölün serb. crs. diyag. kullanılacaktır; çünkü bu kısım en az sayıda ki kuvveti barındırmaktadır;



Sol Taraftaki Kesit



Denge Denklemleri:

G nok. göre moment $\vec{F}_{GE}$ ve $\vec{F}_{GC}$ 'yi yok eder:

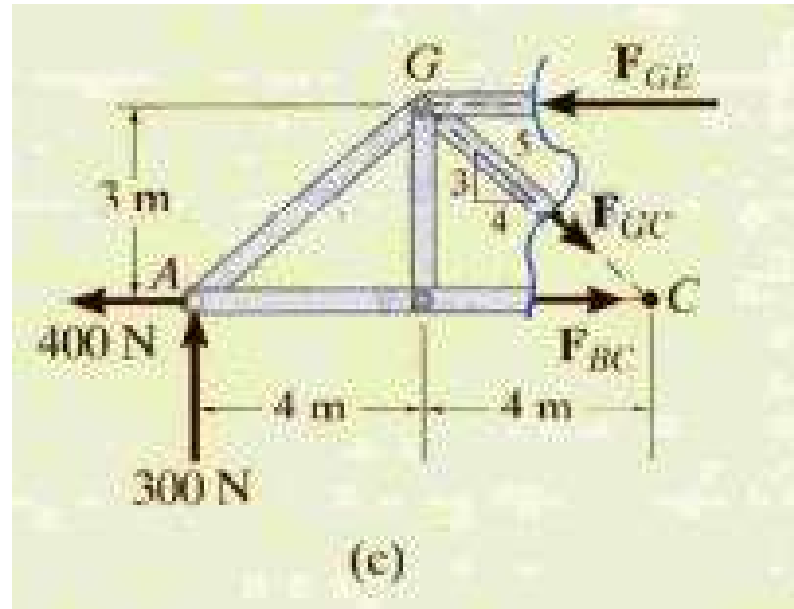
$$\uparrow \sum M_G = 0 ; -300(4) - 400(3) + F_{BC}(3) = 0 ; F_{BC} = 800 \text{ N (Gelmeye)}$$

C nok. göre moment $\vec{F}_{GC}$ ve $\vec{F}_{BC}$ 'yi yok eder:

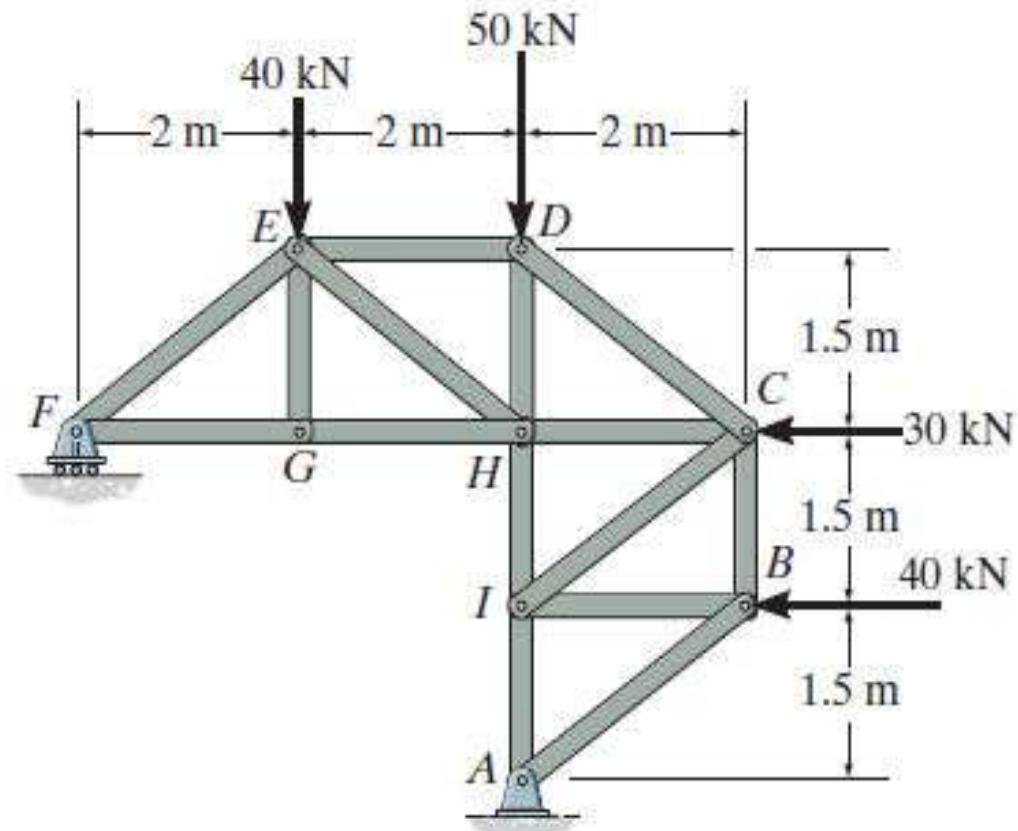
$$\uparrow \sum M_C = 0 ; -300(8) + F_{GE}(3) = 0 ; F_{GE} = 800 \text{ N (Bazılamaya)}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0 ; 300 - \left(\frac{3}{5}\right) F_{GC} = 0 ; F_{GC} = 500 \text{ N (Gelmeye)}$$

NOT: C nok. göre mom. bakarak elemanların yönleri tetkik ydyla tayin edilebilir.



Örnek:



DC, HC ve HI çubuklarındaki kuvvetleri belirleyiniz.

STATİK

BÖLÜM 6. YAPISAL ANALİZ (DÜZLEMDE TAŞIYICI SİSTEMLER)

ÖRNEK SORU ÇÖZÜMLERİ

1. Şekilde gösterilen kafes sistemin her bir elemanındaki kuvveti hesaplayıp, çekme (Tension [T]) ya da basınç (Compression [C]) olduğunu belirtiniz.

ÇÖZÜM:

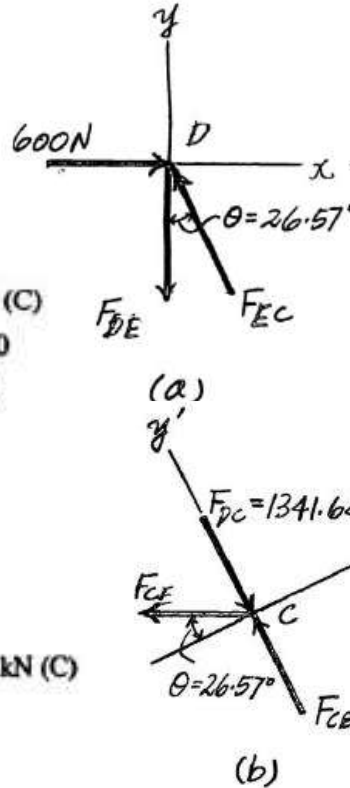
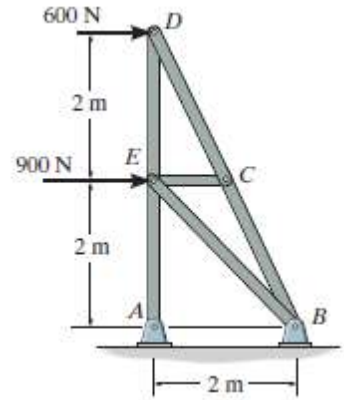
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 26.57^\circ$$

D düğüm noktası

$$\begin{aligned} \rightarrow \Sigma F_x &= 0; & 600 - F_{DC} \sin 26.57^\circ &= 0 \\ & & F_{DC} &= 1341.64 \text{ N} = 1.34 \text{ kN (C)} \\ + \uparrow \Sigma F_y &= 0; & 1341.64 \cos 26.57^\circ - F_{DE} &= 0 \\ & & F_{DE} &= 1200 \text{ N} = 1.20 \text{ kN (T)} \end{aligned}$$

C düğüm noktası

$$\begin{aligned} + \nearrow \Sigma F_{x'} &= 0; & -F_{CE} \cos 26.57^\circ &= 0 \\ & & F_{CE} &= 0 \\ + \searrow \Sigma F_{y'} &= 0; & F_{CB} - 1341.64 &= 0 \\ & & F_{CB} &= 1341.64 \text{ N} = 1.34 \text{ kN (C)} \end{aligned}$$





E düğüm noktası

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0;$$

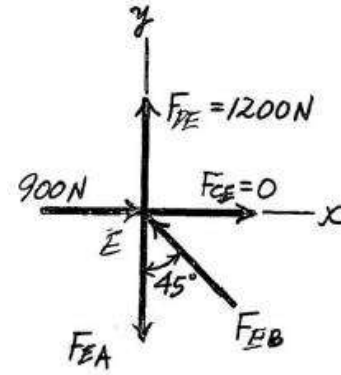
$$900 - F_{EB} \sin 45^\circ = 0$$

$$F_{EB} = 1272.79 \text{ N} = 1.27 \text{ kN (C)}$$

$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0;$$

$$1200 + 1272.79 \cos 45^\circ - F_{EA} = 0$$

$$F_{EA} = 2100 \text{ N} = 2.10 \text{ kN (T)}$$



(C)

2. Şekilde gösterilen kafes sistemin her bir elemanındaki çubuk kuvvetini hesaplayınız. Kuvvetlerin çekme (Tension [T]) mi yoksa basınç (Compression [C]) mı olduğunu belirtiniz. $P_1=2$ kN ve $P_2=1.5$ kN olarak alınız.

ÇÖZÜM:

C düğüm noktası

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad F_{CB} \sin 30^\circ - 1.5 = 0$$

$$F_{CB} = 3.00 \text{ kN (T)}$$

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad F_{CD} - 3.00 \cos 30^\circ = 0$$

$$F_{CD} = 2.598 \text{ kN (C)} = 2.60 \text{ kN (C)}$$

D düğüm noktası

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad F_{DE} - 2.598 = 0 \quad F_{DE} = 2.60 \text{ kN (C)}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad F_{DB} - 2 = 0 \quad F_{DB} = 2.00 \text{ kN (T)}$$

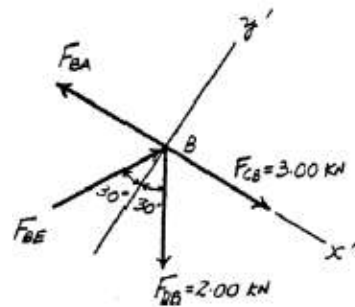
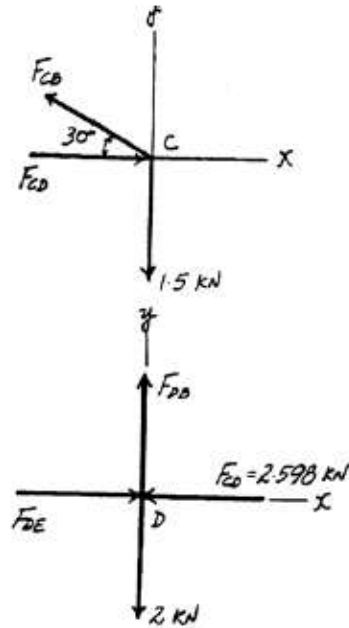
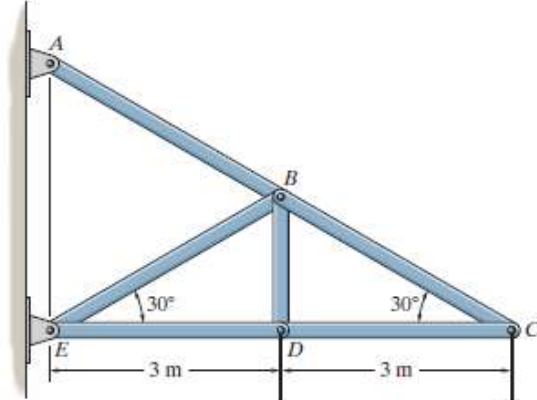
B düğüm noktası

$$+\nearrow \Sigma F_y = 0; \quad F_{BE} \cos 30^\circ - 2.00 \cos 30^\circ = 0$$

$$F_{BE} = 2.00 \text{ kN (C)}$$

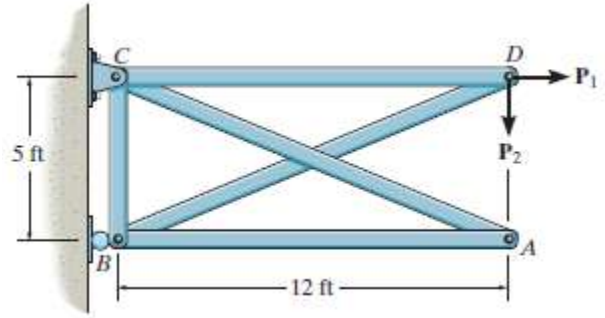
$$+\searrow \Sigma F_x = 0; \quad (2.00 + 2.00) \sin 30^\circ + 3.00 - F_{BA} = 0$$

$$F_{BA} = 5.00 \text{ kN (T)}$$



3. Şekilde gösterilen kafes sistemin her bir elemanındaki çubuk kuvvetini hesaplayınız. Kuvvetlerin çekme (Tension [T]) mi yoksa basınç (Compression [C]) mı olduğunu belirtiniz. $P_1=2$ kN ve $P_2=1.5$ kN olarak alınız.

ÇÖZÜM:



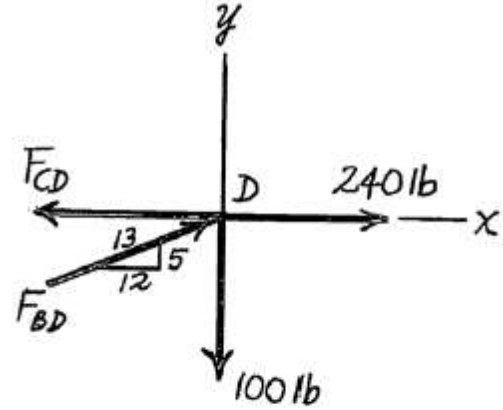
D düğüm noktası

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; F_{BD} \left(\frac{5}{13} \right) - 100 = 0$$

$$F_{BD} = 260 \text{ lb (C)} \quad \text{Ans}$$

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; 240 - F_{CD} + 260 \left(\frac{12}{13} \right) = 0$$

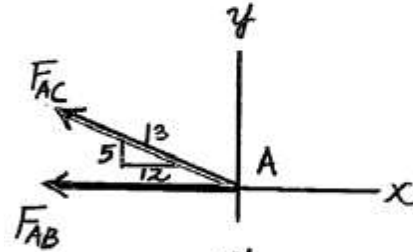
$$F_{CD} = 480 \text{ lb (T)} \quad \text{Ans}$$



A düğüm noktası

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; F_{AC} = 0 \quad \text{Ans}$$

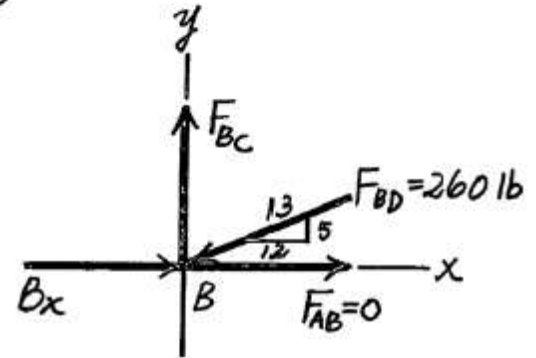
$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; F_{AB} = 0 \quad \text{Ans}$$



B düğüm noktası

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; F_{BC} - 260 \left(\frac{5}{13} \right) = 0$$

$$F_{BC} = 100 \text{ lb (T)} \quad \text{Ans}$$



4. Şekilde gösterilen kafes sistemin her bir elemanındaki çubuk kuvvetini hesaplayınız. Kuvvetlerin çekme mi yoksa basınç mı olduğunu belirtiniz. $P=5$ kN olarak alınız.

ÇÖZÜM:

A düğüm noktası

$$\Sigma F_y' = 0; F_{AD} \sin 73.74^\circ - 5 \sin 53.13^\circ = 0$$

$$F_{AD} = 4.167 \text{ kN} = 4.17 \text{ kN (T)}$$

$$\Sigma F_x' = 0; 4.167 \cos 73.74^\circ + 5 \cos 53.13^\circ - F_{AB} = 0$$

$$F_{AB} = 4.167 \text{ kN} = 4.17 \text{ kN (C)}$$

B düğüm noktası

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; 4.167 \left(\frac{4}{5} \right) - F_{BC} \left(\frac{4}{5} \right) = 0$$

$$F_{BC} = 4.167 \text{ kN} = 4.17 \text{ kN (C)}$$

$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0; F_{BD} - 4.167 \left(\frac{3}{5} \right) - 4.167 \left(\frac{3}{5} \right) = 0$$

$$F_{BD} = 5 \text{ kN (T)}$$

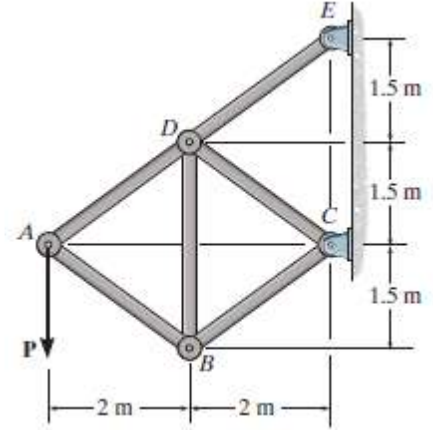
D düğüm noktası

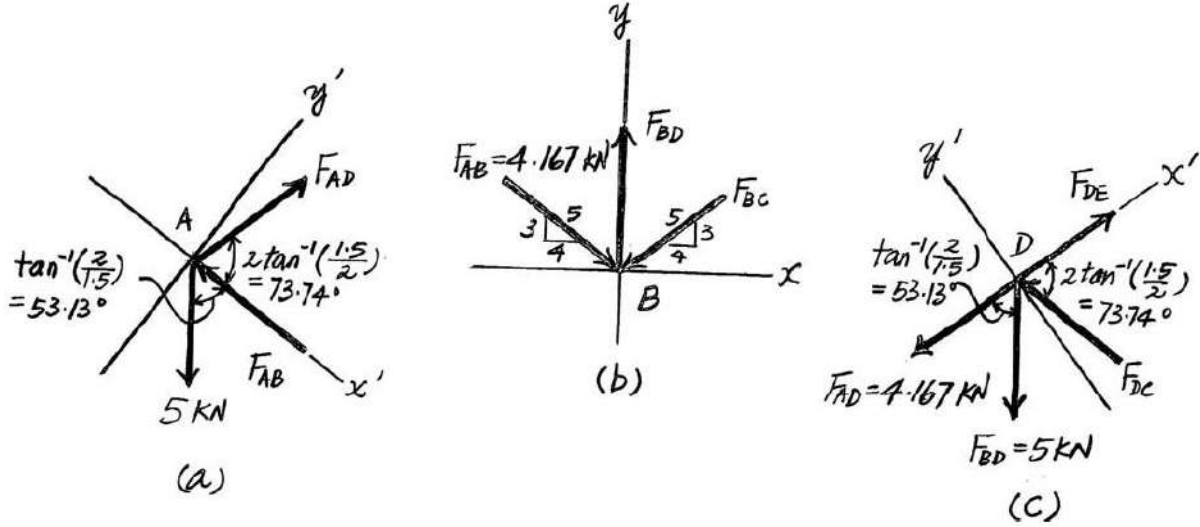
$$+ \nearrow \Sigma F_y' = 0; F_{DC} \sin 73.74^\circ - 5 \sin 53.13^\circ = 0$$

$$F_{DC} = 4.167 \text{ kN} = 4.17 \text{ kN (C)}$$

$$+ \nearrow \Sigma F_x' = 0; F_{DE} - 4.167 - 5 \cos 53.13^\circ - 4.167 \cos 73.74^\circ = 0$$

$$F_{DE} = 8.333 \text{ kN} = 8.33 \text{ kN (T)}$$





5. Şekilde gösterilen kafes sistemin her bir elemanındaki çubuk kuvvetini hesaplayınız. Kuvvetlerin çekme mi yoksa basınç mı olduğunu belirtiniz.

ÇÖZÜM:

$$+\Sigma M_A = 0; \quad N_C(4) - 400(1) - 600(3) = 0$$

$$N_C = 550 \text{ N}$$

Çözümde sıralama: $C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow B$

C düğüm noktası (Şekil b)

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 550 - F_{CD} \sin 45^\circ = 0$$

$$F_{CD} = 777.82 \text{ N} = 778 \text{ N (C)}$$

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad 777.82 \cos 45^\circ - F_{CB} = 0$$

$$F_{CB} = 550 \text{ N (T)}$$

D düğüm noktası (Şekil c)

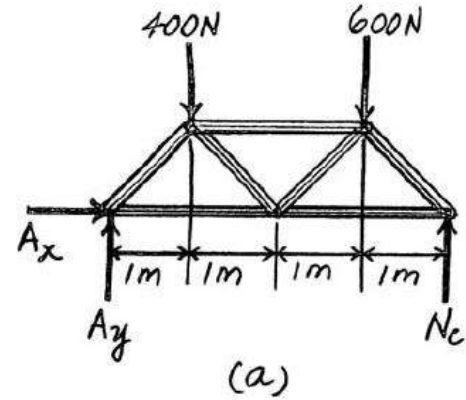
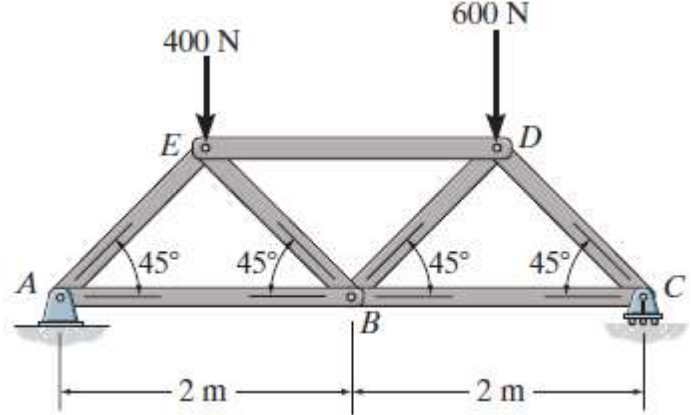
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad F_{DB} \sin 45^\circ + 777.82 \sin 45^\circ - 600 = 0$$

$$F_{DB} = 70.71 \text{ N} = 70.7 \text{ N (C)}$$

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad F_{DE} + 70.71 \cos 45^\circ - 777.82 \cos 45^\circ = 0$$

$$F_{DE} = 500 \text{ N (C)}$$

E düğüm noktası (Şekil d)





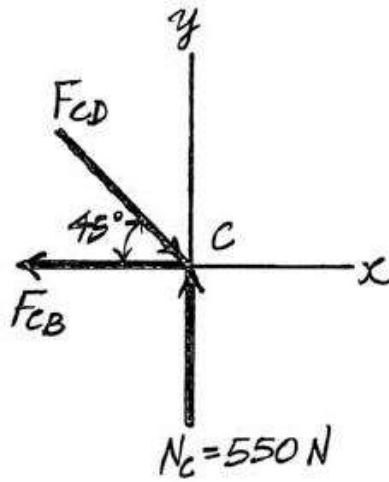
$$\Sigma F_x = 0; \quad F_{EA} - 400 \sin 45^\circ - 500 \sin 45^\circ = 0$$
$$F_{EA} = 636.40 \text{ N} = 636 \text{ N (C)}$$

$$\Sigma F_y = 0; \quad 500 \cos 45^\circ - 400 \cos 45^\circ - F_{EB} = 0$$
$$F_{EB} = 70.71 \text{ N} = 70.7 \text{ N (T)}$$

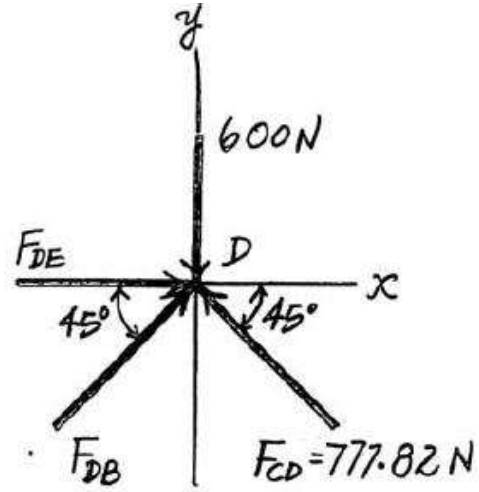
B düğüm noktası (Şekil e)

$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad 550 - 70.71 \cos 45^\circ - 70.71 \cos 45^\circ - F_{BA} = 0$$
$$F_{BA} = 450 \text{ N (T)}$$

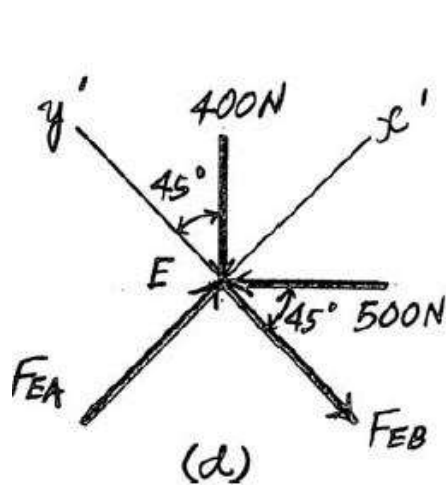
$$+ \uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 70.71 \sin 45^\circ - 70.71 \sin 45^\circ = 0 \quad (\text{check})$$



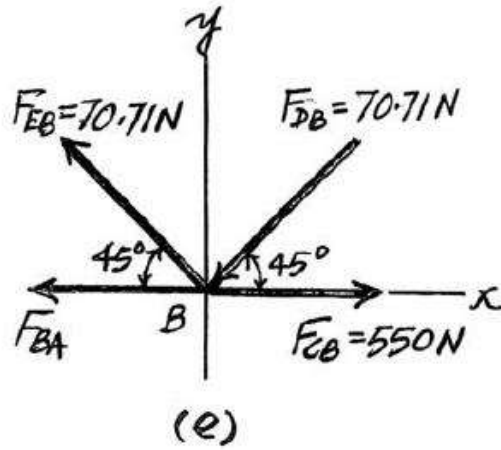
(b)



(c)



(d)



(e)

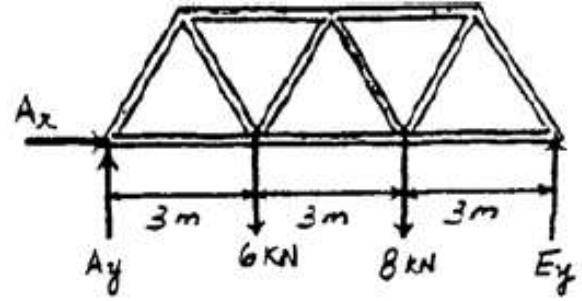
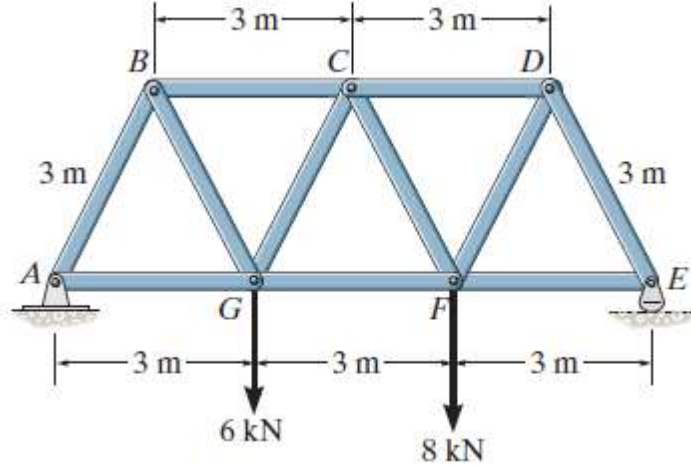
5. Şekilde gösterilen kafes sistemin BC, CG, GF elemanlarındaki çubuk kuvvetini hesaplayınız. Kuvvetlerin çekme mi yoksa basınç mı olduğunu belirtiniz.

ÇÖZÜM:

Mesnet reaksiyonları:

$$(\sum M_E = 0; \quad 6(6) + 8(3) - A_y(9) = 0 \quad A_y = 6.667 \text{ kN}$$

$$(\sum F_x = 0; \quad A_x = 0$$



Çubuk kuvvetleri için kesim yöntemini kullanabiliriz.

$$(\sum M_C = 0; \quad F_{GF}(3 \sin 60^\circ) + 6(1.5) - 6.667(4.5) = 0$$

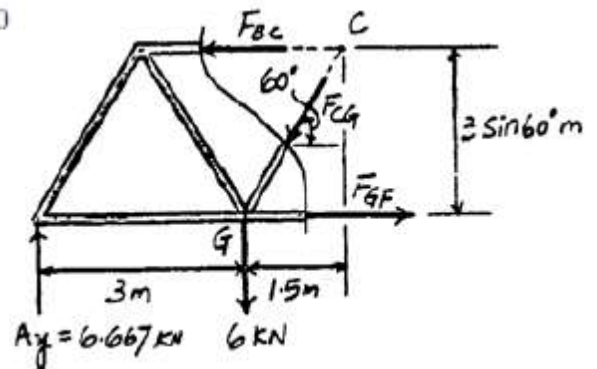
$$F_{GF} = 8.08 \text{ kN (T)}$$

$$(\sum M_G = 0; \quad F_{BC}(3 \sin 60^\circ) - 6.667(3) = 0$$

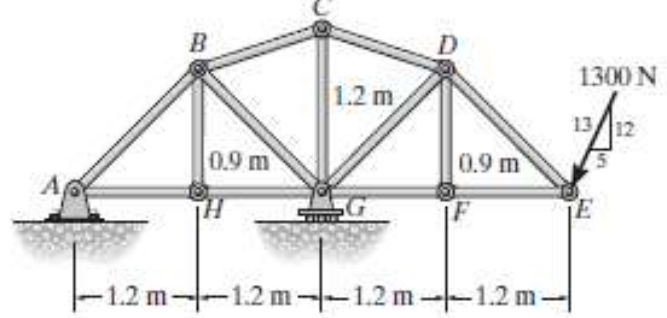
$$F_{BC} = 7.70 \text{ kN (C)}$$

$$(\sum F_y = 0; \quad 6.667 - 6 - F_{CG} \sin 60^\circ = 0$$

$$F_{CG} = 0.770 \text{ kN (C)}$$



6. Şekilde gösterilen kafes sistemin GF, GD, CD elemanlarındaki çubuk kuvvetini hesaplayınız. Kuvvetlerin çekme mi yoksa basınç mı olduğunu belirtiniz.



ÇÖZÜM:

Mesnet reaksiyonları:

$$(+\Sigma M_G = 0; \quad \left(\frac{12}{13}\right) 1300 (2.4) - F_{GD} \sin 36.87^\circ (4.8) = 0$$

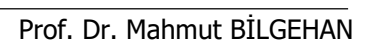
$$F_{GD} = 1000 \text{ N (C) Ans}$$

$$(+\Sigma M_D = 0; \quad F_{GF} (0.9) - \left(\frac{12}{13}\right) 1300 (1.2) - \left(\frac{5}{13}\right) (1300) (0.9) = 0$$

$$F_{GF} = 2100 \text{ N (C) Ans}$$

$$(+\Sigma M_G = 0; \quad F_{CD} \cos 14.04^\circ (1.2) - \left(\frac{12}{13}\right) 1300 (2.4) = 0$$

$$F_{CD} = 2473.9 \text{ N (T) Ans}$$



Engineering Mechanics: Statics in SI Units, 12e

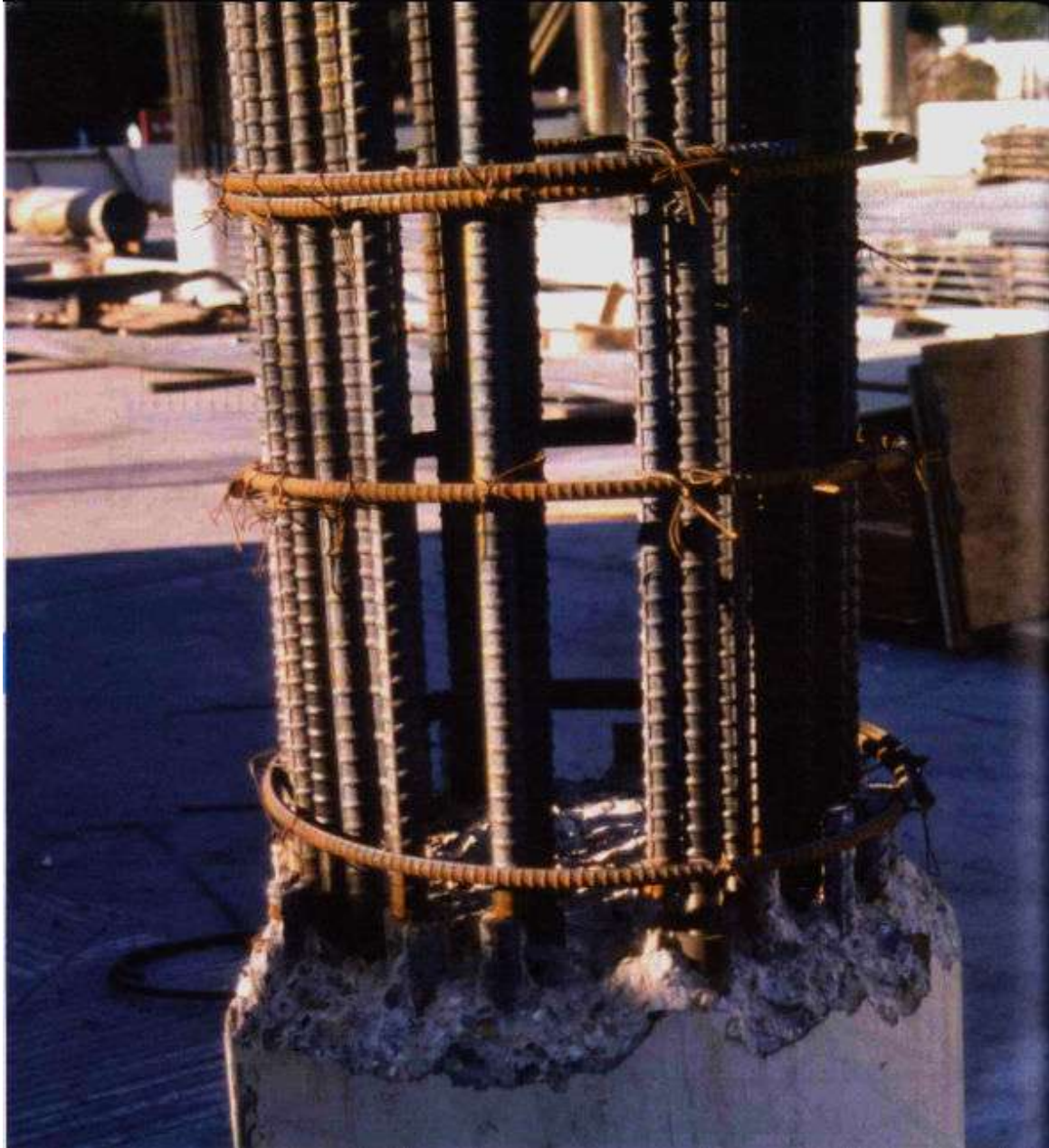
7

İç Kuvvetler (Internal Forces)

Bu bölümde öğrenilecek konular

- Bir elemana ait iç kuvvetlerin '**kesim yöntemi (method of section)**' ile bulunması
- Bir eleman boyunca kesme ve moment iç kuvvetlerini tanımlayan denklemleri formüle edip geliştirme
- Yük taşıyan kabloların geometrisini inceleme ve kuvvetleri analiz etme.

Kiriřlerde İç Kuvvetler



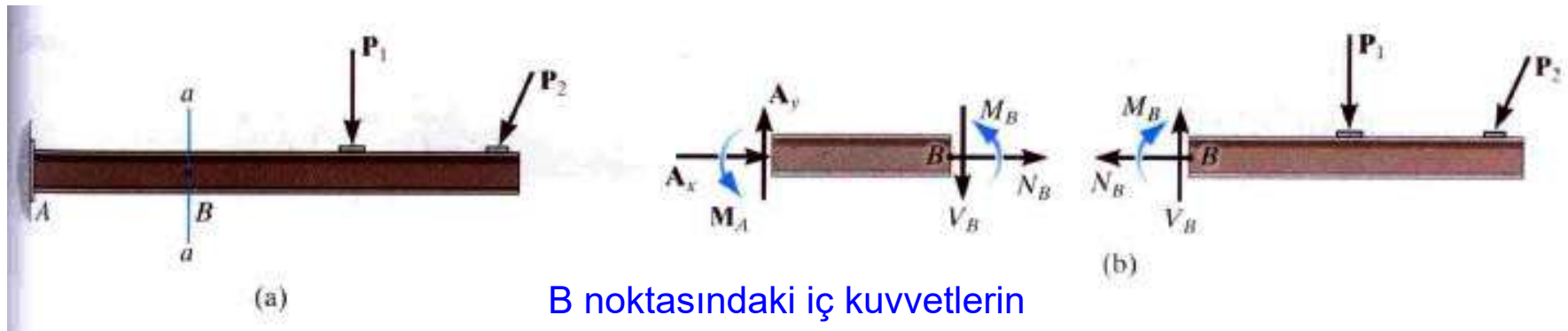
Amaçlar:

- Kesit metodunu kullanarak kırık elemanlarda iç kuvvetlerin hesabı,
- Kesme kuvveti ve moment diyagramlarının çizilmesi.

Yapısal Elemanlarda Oluşan İç Kuvvetler:

Bir yapısal elemanın tasarımı için, elemanın içinde oluşan kuvvetlerin bilinmesi gerekmektedir; böylece yapısal elemanın yapıldığı malzemenin bu kuvvetlere karşı koyabileceğinden emin olabiliriz.

İç kuvvetler kesit metodu (method of sections) ile bulunabilir. Metodu anlatmak için aşağıdaki şekli ele alalım:



B noktasındaki iç kuvvetlerin bulunması

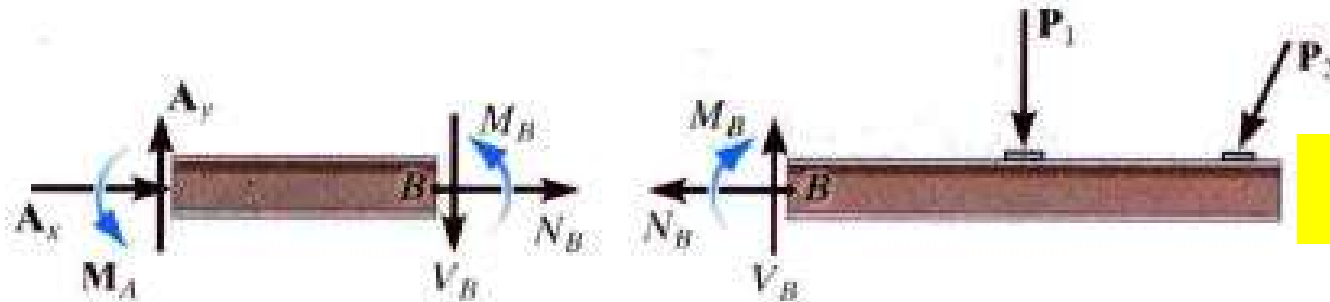
Eğer B noktasında oluşan iç kuvvetleri bulmak istiyorsak kiriş eksenine dik imajiner a-a kesitini geçiririz. Daha sonra buradan kirişi iki parçaya ayırırız. Böylece B noktasındaki iç kuvvetler ortaya çıkar ve her bir parçaya dış kuvvet olarak etkililir ve parçaların her bir cisim diyagramında gösterilir. Burada;

N_B : kesite dik olarak etkir ve normal kuvveti (eksenel kuvvet) diye adlandırılır,

V_B : kesite teğet olarak etkir ve kesme kuvveti diye adlandırılır,

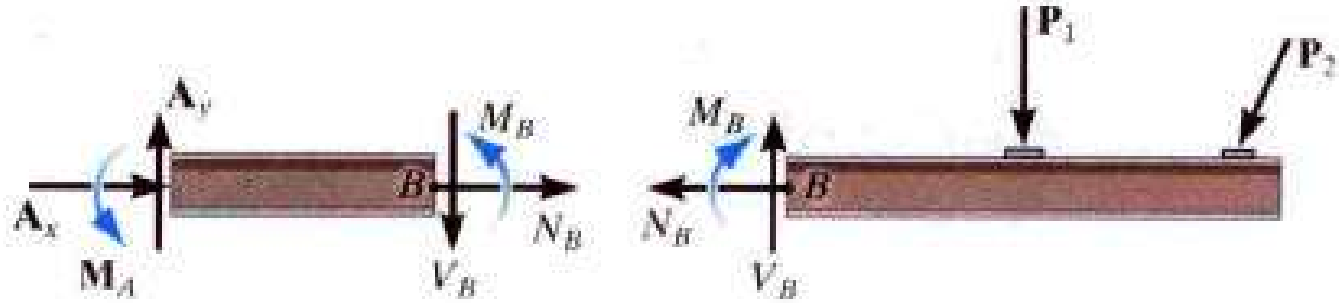
M_B : kesite etkiyen egilme momentidir.

Bu kuvvetler, parçaların birbirine göre relatif hareketini engeller! Newton'un üçüncü yasasına göre kiriş parçalarına ters yönde etki ederler.



B noktasındaki iç kuvvetler
sol ve sağ parça

Özgen bu iç kuvvetler, iki parçadan herhangi birinin serbest cisim diyagramına denge denklemi ile uygulanarak bulunabilir. Yine aşağıdaki şekle referansla.



Sağ parçanın serbest cisim diyagramı kullanılarak B nok. 'sındaki
iç kuvvetlerin bulunması daha avantajlı görünmekte çünkü sağ parça
 bilinmeyen mesnet kuvvetlerini içermemektedir. Bu durumda;

$$N_B \rightarrow \sum F_x = 0 \text{ 'den,}$$

$$V_B \rightarrow \sum F_y = 0 \text{ 'den ve}$$

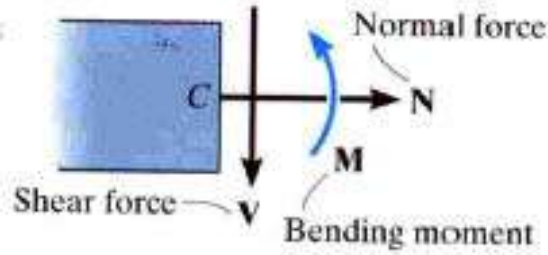
$$M_B \rightarrow \sum M_B = 0 \text{ 'den bulunabilir çünkü } N_B \text{ ve } V_B \text{ 'nin}$$

B nok. 'sına göre momenti sıfırdır!

İki boyutlu problemlerde eleman kesitinde üç farklı iç kuvvet oluşur!

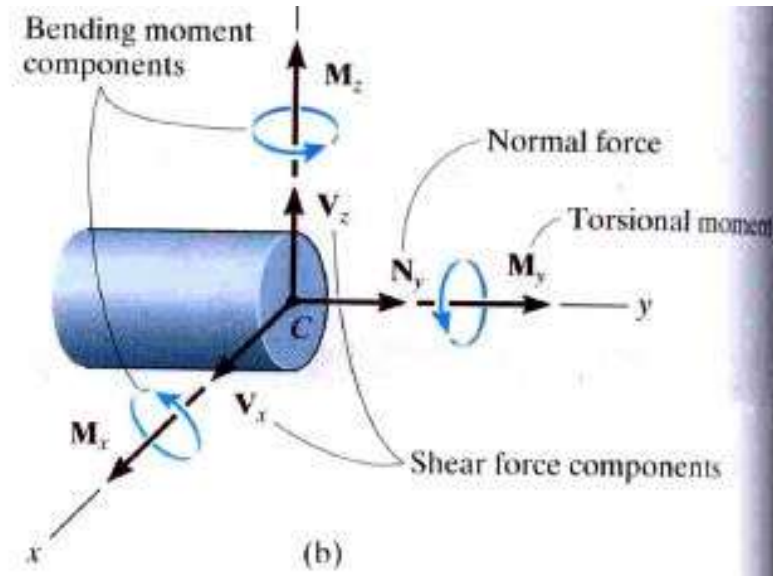
iki boyutlu problemlerde, kesite etkiyen iç kuvvetler aşağıda gösterilmiştir:

2D



(a)

3D



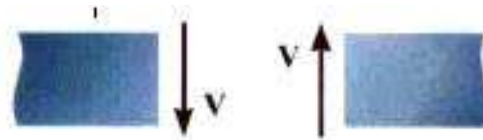
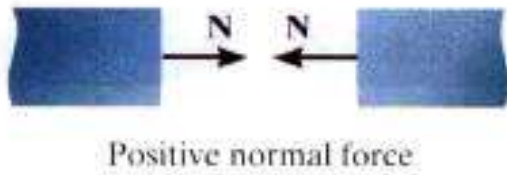
(b)

Birçok uygulama için birleşik kuvvet kesitinin geometrik merkezine etkiyecektir; dikkat edilirse iç kuvvetlerin şiddetleri kesit eksenini üzerindeki farklı noktalarda farklı olacaktır, bu nedenle boşluk metodu bir elemana birden fazla kez uygulanacaktır.

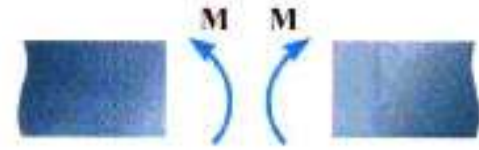
İzaret kabulleri :

Mühendisler, N , V ve M kuvvetlerini göstermek için bir izaret kabulu yapar. Bu kabuller rastgele olarak yapılır ve kıstıdan kıstıya, ülkeden ülkeye değişebilir. Ancak ^{burada} ^{olarak} ~~çizim~~ ^{genel} kabul görmüş pozitif yönlere kullanılacaktır:

Pozitif normal/eksenel kuvvet



Pozitif kesme kuvveti



Positive moment

Pozitif moment



Normal kuvvet, elemanı çekme etkili oluştuyorsa pozitif kabul edilecek;
Kesme kuvveti elemanı saat akrebi yönünde döndürüyorsa " " " ,
Moment, elemanı yukarı yönde konkar şekle sokuyorsa " " " tir.
Bunların tersi etti oluşturan kuvvetler negatif olarak ele alınacaktır!

Analiz Prosedürü :

kesit metodu, kesitlerde oluşan iç kuvvetlerin bulunması için kullanılır:

- Mesnet kuvvetleri,

- Eleman parçalara ayrılmadan önce, mesnet kuvvetlerinin hesabı yapılabilir,

- Serbest Cisim diyagramı

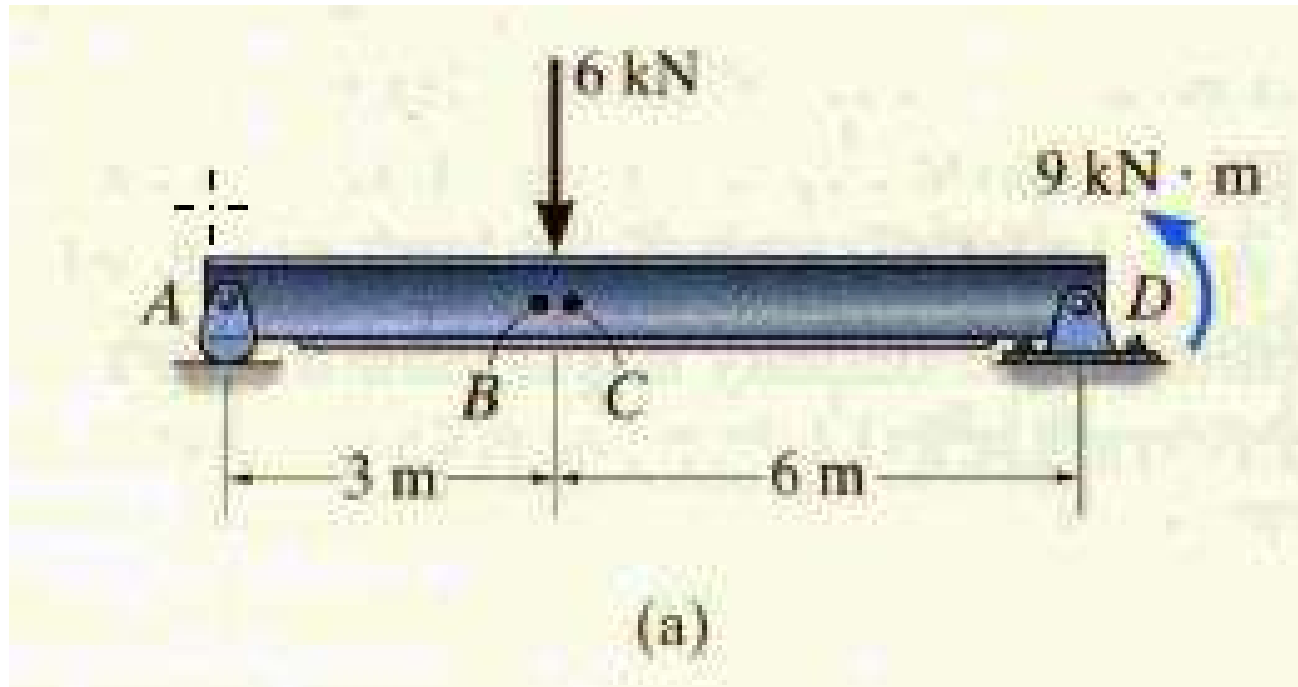
- Elemana etkiyen tüm dış kuvvetler (mesnet kuvvetleri dahil) eleman üzerinde etki ettikleri yerler değiştirilmeden gösterilir,
- İç kuvvetleri bulunmak istenen noktadan kiriş elemanına dik imajiner bir kesit alınır,
- Kesit alındıktan sonra üzerinde en az kuvvet olan parçanın serbest cisim diyagramı çizilir, kesitteki iç kuvvetler kabul edilen pozitif yönlerde serbest cisim diyagramı üzerinde gösterilir,

- Denge denklemleri uygulanır,

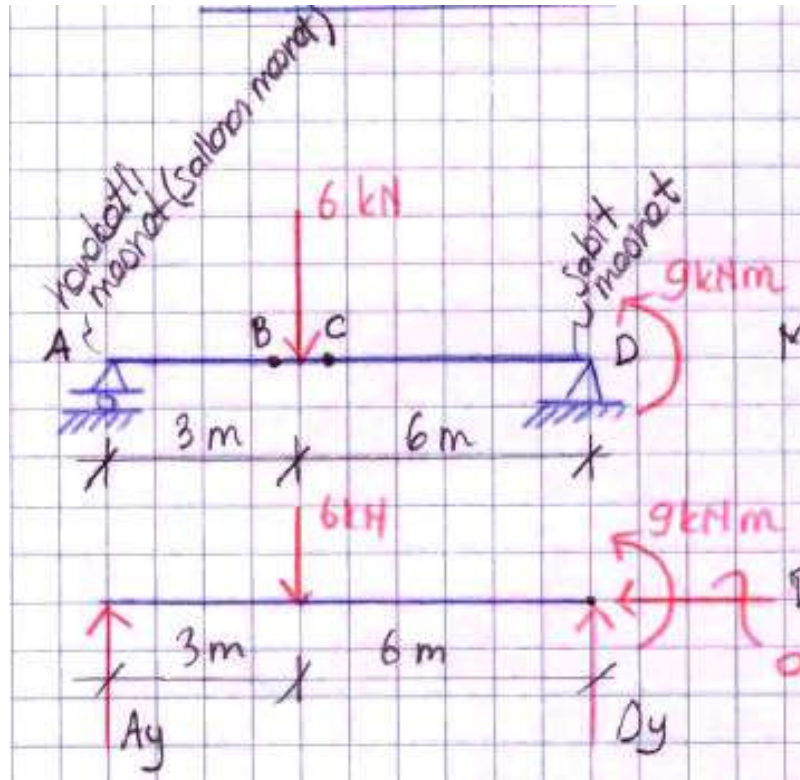
- Moment denge denklemleri kesite göre alınmalıdır, böylece bilinmeyen N ve V kuvvetleri elimine edilebilir ve kesitteki moment direkt olarak bulunur,
- Denge denklemlerinin uygulanması sonucunda, kesit kuvvetleri pozitif alırsa yönler doğru, negatif alırsa başta kabul edilen yönler yanlış demektir.

ANİMASYON!

Örnek:



6 kN'lık kuvvetin hemen solundaki B ve hemen
sağındaki C noktasında oluşan normal, kesme
ve moment iç kuvvetlerini bulunuz.

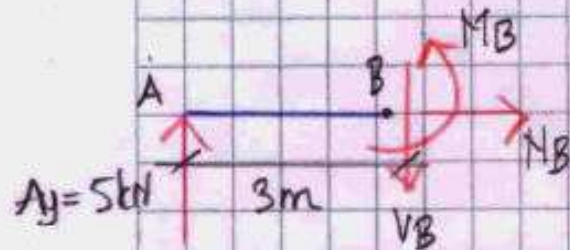


Moment kuvvetleri: Tüm kırızın serbest cisim diyagramı kullanılarak bulunur!

$$\sum M = 0 \left\{ \begin{array}{l} \text{Tüm kırızın,} \\ \text{serbest cisim diyagramı} \end{array} \right.$$

$$+\sum M_D = 0 ; 9 + 6(6) - A_y(9) = 0 \rightarrow A_y = 5 \text{ kN}$$

Kırtı B nok. 'sından kesilir ve sol tarafın serbest cis. diy. çiziliriz!

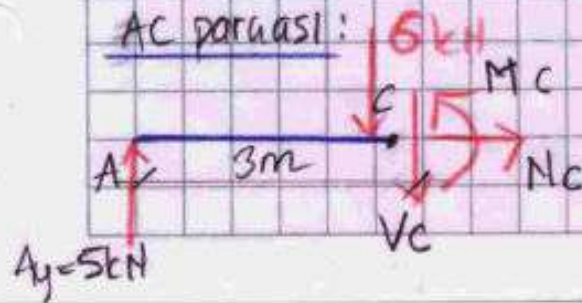


AB parçası: $\rightarrow \sum F_x = 0, N_B = 0$

$\uparrow \sum F_y = 0, V_B = 5 \text{ kN} (\downarrow)$

$\uparrow \sum M_B = 0; -5(3) + M_B = 0, M_B = 15 (5) \text{ kNm}$

AC parçası:

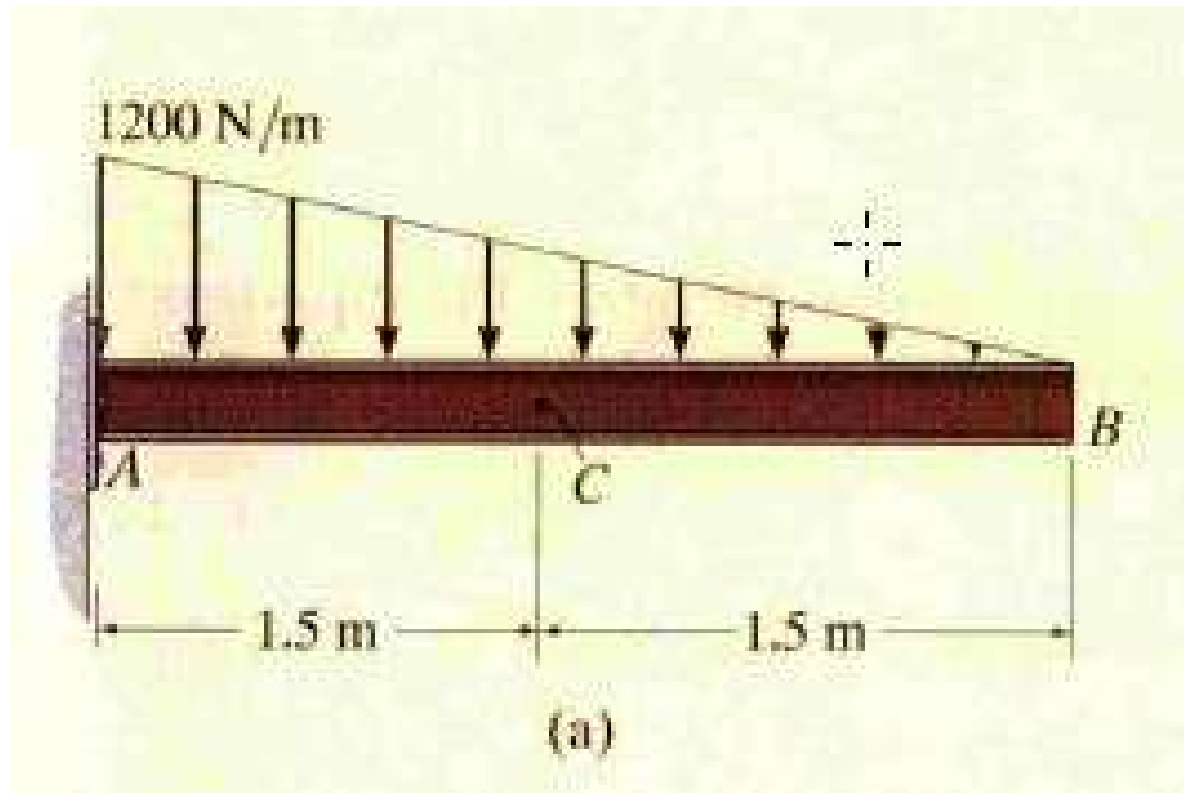


$\rightarrow \sum F_x = 0, N_c = 0$

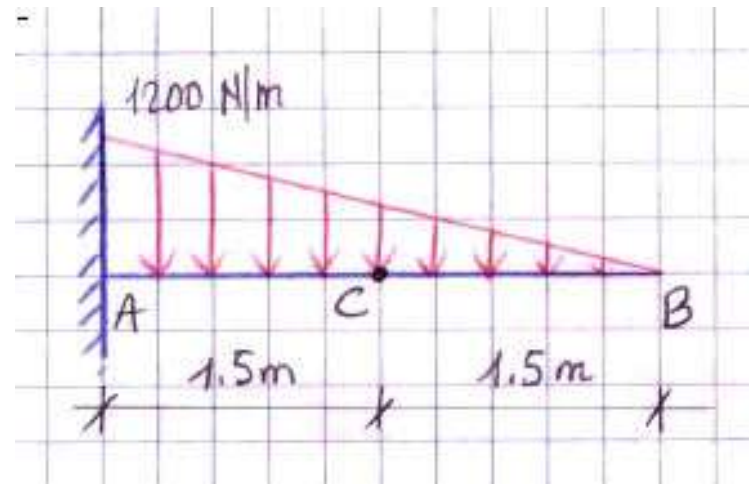
$\uparrow \sum F_y = 0; 5 - 6 - V_c = 0, V_c = -1 (T)$

$\uparrow \sum M_c = 0; -5(3) + M_c = 0, M_c = 15 \text{ kNm} (\uparrow)$

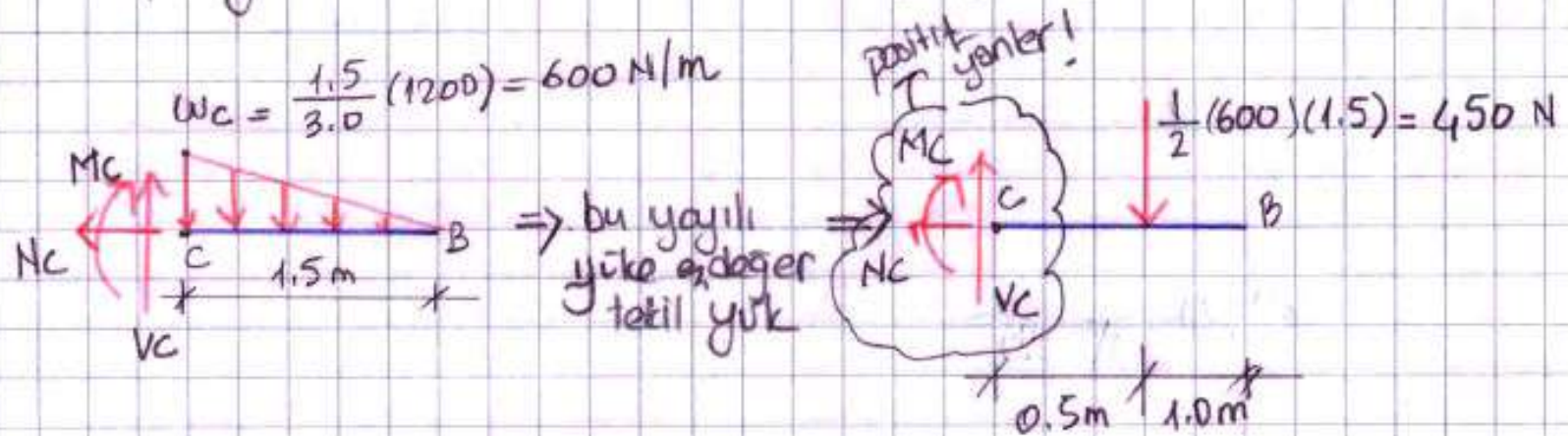
Örnek:



C noktasında oluşan, normal, kesme,
ve moment değerlerini bulunuz.



Mesnet reaksiyonlarını bulmaya gerek yok; çünkü C noktasında kesitlerden sonra sağda kalan parçayı kullanarak C noktasında oluşan iç kuvvetler bulunabilir:



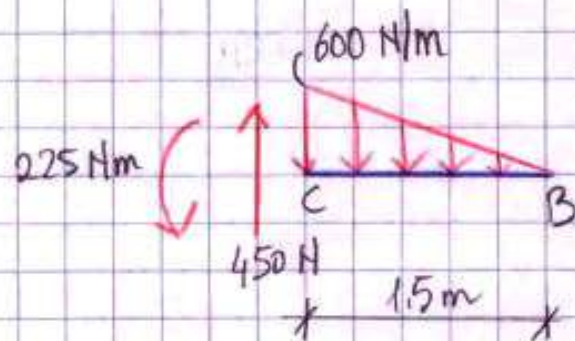
Bu değerlere sisteme denge denklemleri uygulanırsa;

$$\rightarrow \sum F_x = 0; \quad N_c = 0$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad V_c - 450 = 0 \Rightarrow V_c = 450 \text{ N } (\uparrow)$$

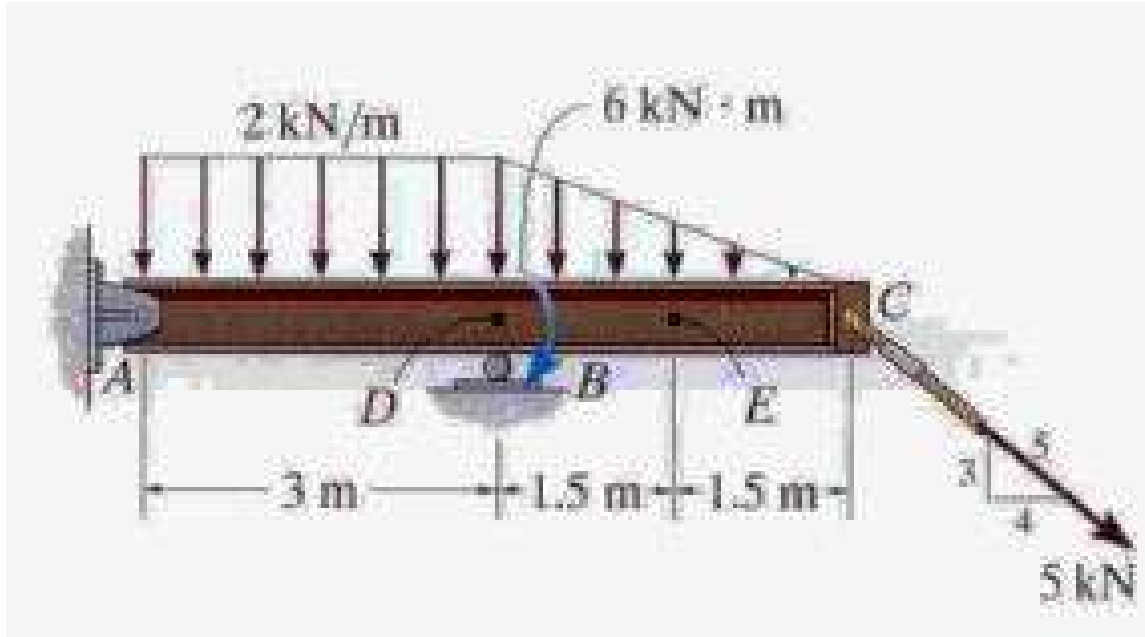
$$+\circlearrowleft \sum M_c = 0; \quad -M_c - 450(0.5) = 0 \Rightarrow M_c = -225 \text{ N (kabul edilen yönün tersi yönünde etkilimekte)}$$

$$= 225 \text{ N } (\downarrow)$$



} CB bütçe parçası dengede!

Ödev:



Şekilde gösterilen kiriş için, D ve E noktalarında oluşan iç kuvvetleri bulunuz.

Not: Tekil moment ($6 \text{ kN}\cdot\text{m}$) B noktasındaki mesnete etmektedir. D noktası ise B mesnedinin hemen solunda yer almaktadır.

Kesme Kuvveti ve Moment Diyagramları

Kırızlar eksenlerine dik doğrultuda etkiyen yükleri taşımak için kullanılırlar. Genel olarak, düzdörler ve sabit kesite sahiptirler.

Genellikle kırızlar mesnetlenme durumlarına göre sınıflandırılırlar. Örneğin eğilimli kırız, düz kırız, basit mesnetli kırız diye adlandırılır.



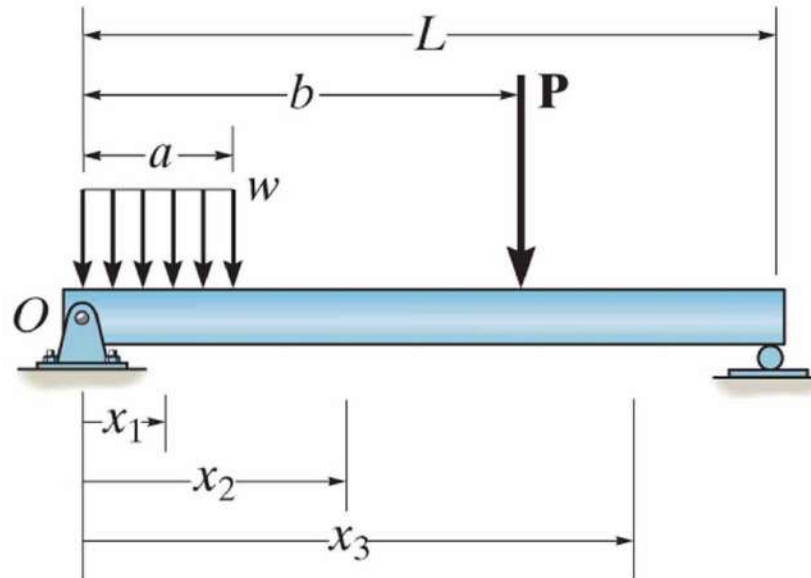
unfig07_03.jpg - To save on material and thereby produce an efficient design, these beams, also called girders, have been tapered, since the internal moment in the beam will be larger at the supports, or piers, than at the center of the span.

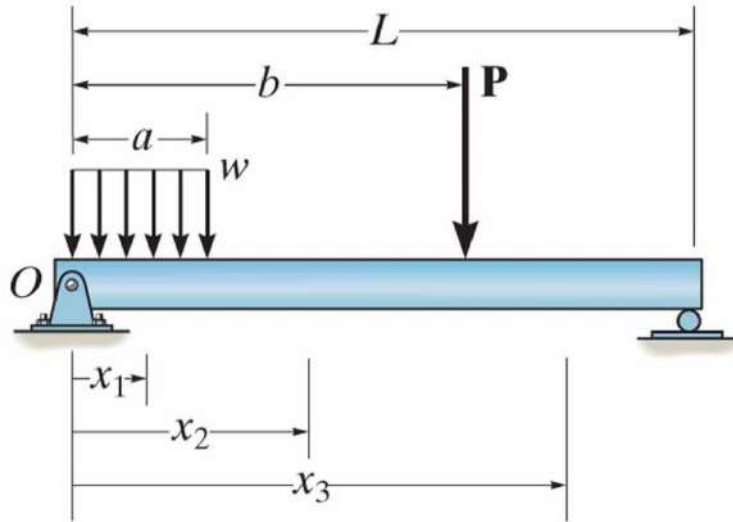
Eğer mesnet ankastre mesnet olsaydı, ankastre mesnetli kırız diye adlandırılacaktı!

Kırızın dizaynı, ığ kuvvetlerden kesme ve moment kuvvetlerinin kırız üzerindeki dağılımının ayrıntılı olarak bilinmesine bağlıdır! Dikkat edilirse normal kuvvetin dağılımı ^{kırızların} ~~fonarımı~~ tam dikkate alınmaz çünkü: (i) genelde kırızlara kuvvetler eksenlerine dik doğrultuda etkir ve bu kuvvetler sadece kesme ve moment dir, (ii) fonarım açısından kırızların kesmeye ve eğilmeye dayanımları, eksenel yüke dayanımından çok daha önemlidir.

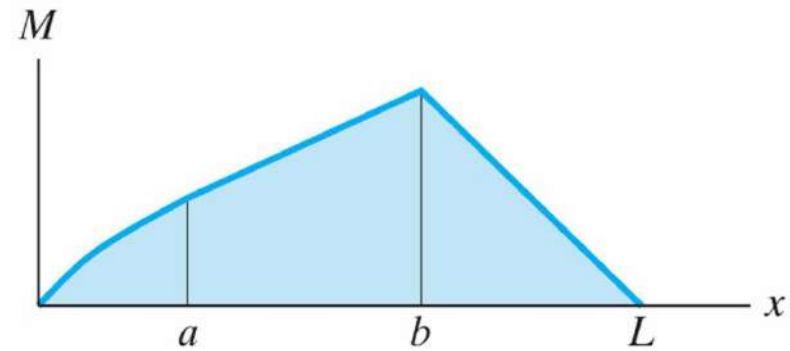
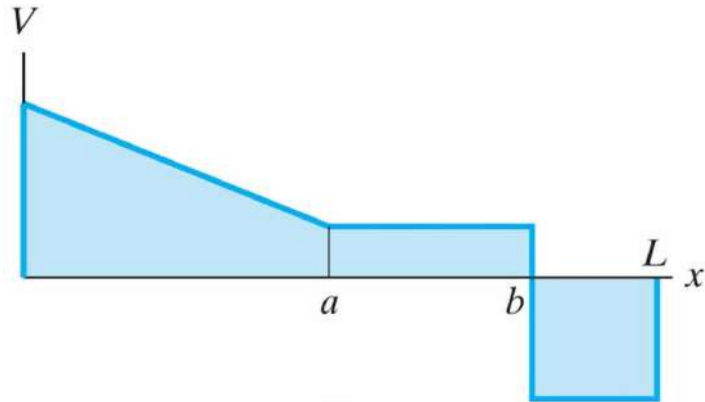
kesme kuvveti ve momentin kırılgan eksen boyunca değişimi kesit metoduyla bulunabilir. Bu durumda kiriş x mesafesi gibi rastgele bir noktadan kesip V ve M değerlerini x 'e bağlı fonksiyonlar olarak bulmak gerekmektedir.

Genel olarak kesme ve moment fonksiyonları süreksizdir veya eğimleri süreklidir. Bu süreksizlikler yayılı yüklerin dağıttığı durumlarda, ve teki kuvvetlerin veya teki momentlerin etkilediği noktalarda gerçekleşir:



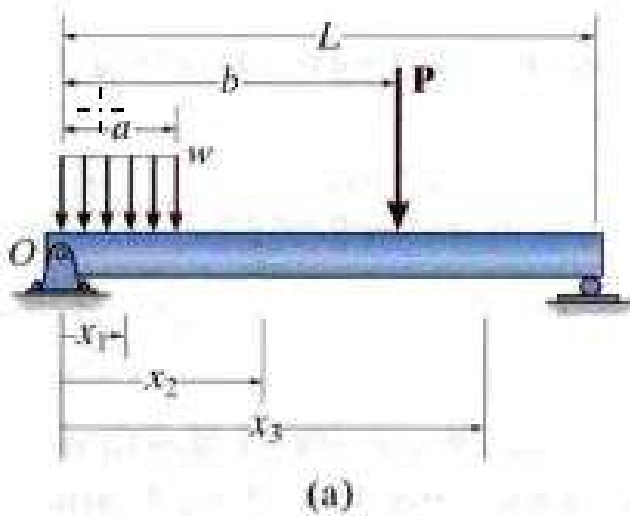


- Dış yükler kirişi üç bölgeye bölüyor,
- Dolayısıyla kirişi üç bölgede kesip, ayrı ayrı incelemek gerekiyor,
- Dikkat edilirse, bu üç bölgede üç farklı kesme kuvveti ve moment fonksiyonları vardır.
 - Bölgelere ait aralıklar:
0-a, a-b ve b-L

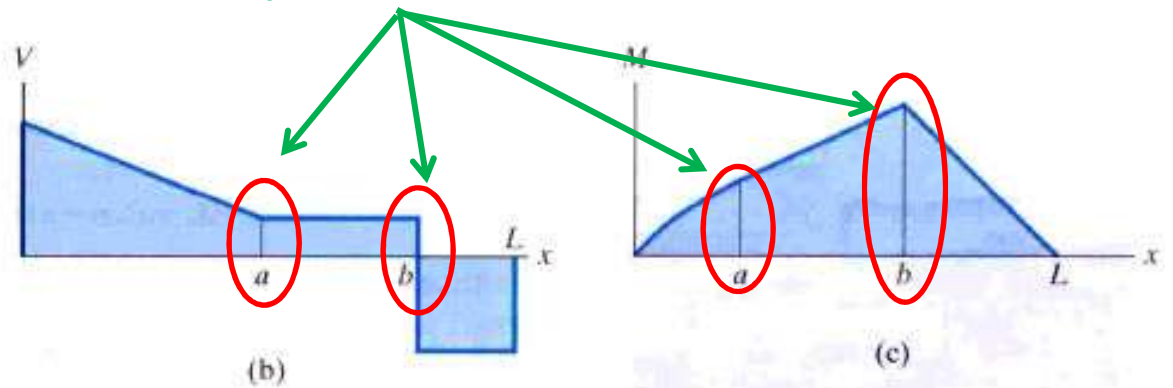


Bu zatiplerden $V(x)$ ve $M(x)$ fonksiyonları, süreksizlik yaratan yüklemelerin oluşturduğu kırık segmentleri (parçaları) için ayrı ayrı bulunmalıdır.

Örneğin; şekilde gösterilen kırık için orijin noktası "O" olmak üzere x_1 , x_2 ve x_3 uzunlukları kullanılarak V ve M fonksiyonları bu üç segment için ayrı ayrı hesaplanmalıdır.

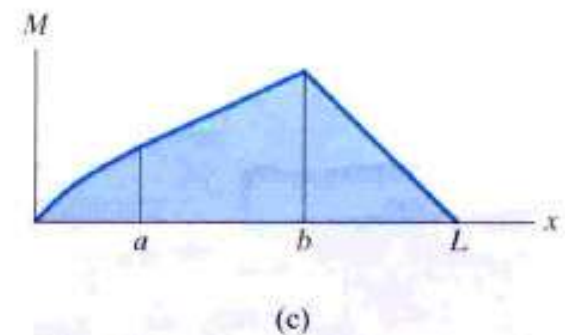
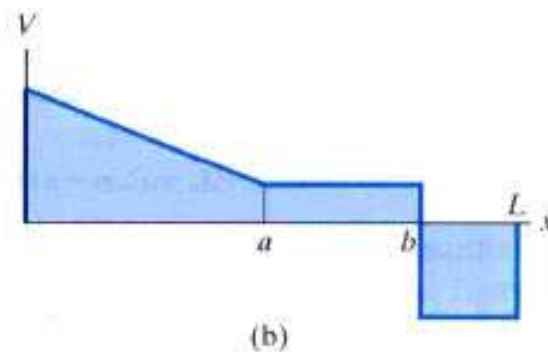
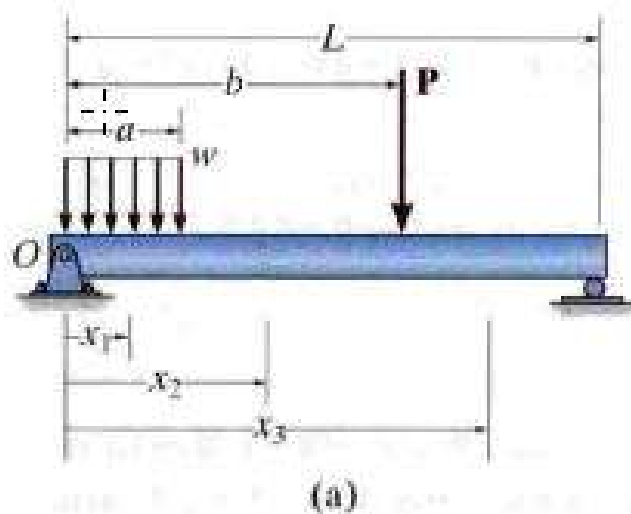


Fonksiyonlardaki süreksizlikler

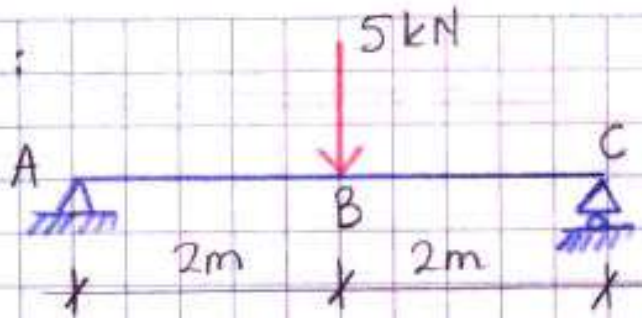


$$\begin{array}{l}
 \vdots \\
 \left. \begin{array}{l} V(x_1) \\ M(x_1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 0 \leq x_1 \leq a \\ \end{array} \\
 \left. \begin{array}{l} V(x_2) \\ M(x_2) \end{array} \right\} \begin{array}{l} a \leq x_2 \leq b \\ \end{array} \\
 \left. \begin{array}{l} V(x_3) \\ M(x_3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} b \leq x_3 \leq L \\ \end{array}
 \end{array}
 \Rightarrow \text{bölgeleri tüm geçerli olacaktır!}$$

Bu formlarlar kırıta üzerinde gösterildiğinde $V(x)$: kesme diyagramı
 $M(x)$: moment diyagramı olarak adlandırılır.

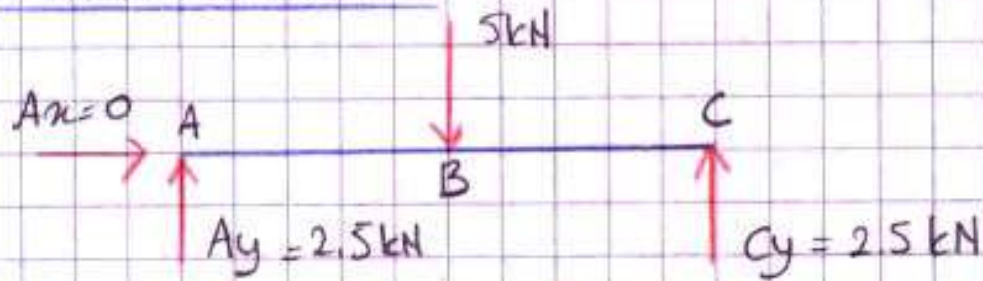


Örn.:



Şekilde gösterilen basit mesneli
kiriğin kesme kuvveti ve moment
diyagramlarını bulunuz.

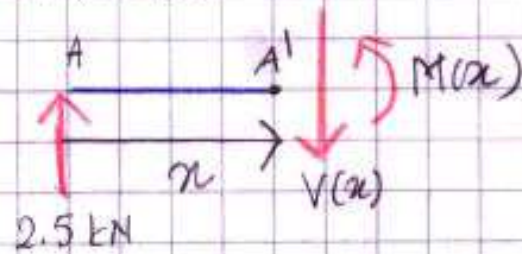
Mesnet Kuvvetleri:



Kesme Kuvveti ve Moment Diyagramları:

Tekil kuvvet kırığı iki parçaya böldüğünden, kırıq iki parçada incelenmek
zorundadır.

1. parça:

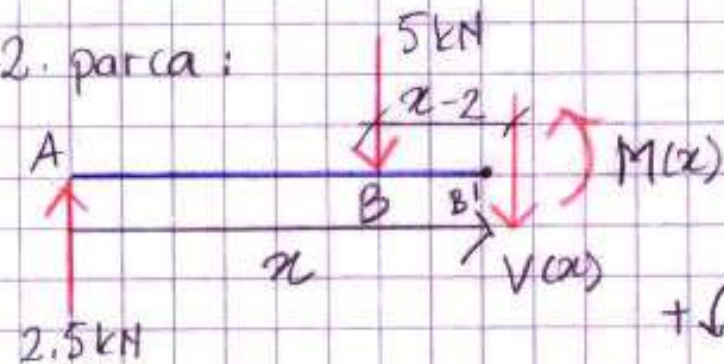


$$+\uparrow \sum F_y = 0 ; \quad V(x) = 2.5 \text{ kN (sabit)} \quad (1)$$

$$+\circlearrowleft \sum M_{A'} = 0 ; \quad M(x) = 2.5x \text{ (x'e bağımlı)} \quad (2)$$

$0 < x < 2$ aralığında geçerli.

2. parça:



$$+\uparrow \sum F_y = 0 ; \quad 2.5 - 5 - V(x) = 0$$

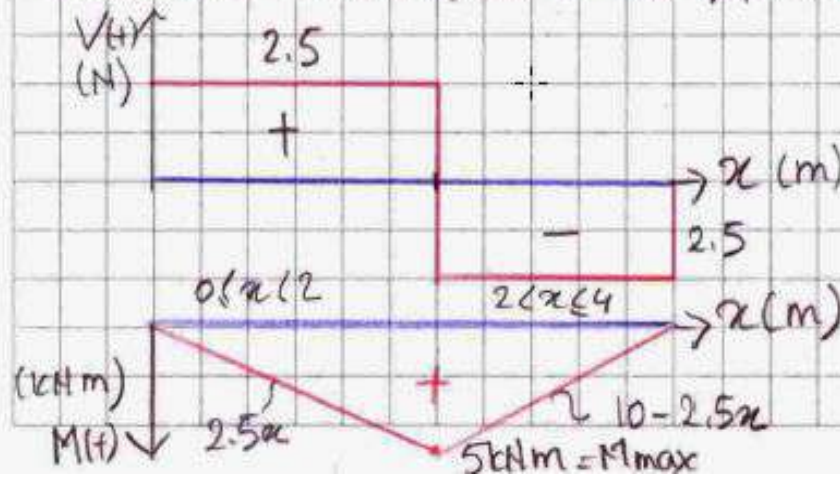
$$V(x) = -2.5 \text{ kN (kabul ettiğimiz (3) yönün tersi)}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_{B'} = 0 ; \quad M - 2.5x + 5(x-2) = 0$$

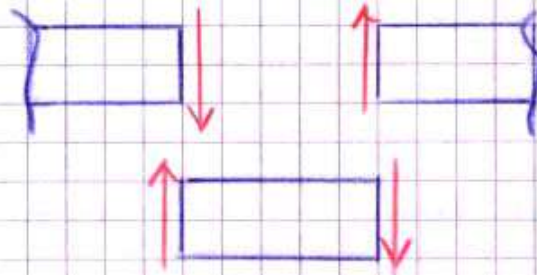
$$M(x) = (10 - 2.5x) \text{ kNm} \quad (4)$$

$2 < x < 4$ aralığında geçerli

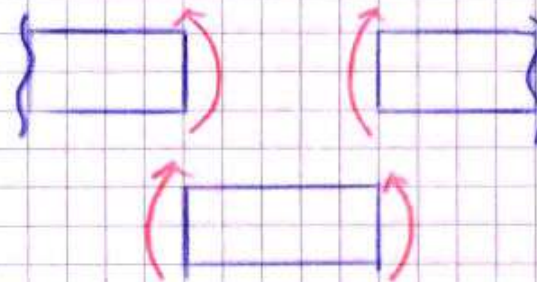
Denklemler (1), (2), (3) ve (4) geçerli oldukları aralıklarda çiziliriz.



Positif kesme kuvveti ve Moment Yönləri :

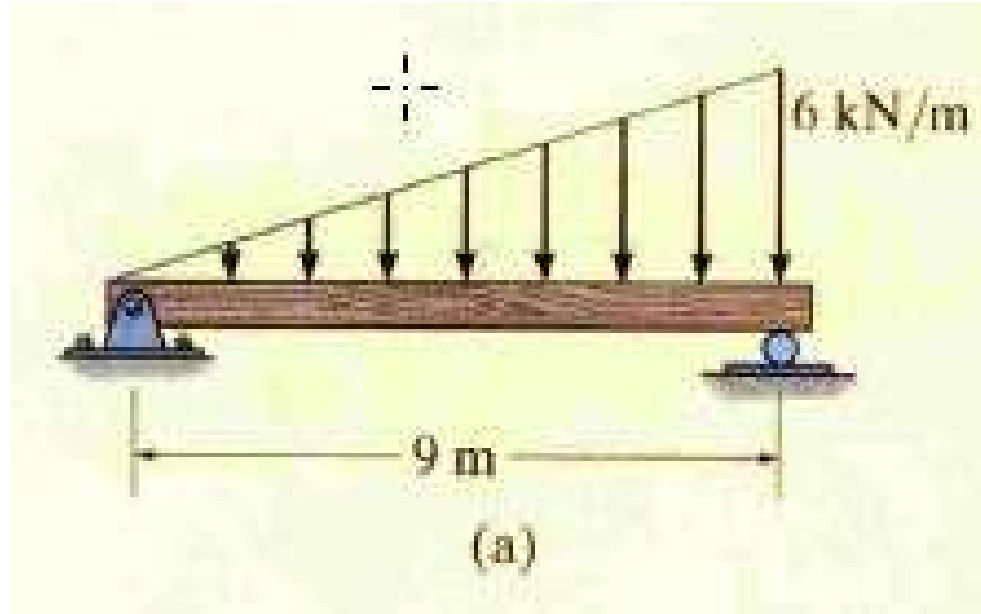


Positif kesme kuvveti
(diyagramda pozitif tarafa
çizilecek)



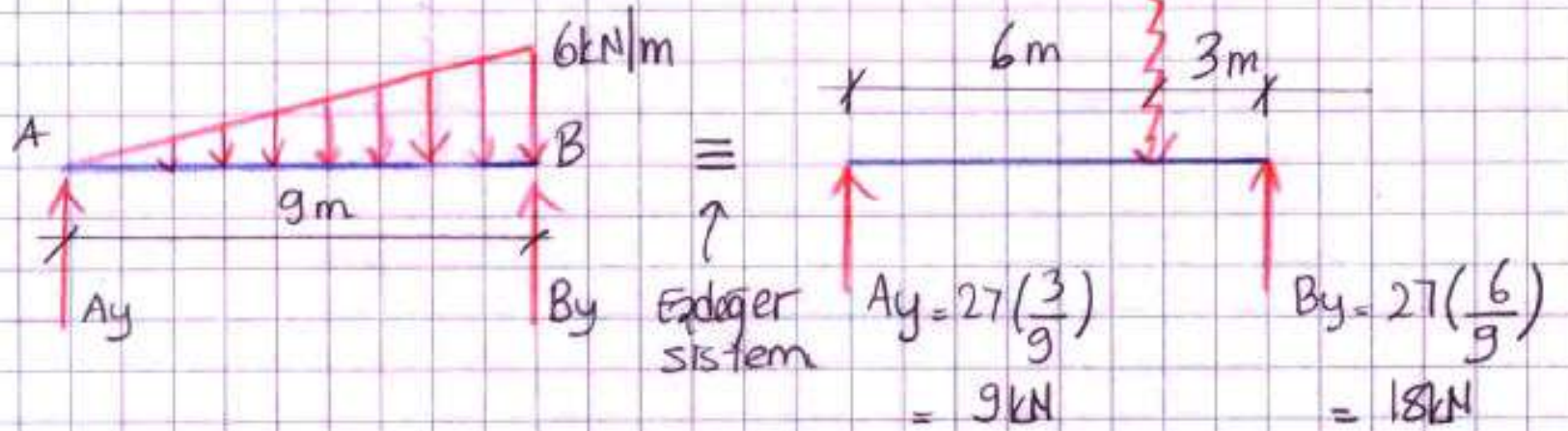
Positif moment
(diyagramda pozitif tarafa
çizilecek)

Örnek:

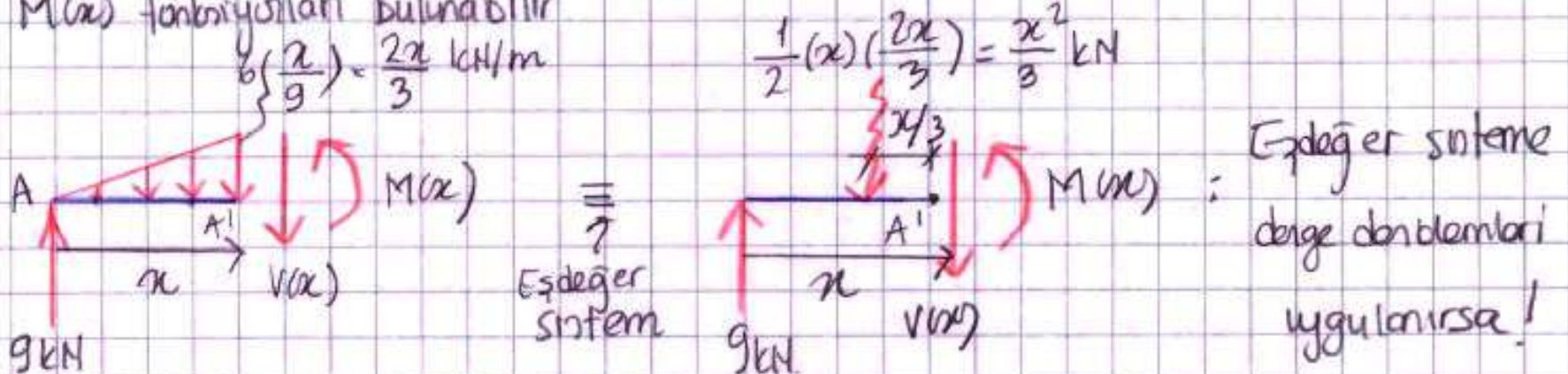


Şekilde gösterilen birizin kesme kuvveti
ve moment diyagramlarını çiziniz.

Merkezi Kuvvetlerinin Bulunması:



Yayılı yük kırmızı tek bir parçaya bölüğü için tek bir kesit olarak $V(x)$ ve $M(x)$ fonksiyonları bulunabilir

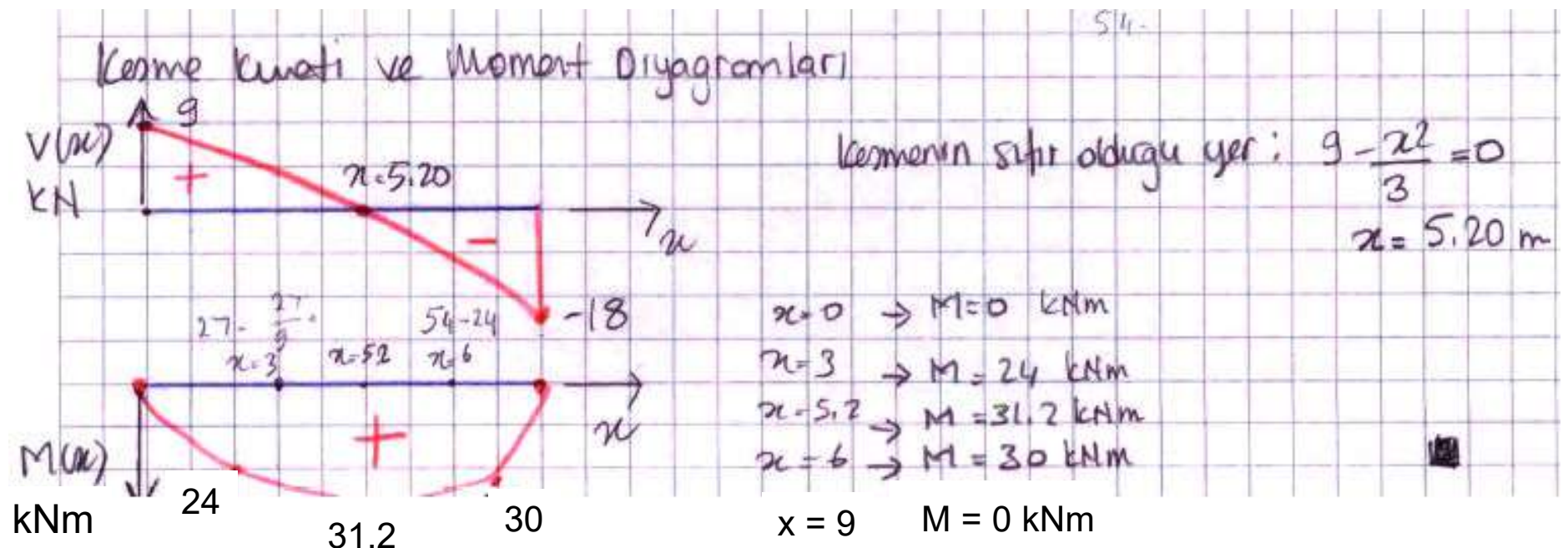


$$+\uparrow \sum F_y = 0 ; \quad 9 - \frac{x^2}{3} - V(x) = 0 \Rightarrow V(x) = \left(9 - \frac{x^2}{3}\right) \text{ kN} \quad (0 \leq x \leq 9)$$

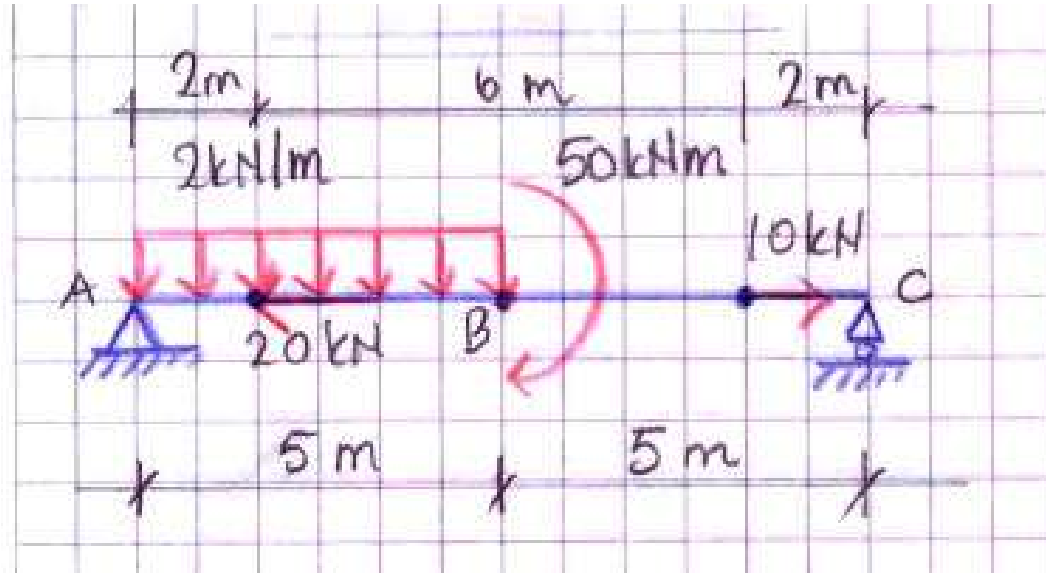
$$+\downarrow \sum M_A = 0 ; \quad -9x + \frac{x^2}{3} \left(\frac{x}{3}\right) + M(x) = 0$$

$$\frac{27 - \frac{x^3}{9}}{9x} = 24$$

$$M(x) = \left(9x - \frac{x^3}{9}\right) \text{ kNm} \quad (0 \leq x \leq 9)$$

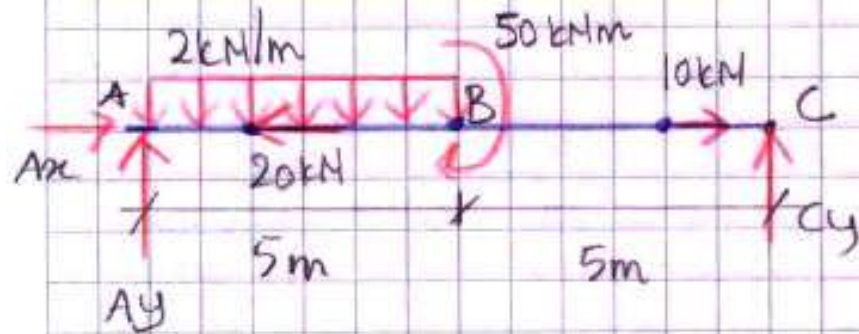


Örnek:



Sabilde gösterilen birinin N, V ve M diyagramlarını çiziniz.

Mernek Kuvvetlerinin Hesabı:



$$\rightarrow \sum F_x = 0; A_x - 20 + 10 = 0$$

$$A_x = 10 \text{ kN}$$

$$\uparrow \sum M_C = 0; -A_y(10) + 2(5)(2.5+5) - 50 = 0$$

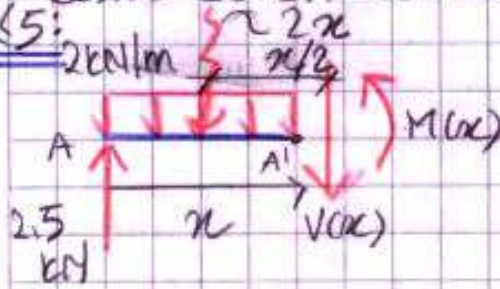
$$A_y = 2.5 \text{ kN}$$

$$\uparrow \sum F_y = 0; 2.5 - 2(5) + C_y = 0$$

$$C_y = 7.5 \text{ kN}$$

Normal kuvvet Diyagramı: Kırmızı bölgede
incelemiş

$0 < x \leq 5$: Kesme Kuvveti ve Moment Diyagramları: Kırıp bu şerh sadece iki bölgeye ayrılıp incelenebilir.



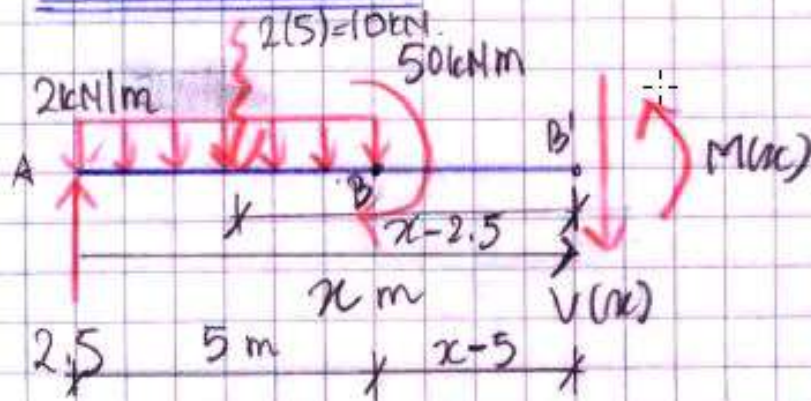
$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad 2.5 - 2x - V(x) = 0$$

$$V(x) = 2.5 - 2x \quad ; \quad 0 < x \leq 5 \quad (1)$$

$$+\circlearrowleft \sum M_{A'} = 0; \quad -2.5(x) + 2x\left(\frac{x}{2}\right) + M(x) = 0$$

$$M(x) = 2.5x - x^2 \quad ; \quad 0 < x \leq 5 \quad (2)$$

5m < x < 10m :



$$+\uparrow \sum F_y = 0;$$

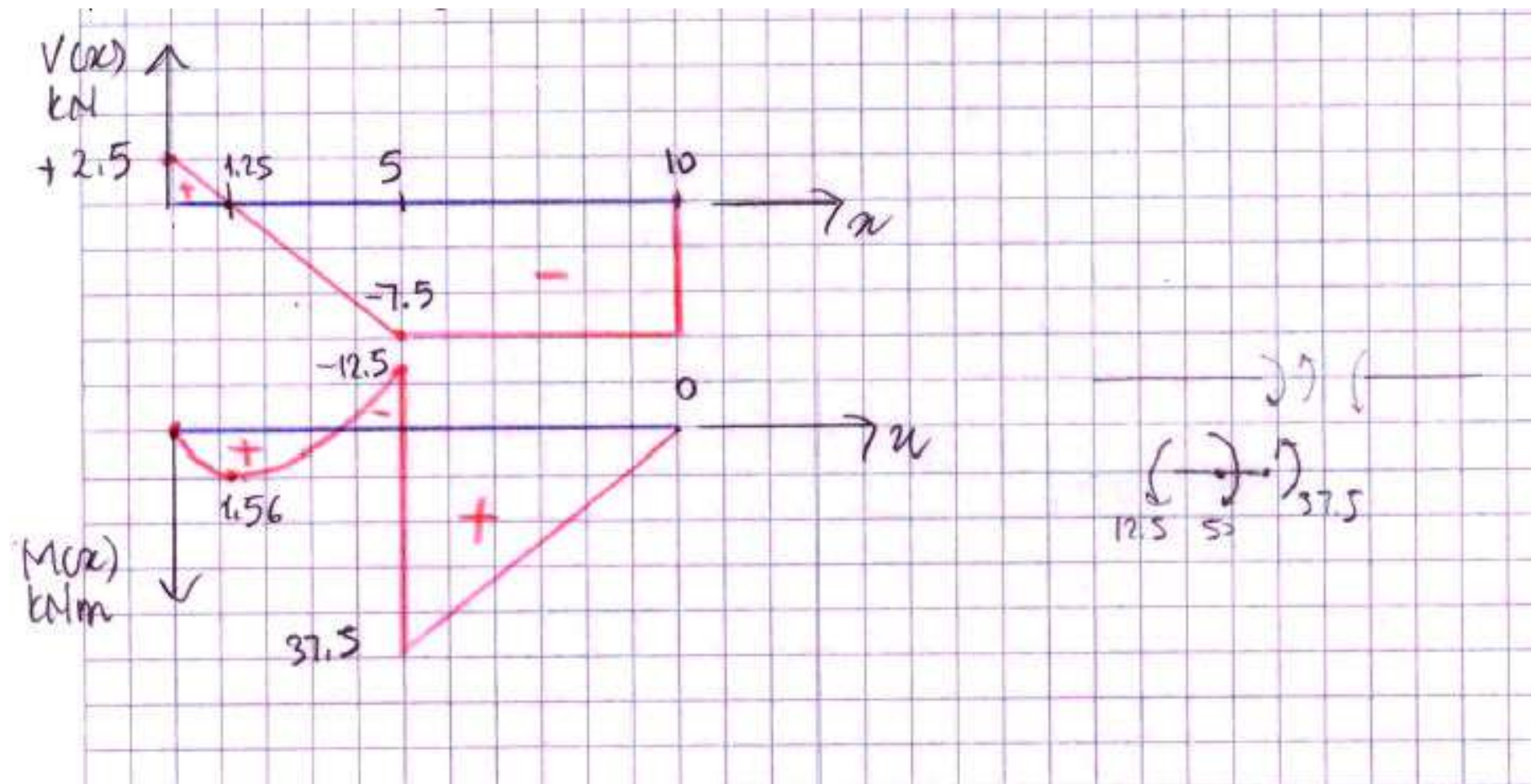
$$2.5 - 2(5) - V(x) = 0$$

$$V(x) = -7.5 \text{ kN} (\uparrow) \quad (3)$$

$$+\downarrow \sum M_B = 0 ; \quad -2.5(x) + 10(x-2.5) - 50 + M(x) = 0$$

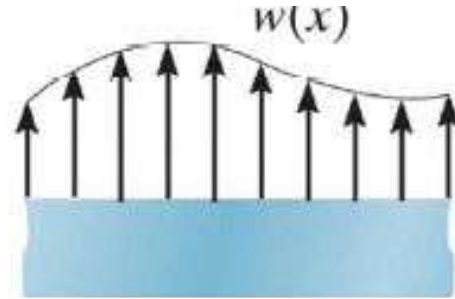
$$M(x) = -7.5x + 75 \text{ kNm} \quad (4)$$

(1), (2), (3) ve (4) kullanılarak ve geçerli oldukları bölgeler dikkate alınarak diyagramlar çizilir.

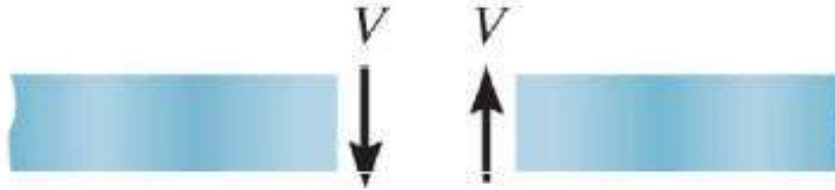


Kesme ve Moment Diyagramlarının Oluşturulması için Grafiksel Yöntem (Alan Yöntemi)

Kiriş için işaret kabulleri (hatırlatma):



Pozitif yayılı dış kuvvet



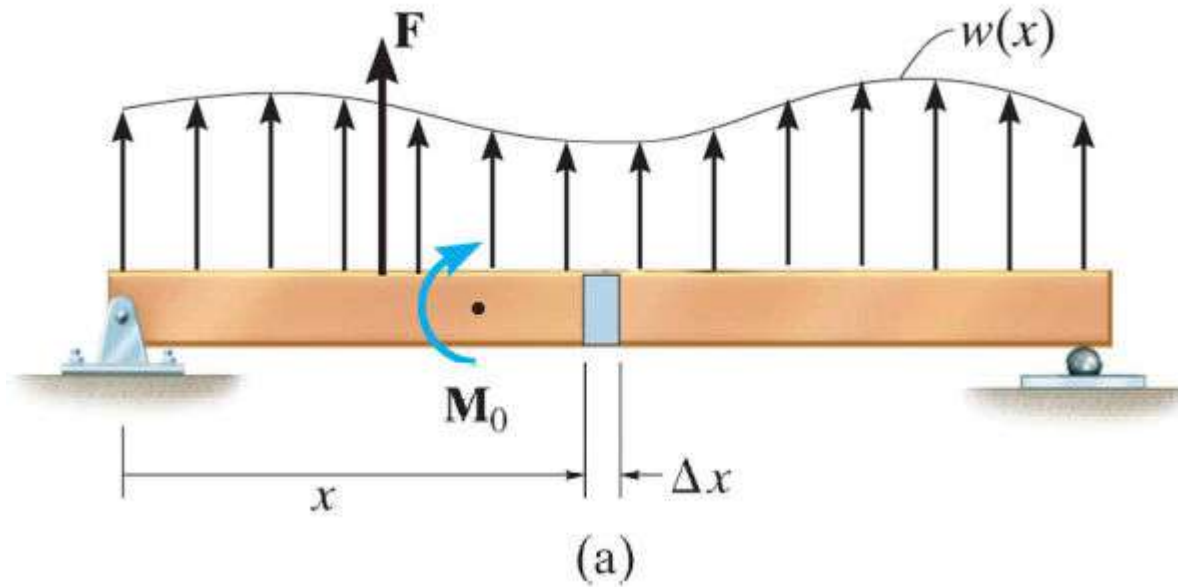
Pozitif iç kesme kuvveti



Pozitif iç moment

Kesme ve Moment Diyagramlarının Oluşturulması için Grafiksel Yöntem (Alan Yöntemi)

Kiriş için genel bir yükleme durumunu ele alalım: bu yüklemede hem yayılı yükler, hem de tekil kuvvet ve momentler mevcut olsun



Kirişin sol ucundan x masefesinde Δx uzunluğunda bir şerit çıkaralım,

Kesme ve Moment Diyagramlarının Oluşturulması için Grafiksel Yöntem (Alan Yöntemi)

Yanda, çıkarılan bu parçanın üzerine etkiyen yükler i gösteren serbest cisim diyagramı çizilmiştir. Dikkat edilirse, yayılı yük eş değer tekil yük ile gösterilmiştir.

Bu parçanın dengesinden aşağıdaki ifadeler yazılabilir:

$$+\uparrow \sum F_y = 0; V + w(x)\Delta x - (V + \Delta V) = 0$$

$$\Delta V = w(x)\Delta x \quad (1)$$

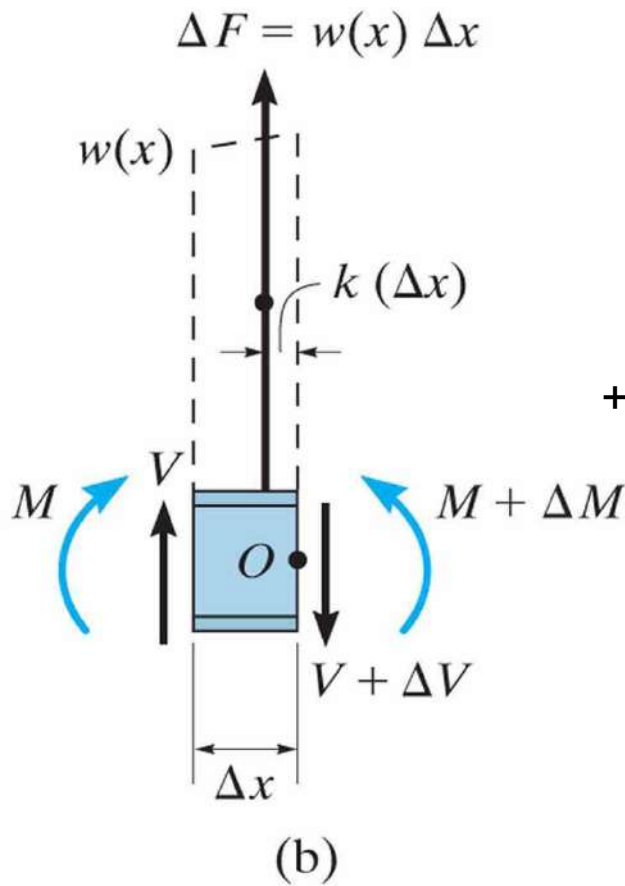
$$+\curvearrowright \sum M_O = 0; -V\Delta x - M - w(x)\Delta x[k\Delta x] + (M + \Delta M) = 0$$

$$\Delta M = V\Delta x + w(x)k\Delta x^2 \quad (2)$$

Denklem (1) ve (2)'nin her iki tarafını Δx 'e bölüp, limitte Δx 'i sıfıra yaklaştırırsak, aşağıdaki çok önemli iki ifade elde edilir:

$$\frac{dV}{dx} = w(x) \quad (3)$$

$$\frac{dM}{dx} = V \quad (4)$$

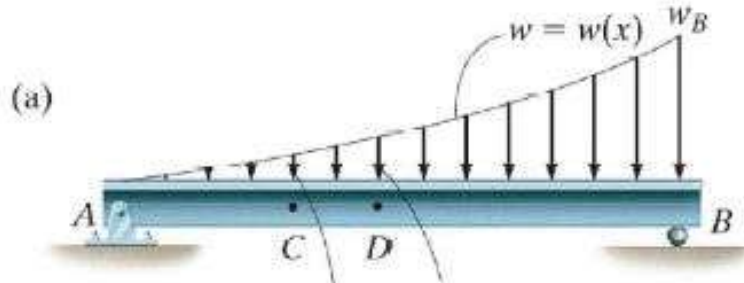


Kesme ve Moment Diyagramlarının Oluşturulması için Grafiksel Yöntem (Alan Yöntemi)

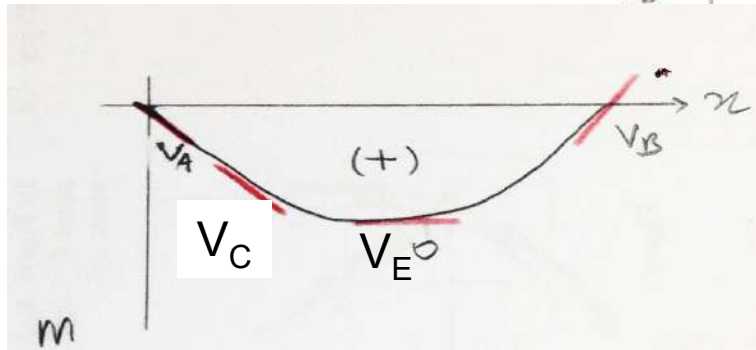
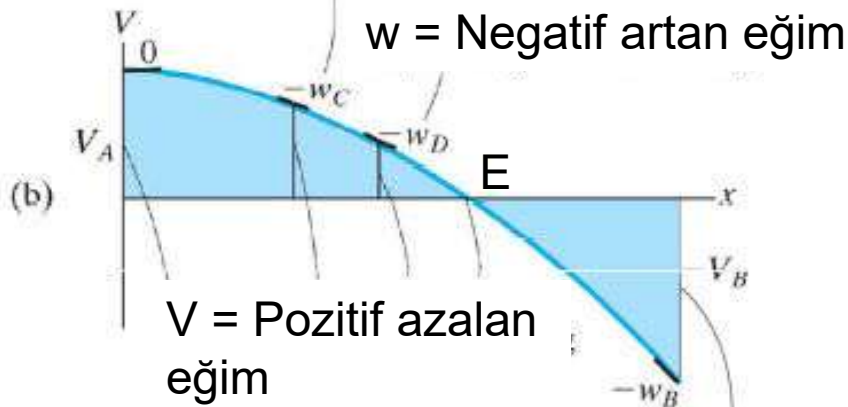
$$\frac{dV}{dx} = w(x)$$

$$\frac{dM}{dx} = V$$

Bu iki ifade, kesme kuvveti ve moment grafiklerinin çizimi için kullanılabilir.



Yayılı kuvvet yukarı yönde pozitif!



Kesme ve Moment Diyagramlarının Oluşturulması için Grafiksel Yöntem (Alan Yöntemi)

Denklem (3) ve (4) aşağıdaki gibi de yazılabilir:

$$dV = w(x)dx$$

$$dM = V(x)dx$$

Bu iki denklemin her iki tarafı integre edilirse:

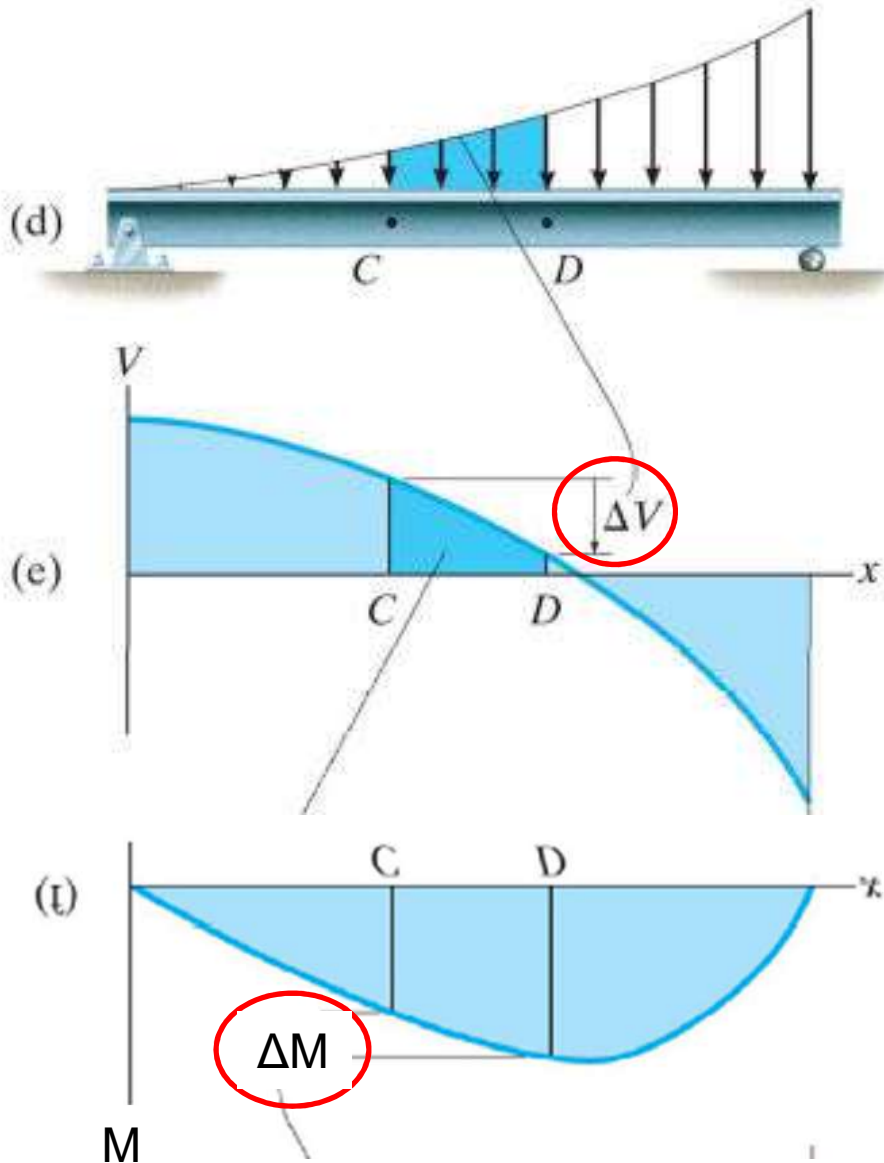
Kesme kuvvetindeki değişim Yayılı yük altında kalan alan

$$\Delta V = \int w(x)dx$$

$$\Delta M = \int V(x)dx$$

Momentteki değişim Kesme kuvveti diyagramı
Altında kalan alan

Kesme ve Moment Diyagramlarının Oluşturulması için Grafiksel Yöntem (Alan Yöntemi)



$$\Delta V = \int w(x) dx$$

$$\Delta M = \int V(x) dx$$

Bu integral ilişkisinden dolayı:

Eğer $w(x)$ n . dereceden bir fonksiyon ise

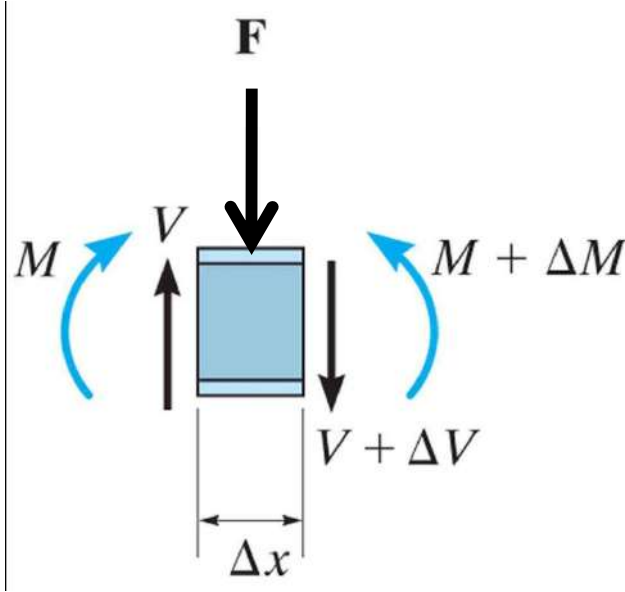
$V(x)$ $n+1$. dereceden

$M(x)$ $n+2$. dereceden

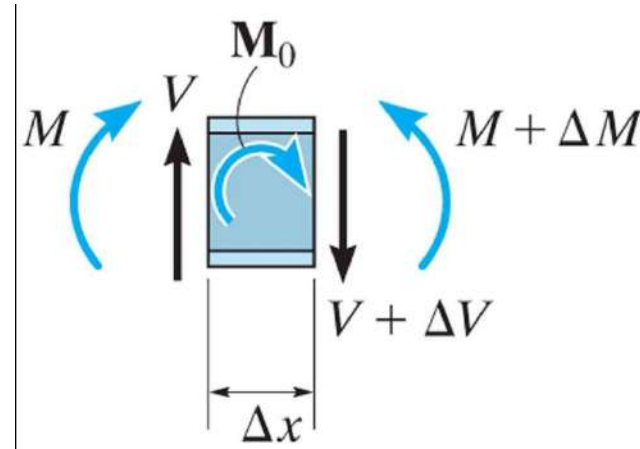
funksiyonlar olacaktır!

Kesme ve Moment Diyagramlarının Oluşturulması için Grafiksel Yöntem (Alan Yöntemi)

Tekil kuvvet ve **tekil momentlerin** olduğu noktalardaki kesme kuvveti ve moment değişimi ne olmaktadır? Bu soruyu aşağıdaki grafikleri inceleyerek cevaplayabiliriz:



Tekil (Konsantre) Kuvvet



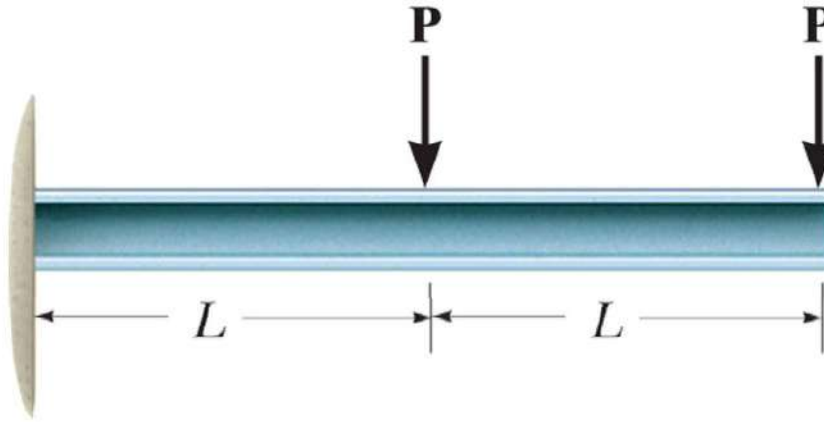
Tekil (Konsantre) Moment

$\Delta V = -F$ F aşağıya doğruysa kesme kuv. Diyagramında negatif yönde bir sıçrama olacaktır! Ters durumda pozitif yönde olacaktır.

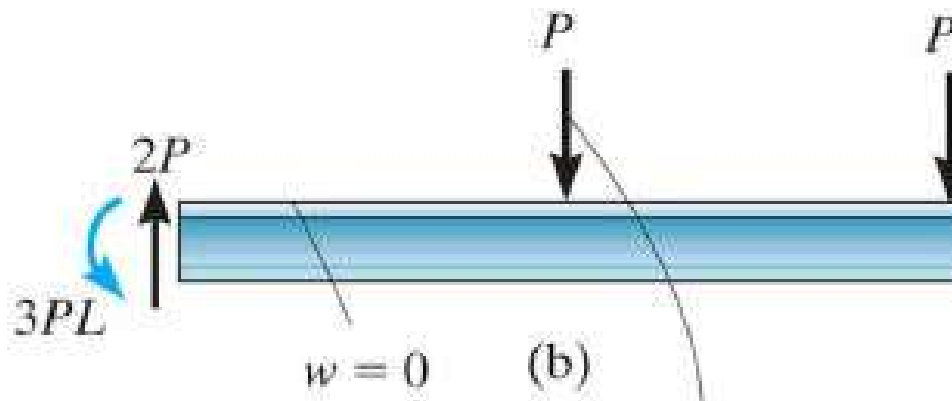
$\Delta M = M_0$ Saat akrebi yönünde etkiyen M_0 durumunda moment diyagramında pozitif yönde bir sıçrama olacaktır! Ters durumda, negatif yönde olacaktır.

Kesme ve Moment Diyagramlarının Oluşturulması için Grafiksel Yöntem (Alan Yöntemi)

Örnek 1: Şekilde gösterilen ankastre kirişin kesme kuvveti ve moment diyagramlarını alan yöntemi ile bulunuz.



İlk önce mesnet kuvvetlerini bularak başlayalım:



Örnek 1 (devam):

Alan metodu için çıkardığımız ifadeleri hatırlayalım:

$$\frac{dV}{dx} = w(x)$$

$$\Delta V = \int w(x) dx$$

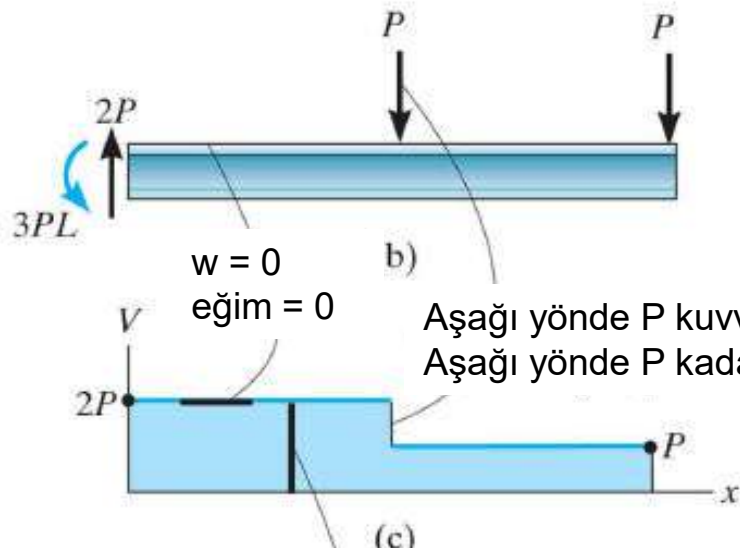
$$\Delta V = -F$$

$$\frac{dM}{dx} = V$$

$$\Delta M = \int V(x) dx$$

ve

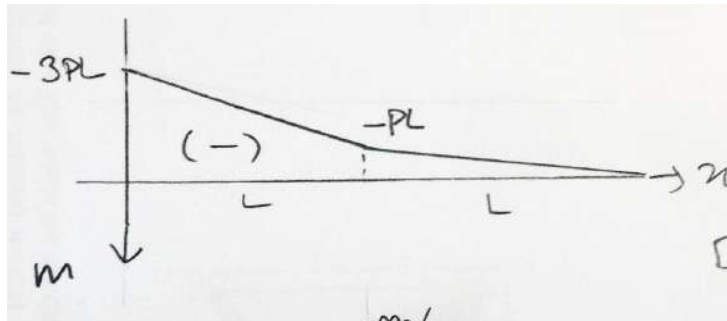
$$\Delta M = M_0$$



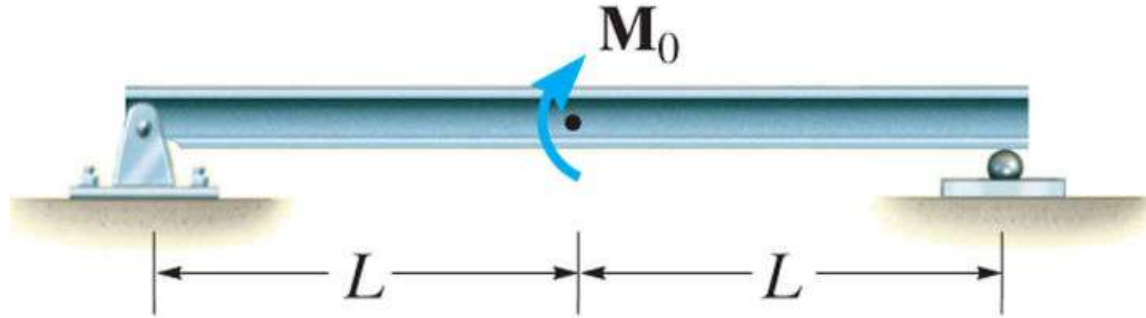
Aşağı yönde P kuvveti,
Aşağı yönde P kadar sıçrama.

$V = \text{sabit ve pozitif}$
 $\theta = \text{sabit ve pozitif}$

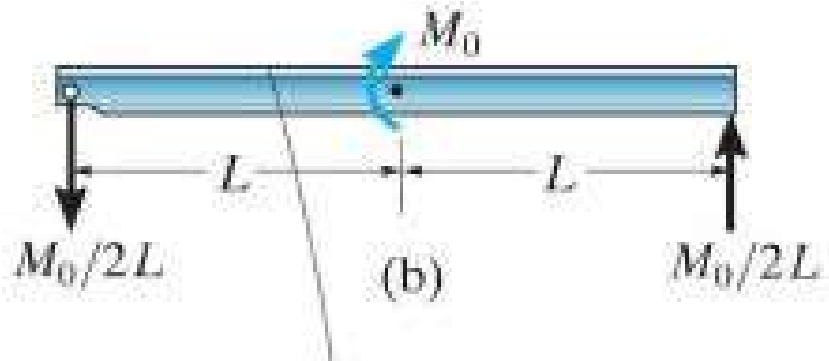
**Yayılı yük
olmadığından, kesme
diyagramının eğimi
0'dır.**



Örnek 2: Şekilde gösterilen basit mesnetli kirişin kesme kuvveti ve moment diyagramlarını alan yöntemi ile bulunuz.



İlk önce mesnet kuvvetlerini bularak başlayalım:



Mesnet kuvvetleri denge denklemleri uygulanarak bulunur:

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M = 0$$

Örnek 2 (devam):

Alan metodu için çıkardığımız ifadeleri hatırlayalım:

$$\frac{dV}{dx} = w(x)$$

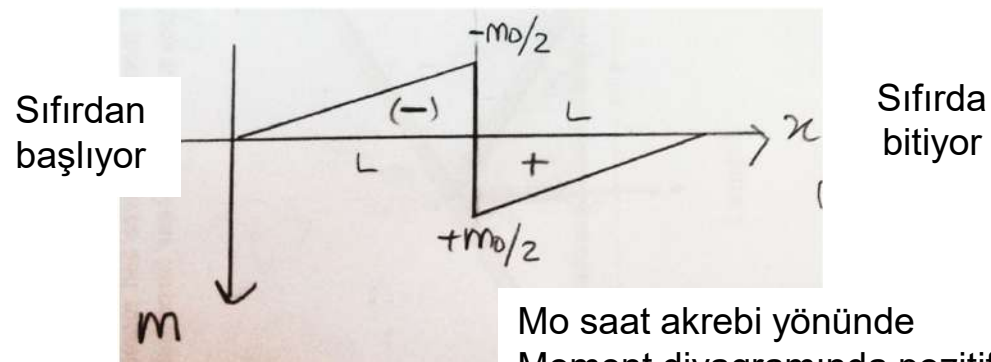
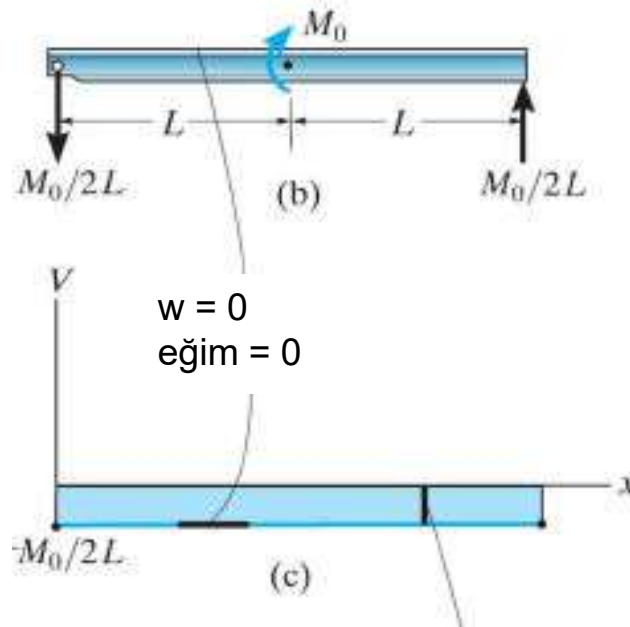
$$\frac{dM}{dx} = V$$

$$\Delta V = \int w(x) dx$$

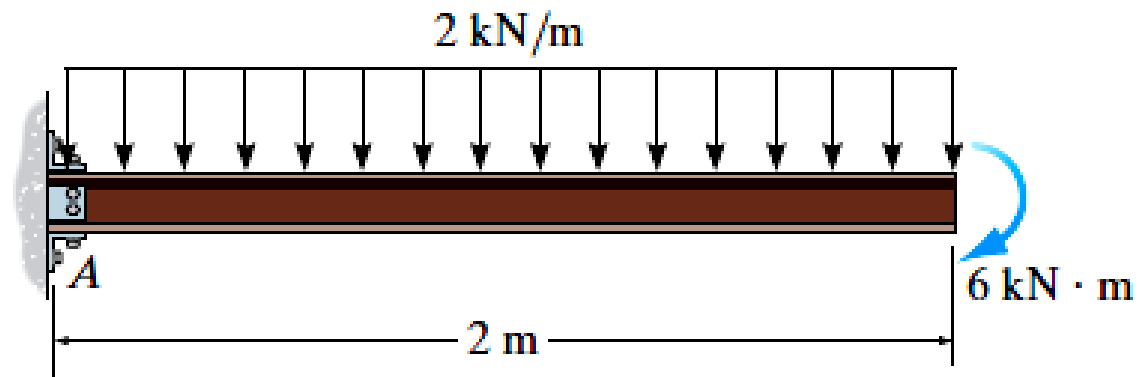
$$\Delta M = \int V(x) dx$$

$$\Delta V = -F$$

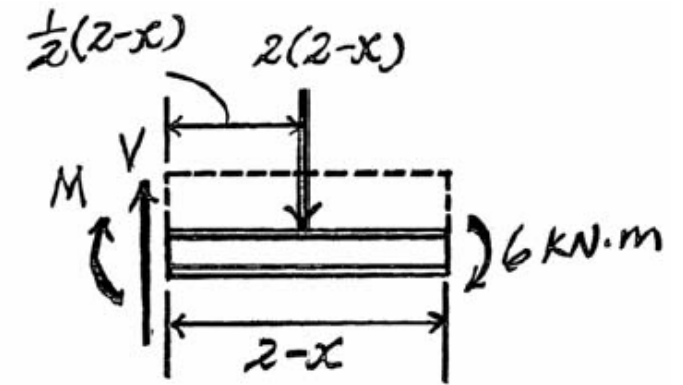
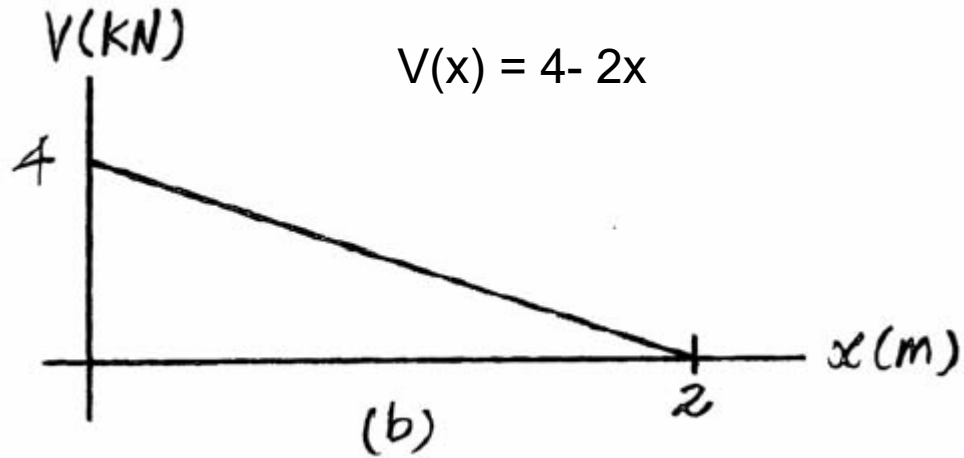
$$\Delta M = M_0$$



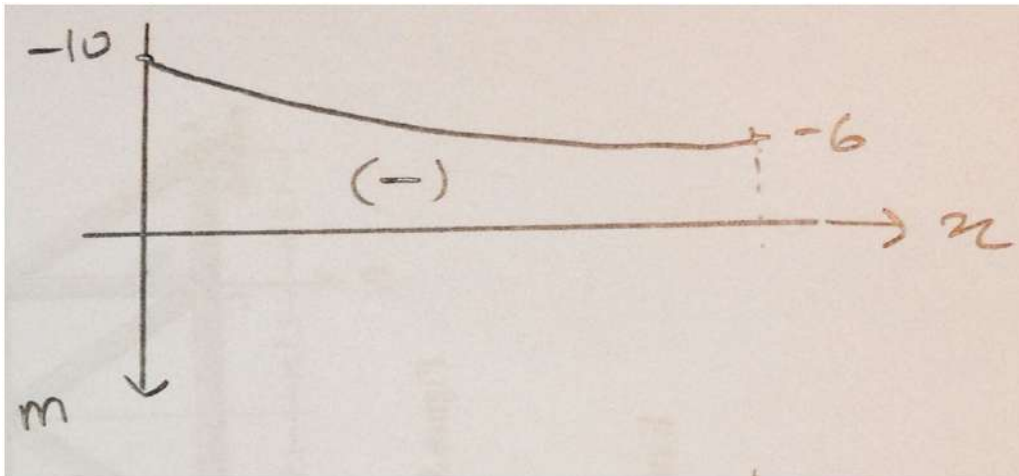
Örnek: Şekilde gösterilen ankastre kirişin kesme kuvveti ve moment diyagramlarını çiziniz.



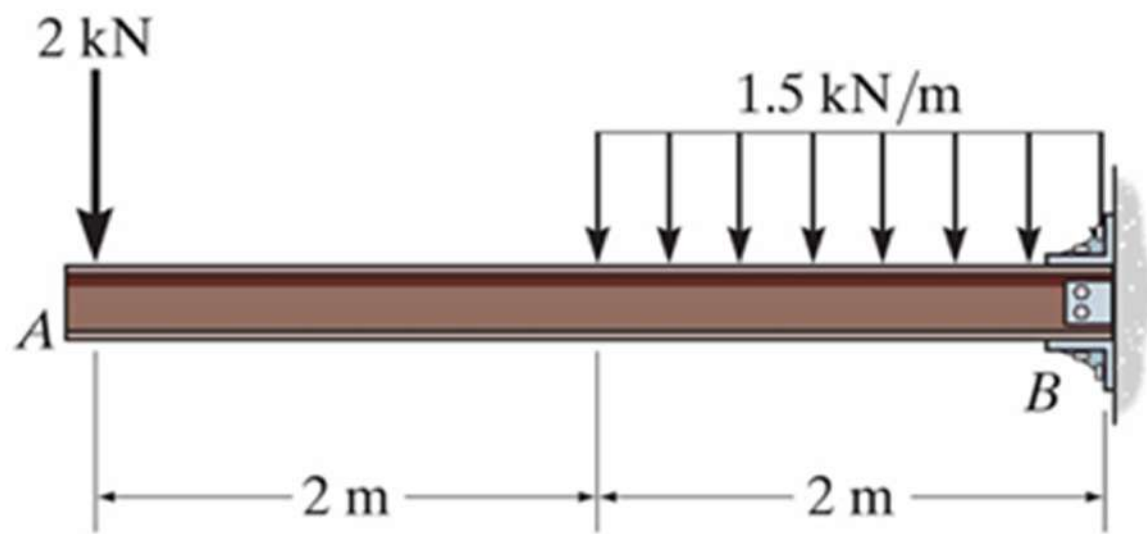
Diyagramlar

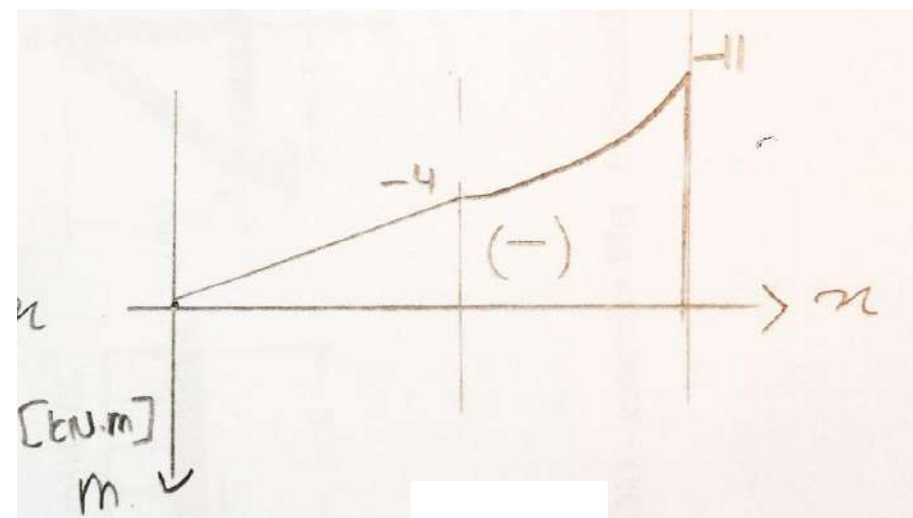
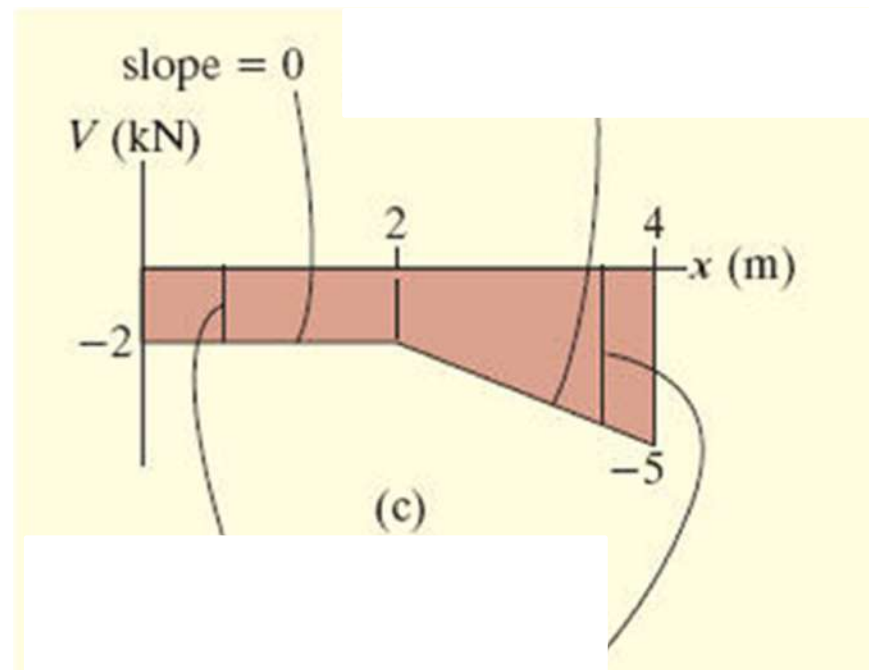


Tek bir kesit
incelenerek,
diyagramlara ait
denklemler bulunabilir.



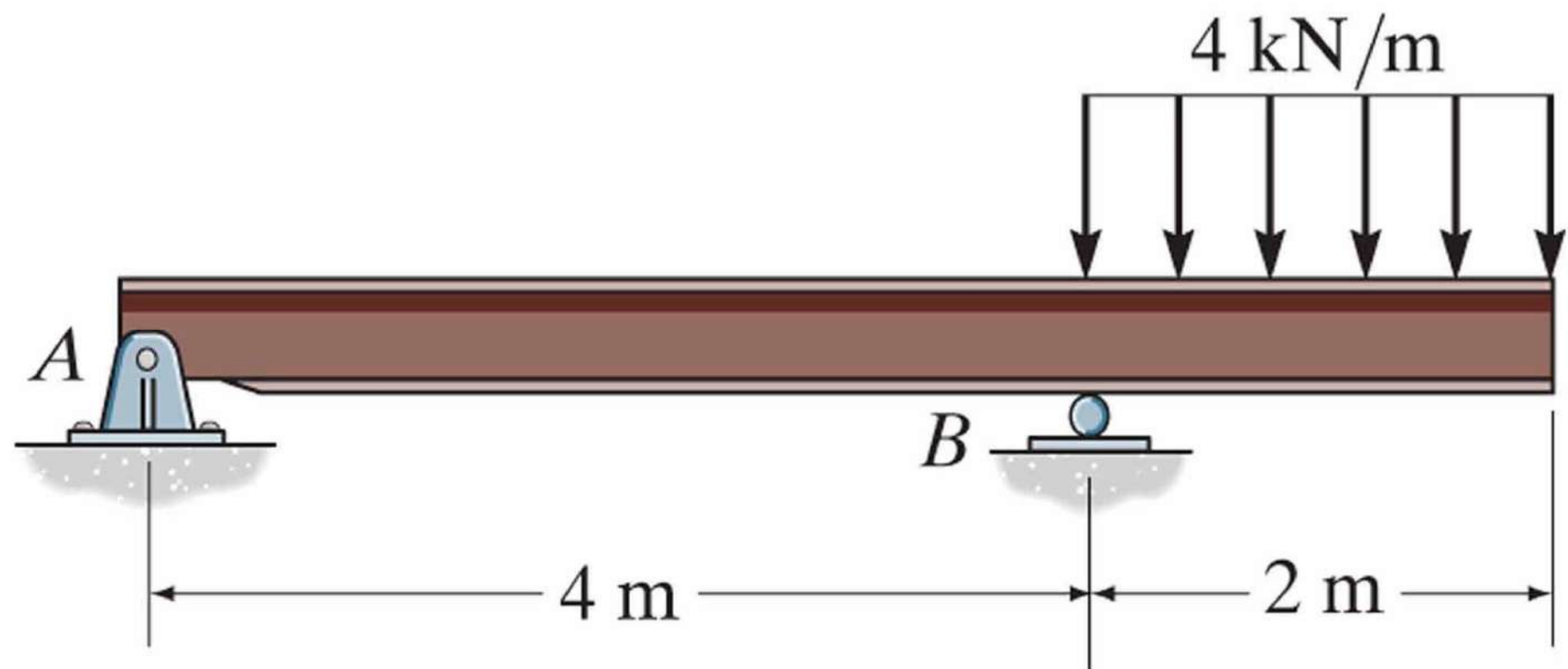
Ödev: Şekilde gösterilen ankastre kirişin kesme kuvveti ve moment diyagramlarını alan yöntemini kullanarak çiziniz.

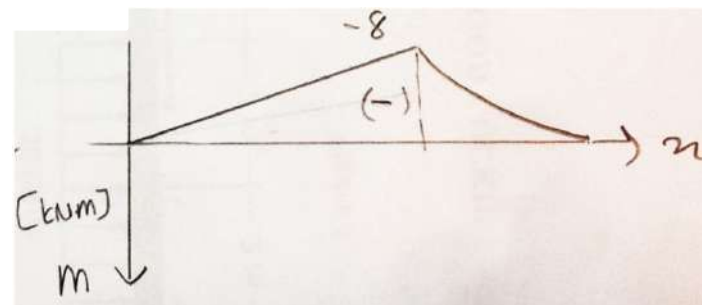
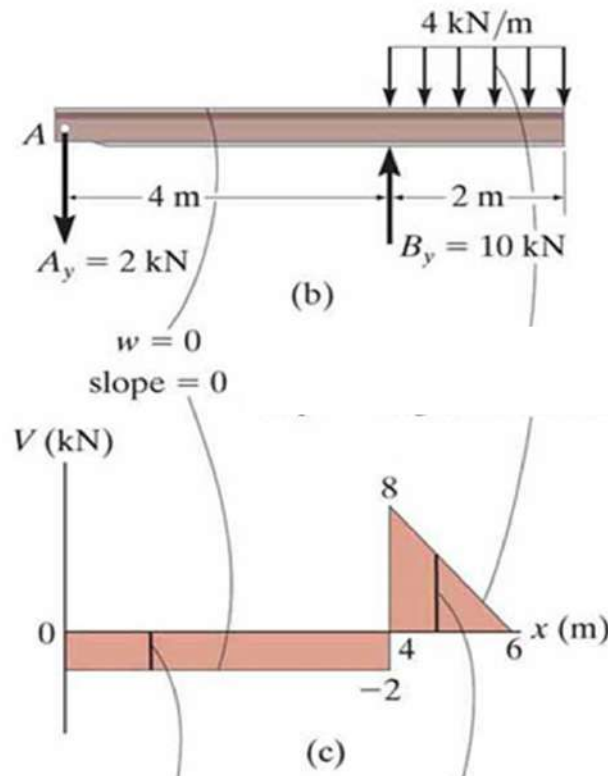




Ödev: Şekilde gösterilen alan yöntemini kullanarak çiziniz.

kirişin kesme kuvveti ve moment diyagramlarını





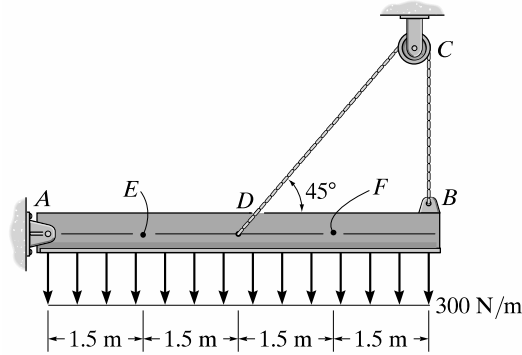


STATİK

BÖLÜM 7. İÇ KUVVETLER (INTERNAL FORCES)

ÖRNEK SORU ÇÖZÜMLERİ

1. Şekilde görülen kiriş üzerinde bulunan E ve F noktasındaki normal kuvvet, kesme kuvveti ve moment iç kuvvetlerini bulunuz.



ÇÖZÜM:

Şekil (a)'daki SCD dikkate alınarak mesnet reaksiyonları bulunur.

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0; & \quad T(6) + T \sin 45^\circ (3) - 300(6)(3) = 0 & \quad T = 664.92 \text{ N} \\ \sum F_x = 0; & \quad 664.92 \cos 45^\circ - A_x = 0 & \quad A_x = 470.17 \text{ N} \\ \sum F_y = 0; & \quad A_y + 664.92 \sin 45^\circ + 664.92 - 300(6) = 0 & \quad A_y = 664.92 \text{ N} \end{aligned}$$

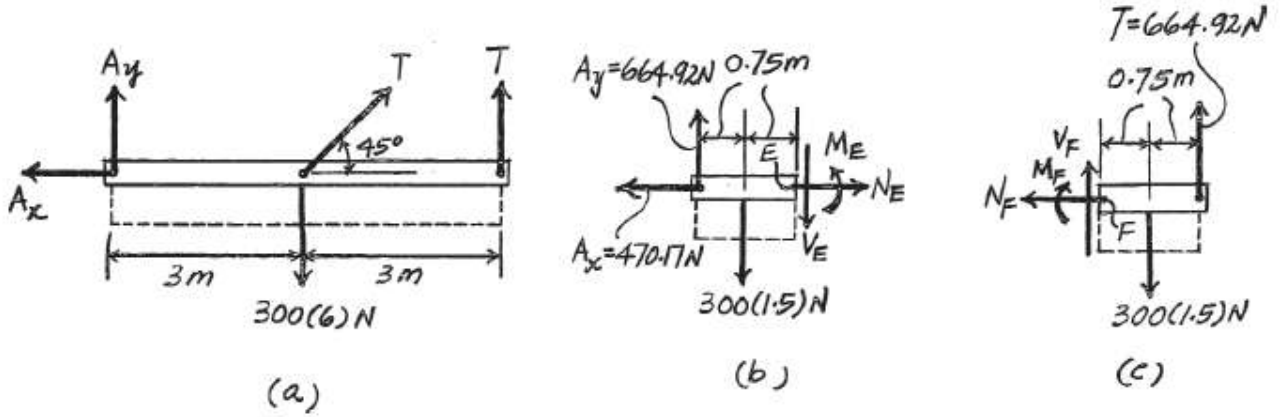
Mesnet reaksiyonları ve Şekil (b) dikkate alınarak E noktasındaki iç kuvvetler bulunur.

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0; & \quad N_E - 470.17 = 0 & \quad N_E = 470 \text{ N} & \quad \text{Ans} \\ \sum F_y = 0; & \quad 664.92 - 300(1.5) - V_E = 0 & \quad V_E = 215 \text{ N} & \quad \text{Ans} \\ \sum M_E = 0; & \quad M_E + 300(1.5)(0.75) - 664.92(1.5) = 0 & \quad M_E = 660 \text{ N} \cdot \text{m} & \quad \text{Ans} \end{aligned}$$

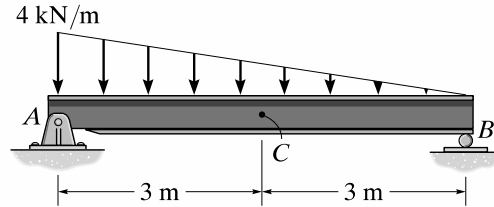
Benzer olarak Şekil (c) dikkate alınarak F noktasındaki iç kuvvetler bulunur.

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0; & \quad N_F = 0 & & \quad \text{Ans} \\ \sum F_y = 0; & \quad V_F + 664.92 - 300(1.5) = 0 & \quad V_F = 215 \text{ N} & \quad \text{Ans} \\ \sum M_F = 0; & \quad 664.92(1.5) - 300(1.5)(0.75) - M_F = 0 & \quad M_F = 660 \text{ N} \cdot \text{m} & \quad \text{Ans} \end{aligned}$$

Negatif işaret V_F 'nin SCD'de görülen yönün tersi yönde olduğunu göstermektedir.



2. Şekilde görülen basit mesnetli kiriş üzerinde bulunan C noktasındaki normal kuvvet, kesme kuvveti ve moment iç kuvvetlerini bulunuz.



ÇÖZÜM:

Şekil (a)'daki SCD dikkate alınarak mesnet reaksiyonları bulunur.

$$(+\sum M_A = 0; \quad B_y(6) - \frac{1}{2}(4)(6)(2) = 0 \quad B_y = 4 \text{ kN}$$

Mesnet reaksiyonları ve Şekil (c) dikkate alınarak C noktasındaki iç kuvvetler bulunur.

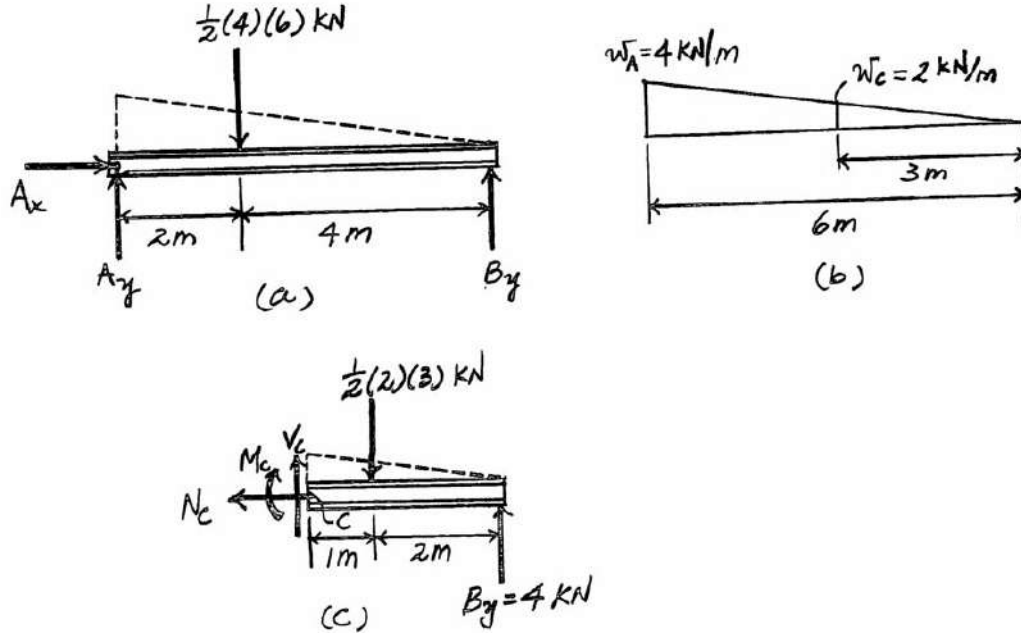
$$+\rightarrow \sum F_x = 0; \quad N_C = 0 \quad \text{Ans}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad 4 - \frac{1}{2}(2)(3) + V_C = 0 \quad V_C = -1 \text{ kN} \quad \text{Ans}$$

$$(+\sum M_C = 0; \quad 4(3) - \frac{1}{2}(2)(3)(1) - M_C = 0 \quad M_C = 9 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Ans}$$

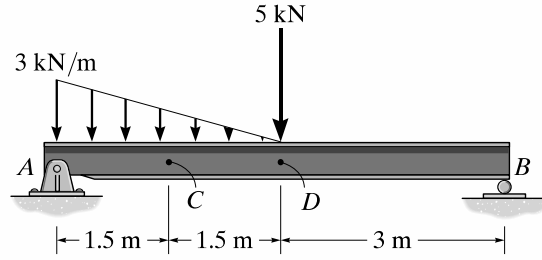


Negatif işaret V_C 'nin SCD'de görülen yönün tersi yönde olduğunu göstermektedir.





3. Şekilde görülen basit mesnetli kiriş üzerinde bulunan C ve D noktalarındaki normal kuvvet, kesme kuvveti ve moment iç kuvvetlerini bulunuz. D noktası 5 kN'lık kuvvetin hemen solunda yer almaktadır.



ÇÖZÜM:

Şekil (b)'den C noktasındaki yükün değeri üçgenlerin benzerliğinden bulunabilir.

$$\frac{w_C}{1.5} = \frac{3}{3} \text{ or } w_C = 1.5 \text{ kN / m}$$

Şekil (a)'dan yararlanılarak reaksiyonlar bulunur.

$$(+\sum M_A = 0; \quad B_y (6) - 5(3) - \frac{1}{2}(3)(3)(1) = 0 \quad B_y = 3.25 \text{ kN}$$

Mesnet reaksiyonları ve Şekil (c) dikkate alınarak C noktasındaki iç kuvvetler bulunur.

$$+\rightarrow \sum F_x = 0; \quad N_C = 0 \quad \text{Ans}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad V_C + 3.25 - \frac{1}{2}(1.5)(1.5) - 5 = 0 \quad V_C = 2.875 \text{ kN} \quad \text{Ans}$$

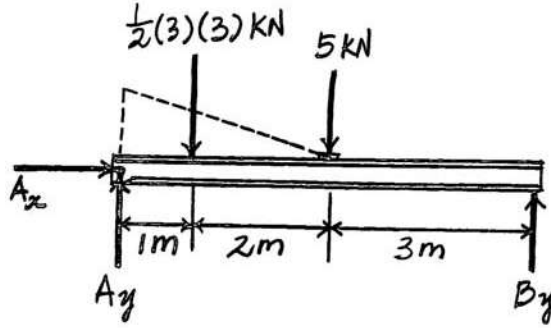
$$(+\sum M_C = 0; \quad 3.25(4.5) - \frac{1}{2}(1.5)(1.5)(0.5) - 5(1.5) - M_C = 0 \quad M_C = 6.56 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Ans}$$

Benzer şekilde, Şekil (d) dikkate alınarak D noktasındaki iç kuvvetler bulunur.

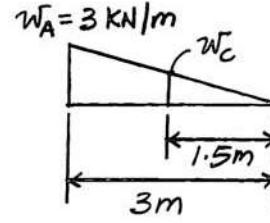
$$+\rightarrow \sum F_x = 0; \quad N_D = 0 \quad \text{Ans}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad V_D + 3.25 - 5 = 0 \quad V_D = 1.75 \text{ kN} \quad \text{Ans}$$

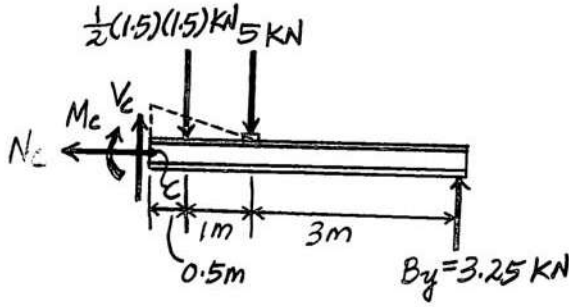
$$(+\sum M_D = 0; \quad 3.25(3) - M_D \quad M_D = 9.75 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Ans}$$



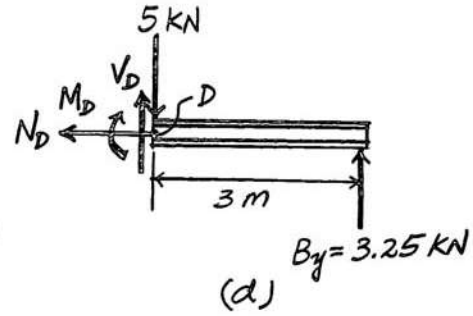
(a)



(b)

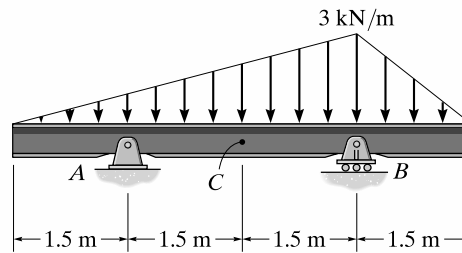


(c)



(d)

4. Şekilde görülen iki tarafından çıkmalı kiriş üzerinde bulunan C noktasındaki normal kuvvet, kesme kuvveti ve moment iç kuvvetlerini bulunuz.



ÇÖZÜM:

Şekil (b)'den C noktasındaki yükün değeri üçgenlerin benzerliğinden bulunabilir.

$$\frac{w_C}{3} = \frac{3}{4.5} \text{ or } w_C = 2 \text{ kN / m}$$



Şekil (a)'dan yararlanılarak reaksiyonlar bulunur.

$$(+\Sigma M_B = 0; \quad \frac{1}{2}(3)(4.5)(1.5) - \frac{1}{2}(3)(1.5)(0.5) - A_y(3) = 0 \quad A_y = 3 \text{ kN}$$

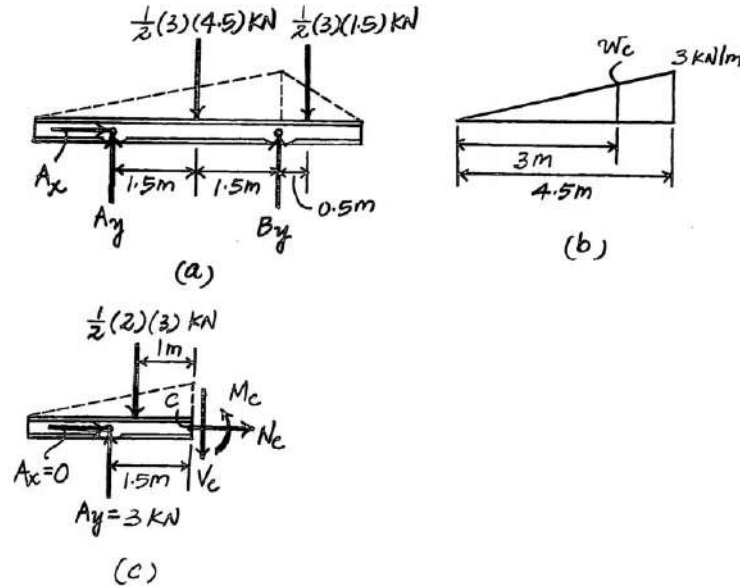
$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad A_x = 0$$

Mesnet reaksiyonları ve Şekil (c) dikkate alınarak C noktasındaki iç kuvvetler bulunur.

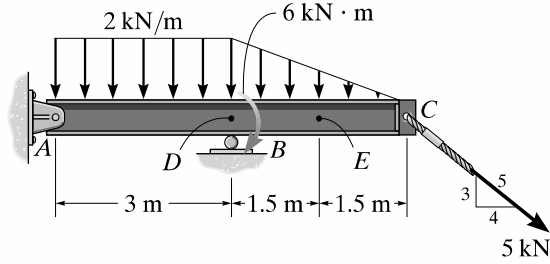
$$+\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad N_C = 0 \quad \text{Ans}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 3 - \frac{1}{2}(2)(3) - V_C = 0 \quad V_C = 0 \quad \text{Ans}$$

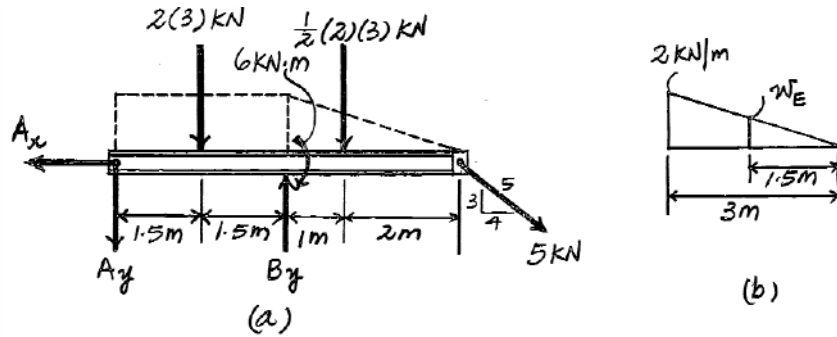
$$(+\Sigma M_C = 0; \quad M_C + \frac{1}{2}(2)(3)(1) - 3(1.5) = 0 \quad M_C = 1.5 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Ans}$$



5. Şekilde görülen çıkmalı kirişteki D ve E noktalarındaki normal kuvvet, kesme kuvveti ve moment iç kuvvetlerini hesaplayınız. D noktası dış momentin etki ettiği B hareketli mesnedinin hemen solunda yer almaktadır.



ÇÖZÜM:



E noktasındaki üçgen yayılı yükün değeri Şekil b'de üçgenlerin benzerliğinden bulunabilir. Şekil a dikkate alındığında;

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0; \quad & B_y(3) - 2(3)(1.5) - 6 - \frac{1}{2}(2)(3)(4) - 5\left(\frac{3}{5}\right)(6) = 0 \\ & B_y = 15 \text{ kN} \end{aligned}$$

Bu sonuçlar kullanılarak ve Şekil c dikkate alınarak;

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0; \quad & 5\left(\frac{4}{5}\right) - N_D = 0 & N_D = 4 \text{ kN} & \text{Ans} \\ \sum F_y = 0; \quad & V_D + 15 - \frac{1}{2}(2)(3) - 5\left(\frac{3}{5}\right) = 0 & V_D = -9 \text{ kN} & \text{Ans} \\ \sum M_D = 0; \quad & -M_D - 6 - \frac{1}{2}(2)(3)(1) - 5\left(\frac{3}{5}\right)(3) = 0 & M_D = 18 \text{ kN} \cdot \text{m} & \text{Ans} \end{aligned}$$



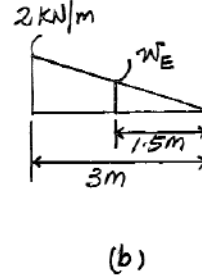
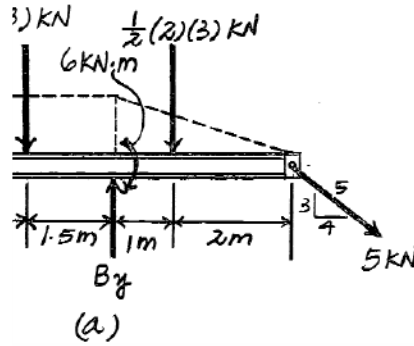
Ayrıca, Şekil d dikkate alınarak aşağıdaki ifadeleri yazabiliriz.

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0; \quad 5 \left(\frac{4}{5} \right) - N_E = 0 \quad N_E = 4 \text{ kN} \quad \text{Ans}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad V_E - \frac{1}{2} (1)(1.5) - 5 \left(\frac{3}{5} \right) = 0 \quad V_E = 3.75 \text{ kN} \quad \text{Ans}$$

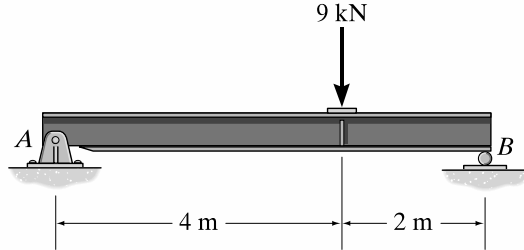
$$\curvearrowleft \Sigma M_E = 0; \quad -M_E - \frac{1}{2} (1)(1.5)(0.5) - 5 \left(\frac{3}{5} \right) (1.5) = 0 \quad M_E = -4.875 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad \text{Ans}$$

Negatif bulunan işaretli iç kuvvetler SCD'de gösterilen yönlerin tersi yönde etki ettiklerini göstermektedir.





6. Şekilde görülen basit mesnetli kirişin kesme kuvvet ve moment diyagramlarını çiziniz.



ÇÖZÜM:

Şekil b'de görülen 1. bölgede:

$$0 \leq x < 4 \text{ m,}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 3 - V = 0 \quad V = 3 \text{ kN} \quad (1)$$

$$(\rightarrow +) \Sigma M = 0; \quad M - 3x = 0 \quad M = \{3x\} \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (2)$$

Şekil c'de görülen 2. bölgede:

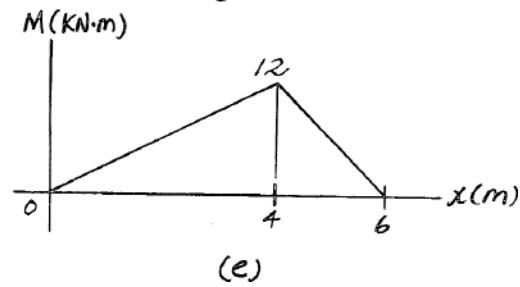
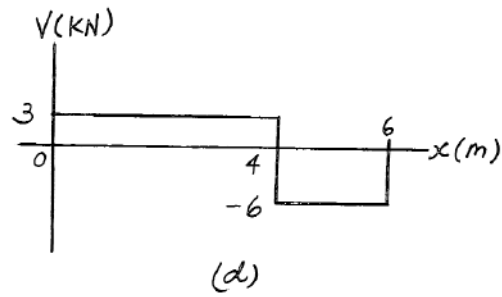
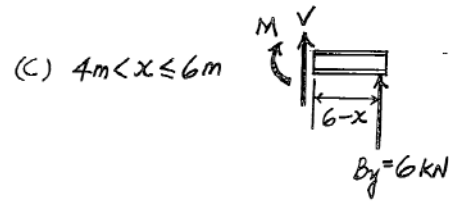
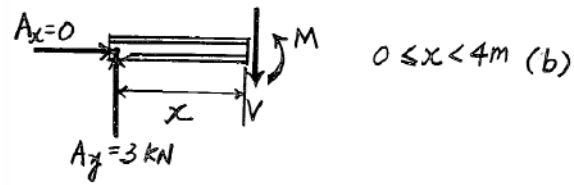
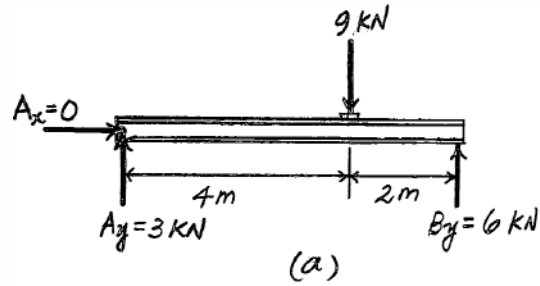
$$4 \text{ m} < x \leq 6 \text{ m,}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad V + 6 = 0 \quad V = -6 \text{ kN} \quad (3)$$

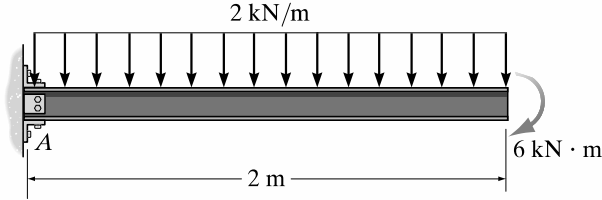
$$(\rightarrow +) \Sigma M = 0; \quad 6(6 - x) - M = 0 \quad M = \{36 - 6x\} \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (4)$$

Şekil d ve e'de görülen kesme kuvvet ve moment diyagramları yukarıdaki dört denklem kullanılarak çizilebilir. $x = 4 \text{ m}$ 'deki momentin değeri ya Denklem 2 ya da Denklem 4 kullanılarak bulunabilir.

$$M|_{x=4 \text{ m}} = 3(4) = 12 \text{ kN} \cdot \text{m} \text{ or } M|_{x=4 \text{ m}} = 36 - 6(4) = 12 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



7. Şekilde görülen konsol kirişin kesme kuvvet ve moment diyagramlarını çiziniz.



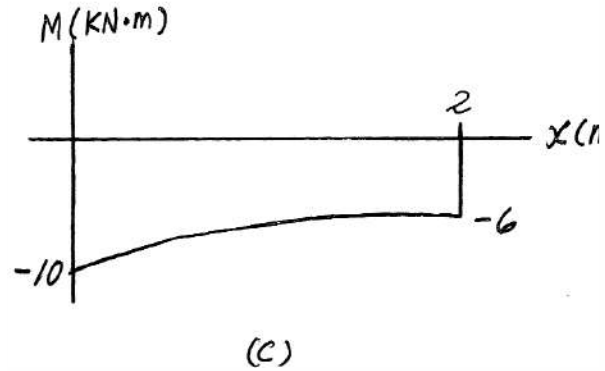
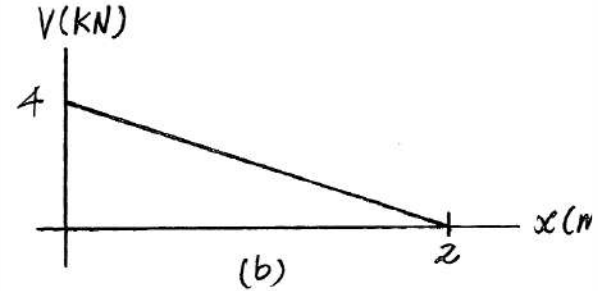
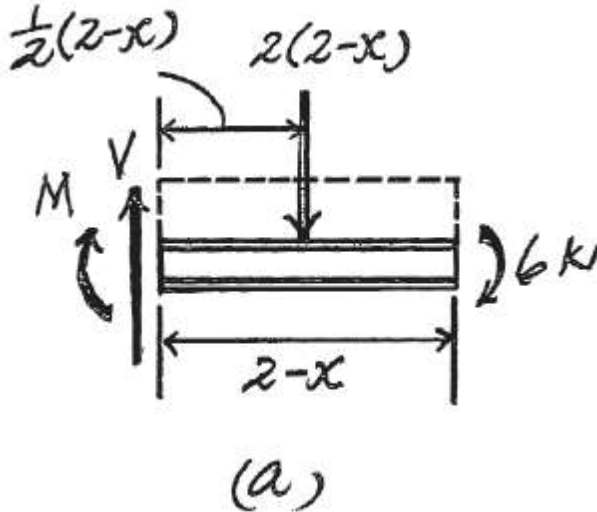
ÇÖZÜM:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad V - 2(2 - x) = 0 \quad V = \{4 - 2x\} \text{ kN} \quad (1)$$

$$+\Sigma M = 0; \quad -M - 2(2 - x) \left[\frac{1}{2} (2 - x) \right] - 6 = 0 \quad M = \{-x^2 + 4x - 10\} \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (2)$$

$$V|_{x=0} = 4 - 2(0) = 4 \text{ kN}$$

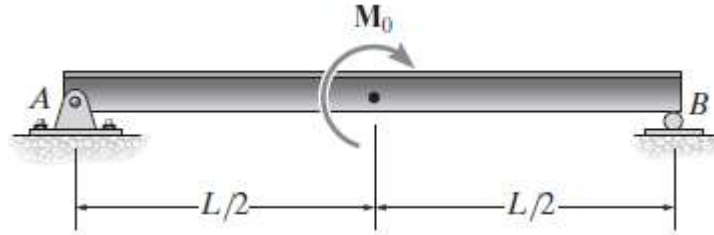
$$M|_{x=0} = [-0 + 4(0) - 10] = -10 \text{ kN} \cdot \text{m}$$



8. Şekilde görülen basit mesnetli kirişin kesme kuvvet ve moment diyagramlarını;

a) Şekilde verilen parametrelere göre çiziniz.

b) $M_0 = 500 \text{ N.m}$ ve $L = 8 \text{ m}$ alarak çiziniz.



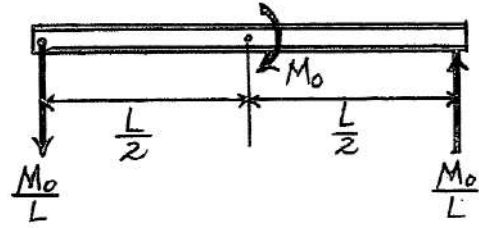
ÇÖZÜM:

(a) $0 \leq x < \frac{L}{2}$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad -\frac{M_0}{L} - V = 0$$

$$V = -\frac{M_0}{L}$$

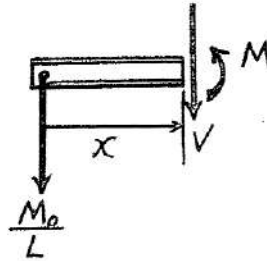
Ans



$$(+\Sigma M = 0; \quad M + \frac{M_0}{L} x = 0$$

$$M = -\frac{M_0}{L} x$$

Ans

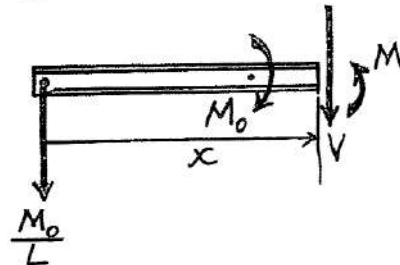


$$\frac{L}{2} < x \leq L$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad -\frac{M_0}{L} - V = 0$$

$$V = -\frac{M_0}{L}$$

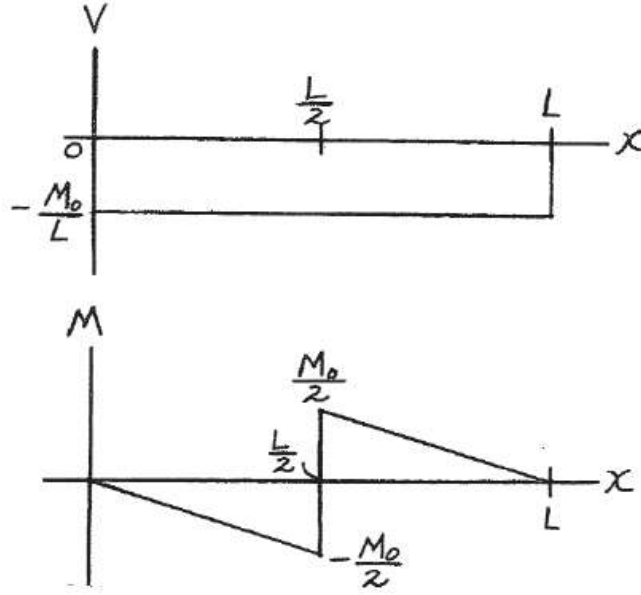
Ans



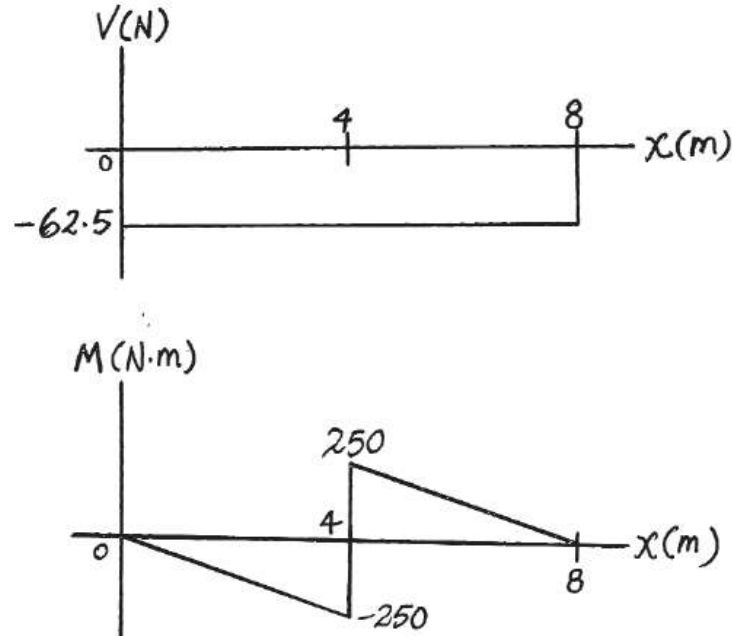
$$(+\Sigma M = 0; \quad M + \frac{M_0}{L} x - M_0 = 0$$

$$M = M_0 \left(1 - \frac{x}{L} \right)$$

Ans

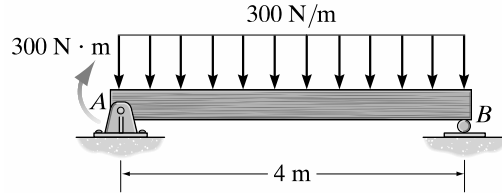


(b) $M_0 = 500 \text{ N.m}$ ve $L = 8 \text{ m}$ alındığında aşağıdaki diyagramlar çizilebilmektedir.





9. Şekilde görülen basit mesnetli kirişin kesme kuvvet ve moment diyagramlarını;



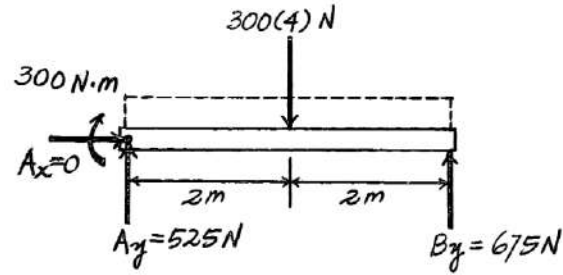
ÇÖZÜM:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 525 - 300x - V = 0 \quad V = \{525 - 300x\} \text{ kN} \quad (1)$$

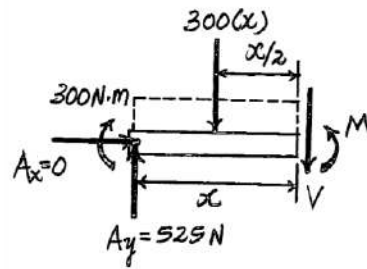
$$+\Sigma M = 0; \quad M + 300x \left(\frac{x}{2} \right) - 525x - 300 = 0 \quad M = \{-150x^2 + 525x + 300\} \text{ N} \cdot \text{m} \quad (2)$$

$$0 = 525 - 300x \quad x = 1.75 \text{ m}$$

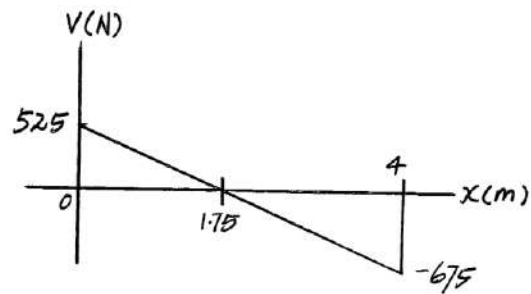
$$M|_{x=1.75 \text{ m}} = -150(1.75^2) + 525(1.75) + 300 = 759 \text{ N} \cdot \text{m}$$



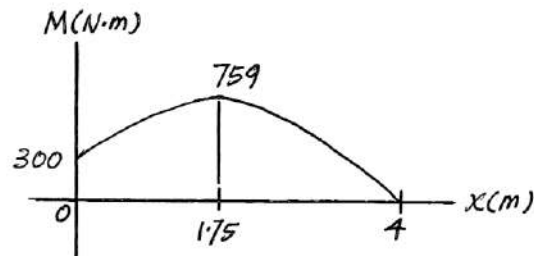
(a)



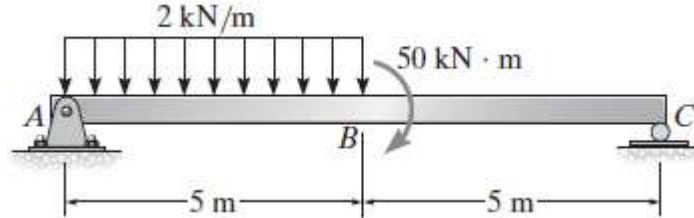
(b)



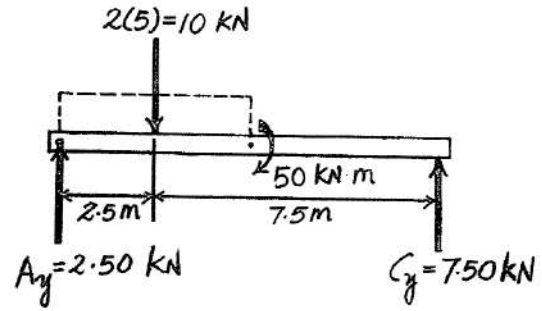
(c)



9. Şekilde görülen basit mesnetli kirişin kesme kuvvet ve moment diyagramlarını;



ÇÖZÜM:



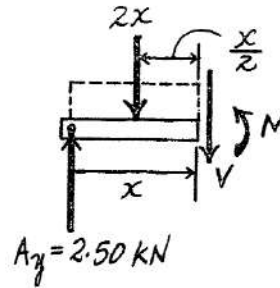
$0 \leq x < 5 \text{ m}$:

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 2.5 - 2x - V = 0$$

$$V = 2.5 - 2x$$

$$(\circlearrowleft +) \Sigma M = 0; \quad M + 2x \left(\frac{1}{2}x \right) - 2.5x = 0$$

$$M = 2.5x - x^2$$



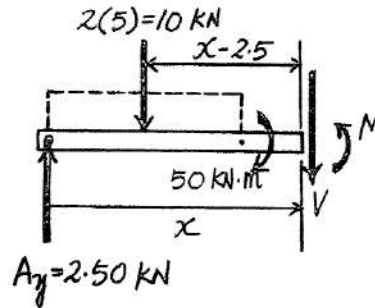
$5 \text{ m} < x < 10 \text{ m}$:

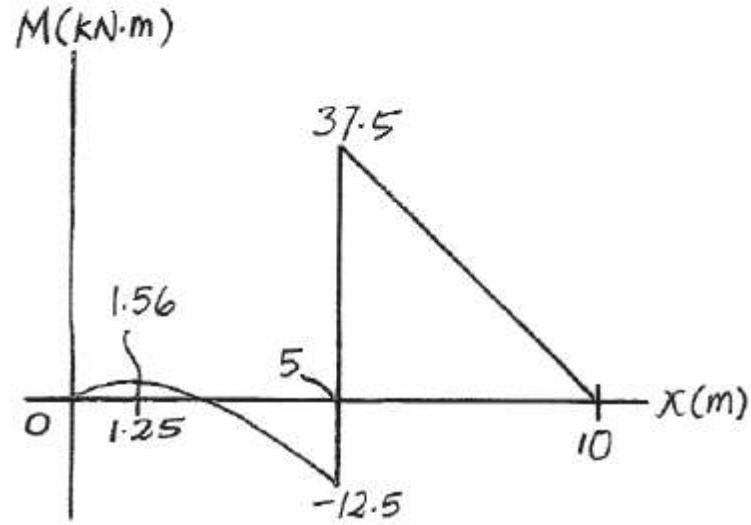
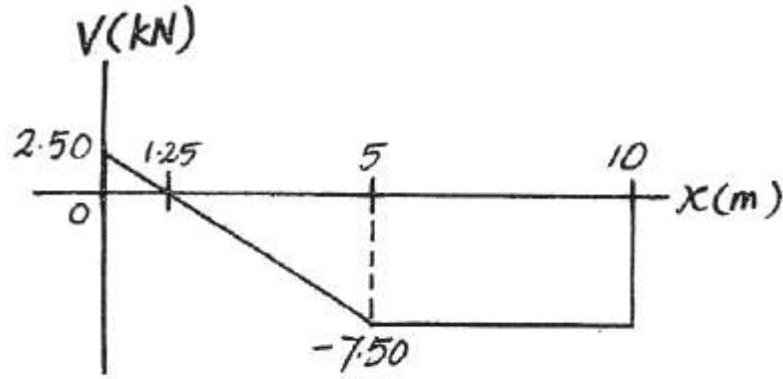
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad 2.5 - 10 - V = 0$$

$$V = -7.5$$

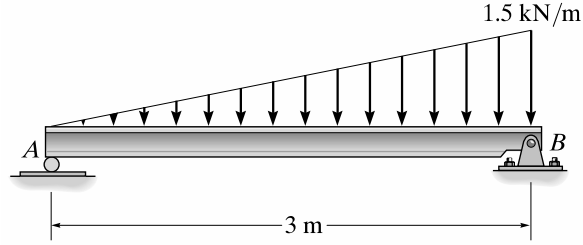
$$(\circlearrowleft +) \Sigma M = 0; \quad M + 10(x - 2.5) - 2.5x - 50 = 0$$

$$M = -7.5x + 75$$





10. Şekilde görülen basit mesnetli kirişin kesme kuvvet ve moment diyagramlarını;



ÇÖZÜM:

$$+\uparrow \sum F_y = 0; \quad 0.75 - \frac{1}{2} x (0.5 x) - V = 0$$

$$V = 0.75 - 0.25x^2$$

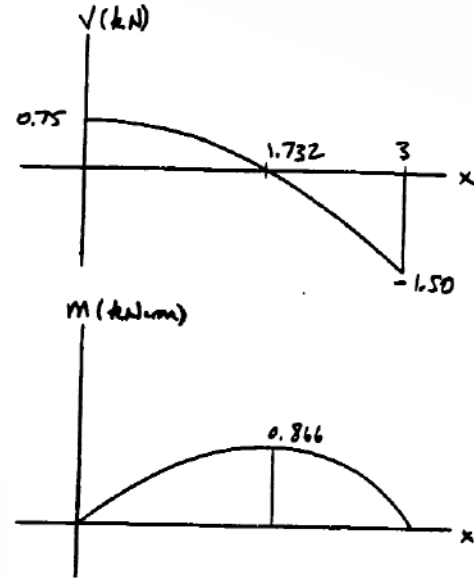
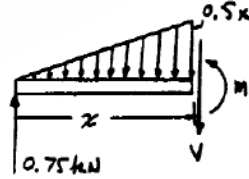
$$V = 0 = 0.75 - 0.25x^2$$

$$x = 1.732 \text{ m}$$

$$(+\sum M = 0; \quad M + \left(\frac{1}{2}\right) (0.5 x)(x) \left(\frac{1}{3} x\right) - 0.75x = 0$$

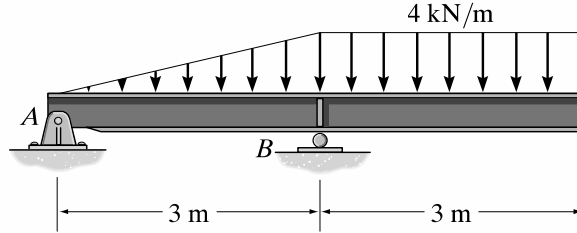
$$M = 0.75x - 0.08333x^3$$

$$M_{max} = 0.75 (1.732) - 0.08333 (1.732)^3 = 0.866$$





11. Şekilde görülen çıkmalı kirişin kesme kuvvet ve moment diyagramlarını;



ÇÖZÜM:

AB aralığı için:

$$0 \leq x < 3 \text{ m,}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad -4 - \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} x \right) (x) - V = 0 \quad V = \left\{ -\frac{2}{3} x^2 - 4 \right\} \text{ kN} \quad (1)$$

$$(\circlearrowleft +) \Sigma M = 0; \quad M + \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} x \right) (x) \left(\frac{x}{3} \right) + 4x = 0 \quad M = \left\{ -\frac{2}{9} x^3 - 4x \right\} \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (2)$$

BC aralığı için:

$$3 \text{ m} < x \leq 6 \text{ m,}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \quad V - 4(6 - x) = 0 \quad V = \{ 24 - 4x \} \text{ kN} \quad (3)$$

$$(\circlearrowleft +) \Sigma M = 0; \quad -M - 4(6 - x) \left[\frac{1}{2} (6 - x) \right] = 0 \quad M = \{ -2(6 - x)^2 \} \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (4)$$

$x=3 \text{ m}$ için B mesnedinin sağ ve solundaki kesme kuvvetleri Denklem 1 ve 3 kullanılarak ayrı ayrı bulunur.

$$V|_{x=3 \text{ m}^-} = -\frac{2}{3} (3^2) - 4 = -10 \text{ kN}$$

$$V|_{x=3 \text{ m}^+} = 24 - 4(3) = 12 \text{ kN}$$

$x=3 \text{ m}$ için moment değeri de Denklem 2 veya 4 kullanılarak elde edilebilir.

$$M|_{x=3 \text{ m}} = -\frac{2}{9} (3^3) - 4(3) = -18 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

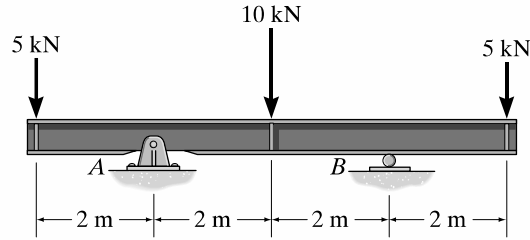
ya da



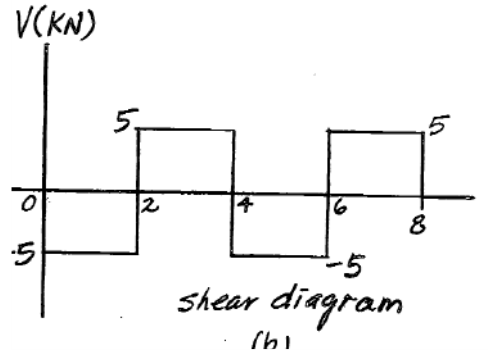
$$M|_{x=3\text{ m}} = -2(6-3)^2 = -18 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

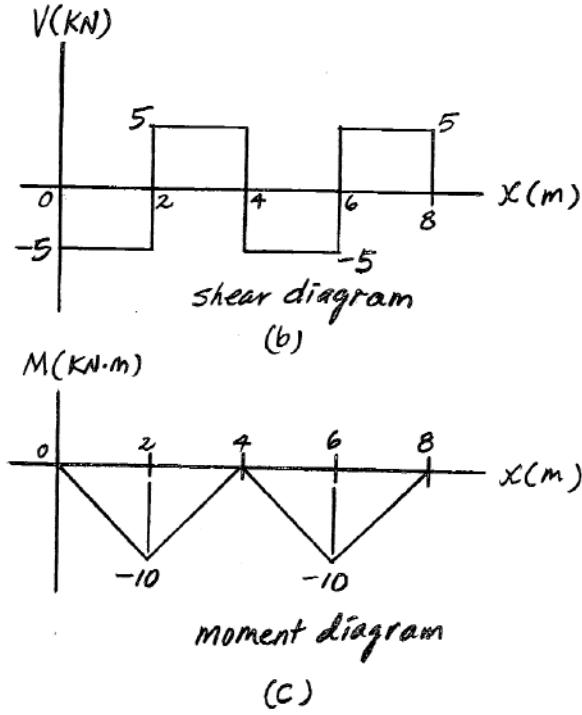
Elde edilen denklemlere göre moment ve kesme kuvvet diyagramları çizilebilir.

12. Şekilde görülen iki tarafından çıkmalı kirişin kesme kuvvet ve moment diyagramlarını;

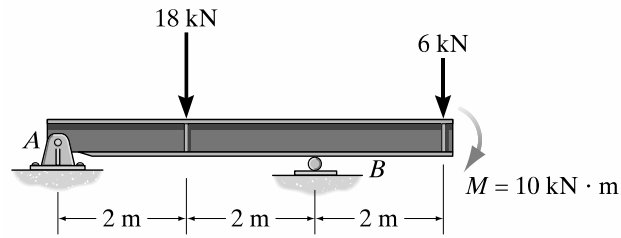


ÇÖZÜM:

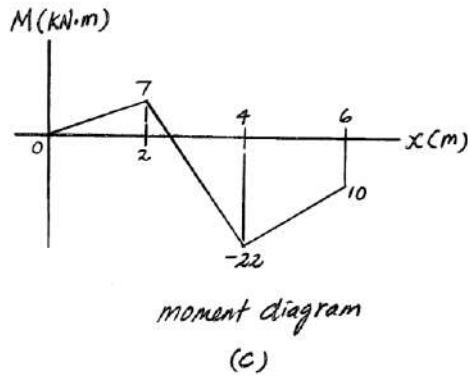
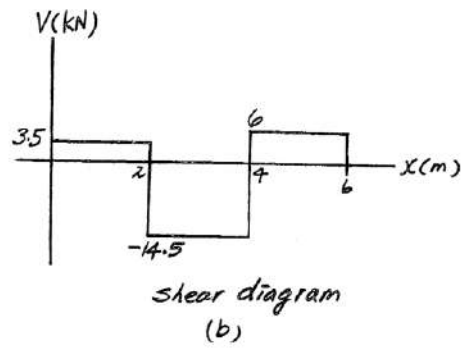
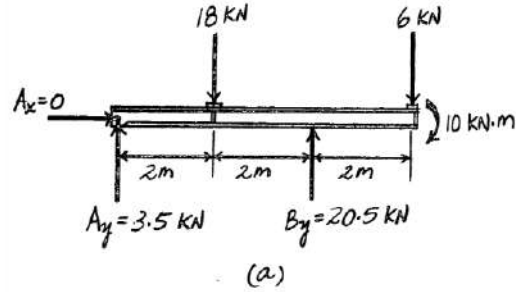




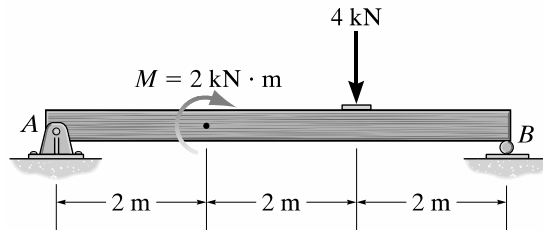
13. Şekilde görülen iki tarafından çıkmalı kirişin kesme kuvvet ve moment diyagramlarını;



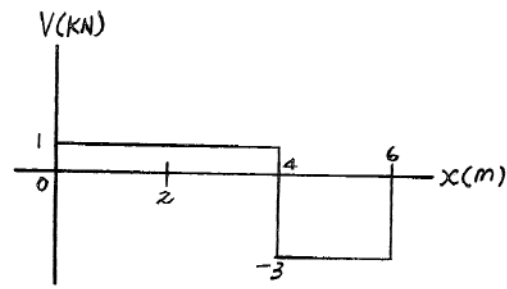
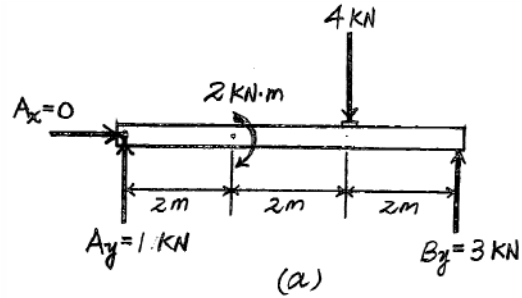
ÇÖZÜM:



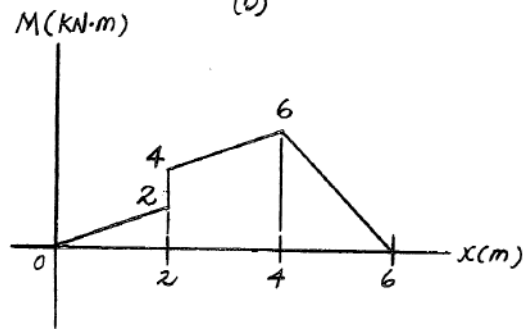
14. Şekilde görülen iki tarafından çıkmalı kirişin kesme kuvvet ve moment diyagramlarını;



ÇÖZÜM:



Shear diagram
(b)



moment diagram
(c)

Engineering Mechanics: Statics in SI Units, 12e

8. Ağırlık Merkezi ve Geometrik Merkez (Center of Gravity and Centroid)

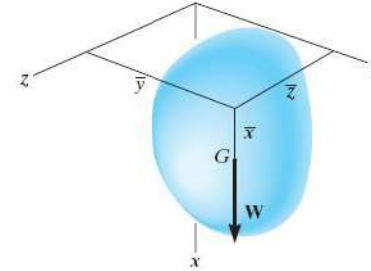
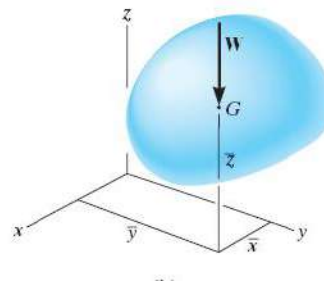
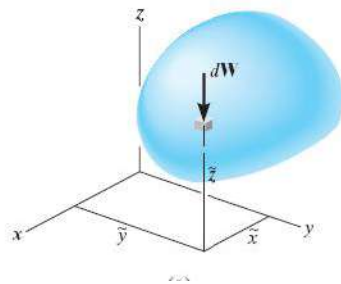
Bu bölümde öğrenilecek konular

- Ağırlık merkezi ve kütle merkezi kavramları
- Rastgele bir şekle sahip bir cismin ve ayrık parçalar sisteminin ağırlık merkezinin yerinin bulunması
- Pappus ve Guldinus Teoremi
- Genel olarak bir yayılı yük (distributed loading)'ün bileşkesinin bulunma yöntemi

9.1 Bir Parçacık Sistemi için Ağırlık Merkezi ve Kütle Merkezi

Ağırlık Merkezi (Center of Gravity)

- Bir parçacık sisteminin bileşke ağırlığının etkidiği noktayı ifade eder.
- Bir alanın içerisinde sabitlenmiş n adet parçacık sistemini düşününüz.
- Parçacıkların ağırlıkları, uygulama noktası G olarak tanımlanan tek ve eşdeğer bir bileşke ağırlığı ile değiştirilebilir.



9.1 Bir Parçacık Sistemi için Ağırlık Merkezi ve Kütle Merkezi (d'm)

Ağırlık Merkezi

- Bileşke ağırlık = n adet parçacığın toplam ağırlığı
$$W_R = \sum W$$
- Tüm parçacıkların ağırlıklarının x, y, z eksenlerine göre momentleri toplamı = Bileşke ağırlığın x, y, z eksenlerine göre momenti
- y-eksenine göre momentlerin toplamı,
$$\bar{x}W_R = \tilde{x}_1W_1 + \tilde{x}_2W_2 + \dots + \tilde{x}_nW_n$$
- x-eksenine göre momentlerin toplamı,
$$\bar{y}W_R = \tilde{y}_1W_1 + \tilde{y}_2W_2 + \dots + \tilde{y}_nW_n$$

9.1 Bir Parçacık Sistemi için Ağırlık Merkezi ve Kütle Merkezi (d'm)

Ağırlık Merkezi

- Ağırlıklar z eksenini etrafında bir moment üretmemekle birlikte, koordinat sistemini x veya y ekseninde içinde sabitlenmiş parçacıklar ile 90° döndürerek ve x eksenine göre alınan momentleri toplayarak şu ifade yazılabilir:

$$\bar{z}W_R = \tilde{z}_1W_1 + \tilde{z}_2W_2 + \dots + \tilde{z}_nW_n$$

- Genel bir şekilde şöyle yazılabilir:

$$\bar{x} = \frac{\sum \tilde{x}m}{\sum m}; \bar{y} = \frac{\sum \tilde{y}m}{\sum m}, \bar{z} = \frac{\sum \tilde{z}m}{\sum m}$$

9.1 Bir Parçacık Sistemi için Ağırlık Merkezi ve Kütle Merkezi (d'm)

Kütle Merkezi (Center of Mass)

- Her parçacık için g yerçekimi ivmesi nedeniyle sağlanan ivmelenme sabittir, Bu durumda **$W = mg$**

$$\bar{x} = \frac{\sum \tilde{x}m}{\sum m}; \bar{y} = \frac{\sum \tilde{y}m}{\sum m}, \bar{z} = \frac{\sum \tilde{z}m}{\sum m}$$

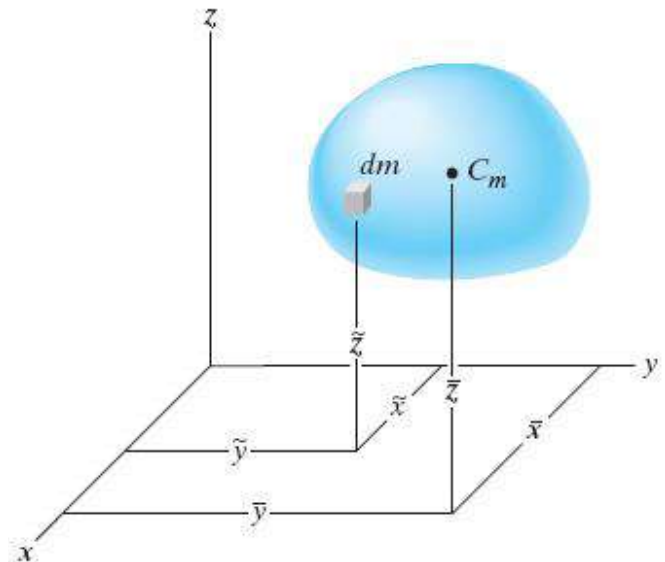
- Karşılaştırıldığında, ağırlık merkezi ile kütle merkezinin yeri çakışmaktadır.
- Parçacıklar yalnızca yer çekimi etkisi altındayken bir ağırlığa sahiptir, ancak kütle merkezi ise yerçekiminden bağımsızdır.

9.1 Bir Parçacık Sistemi için Ağırlık Merkezi ve Kütle Merkezi (d'm)

Kütle Merkezi

- A rigid body is composed of an infinite number of particles
- Consider arbitrary particle having a weight of dW

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x} dW}{\int dW}; \bar{y} = \frac{\int \tilde{y} dW}{\int dW}; \bar{z} = \frac{\int \tilde{z} dW}{\int dW}$$

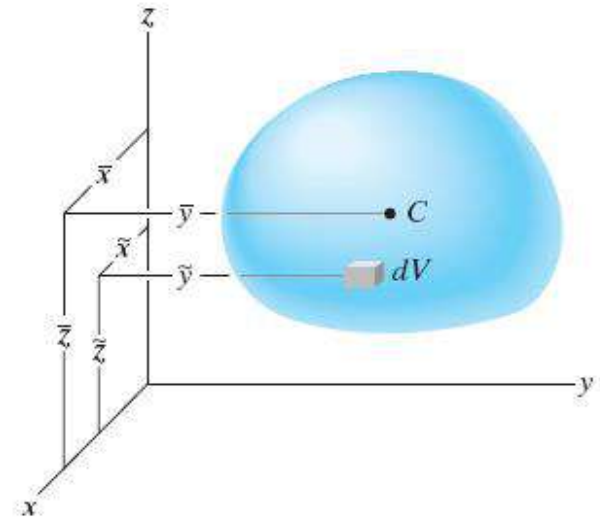


9.1 Bir Parçacık Sistemi için Ağırlık Merkezi ve Kütle Merkezi (d'm)

Bir Hacmin Merkezi (Centroid of a Volume)

- Consider an object subdivided into volume elements dV , for location of the centroid,

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x} dV}{\int_V dV}; \bar{y} = \frac{\int \tilde{y} dV}{\int_V dV}; \bar{z} = \frac{\int \tilde{z} dV}{\int_V dV}$$

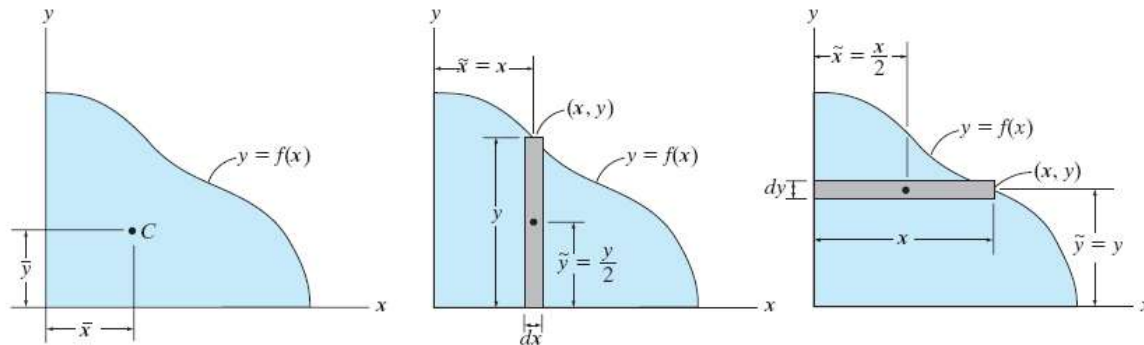


9.1 Bir Parçacık Sistemi için Ağırlık Merkezi ve Kütle Merkezi (d'm)

Bir Alanın Merkezi (Centroid of an Area)

- Plak ve kabuk gibi bir nesnenin yüzey alanının merkezi için, alan dA diferansiyel parçalara bölünür.

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x} dA}{\int_A dA}; \bar{y} = \frac{\int \tilde{y} dA}{\int_A dA}; \bar{z} = \frac{\int \tilde{z} dA}{\int_A dA}$$

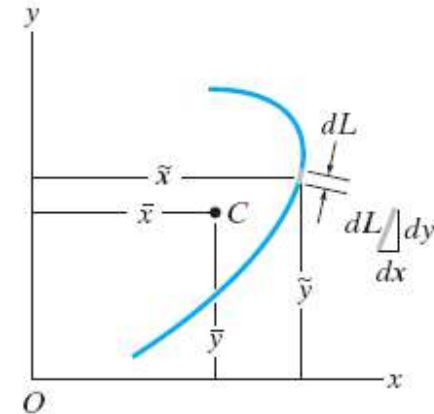


9.1 Bir Parçacık Sistemi için Ağırlık Merkezi ve Kütle Merkezi (d'm)

Bir Çizginin Merkezi (Centroid of a Line)

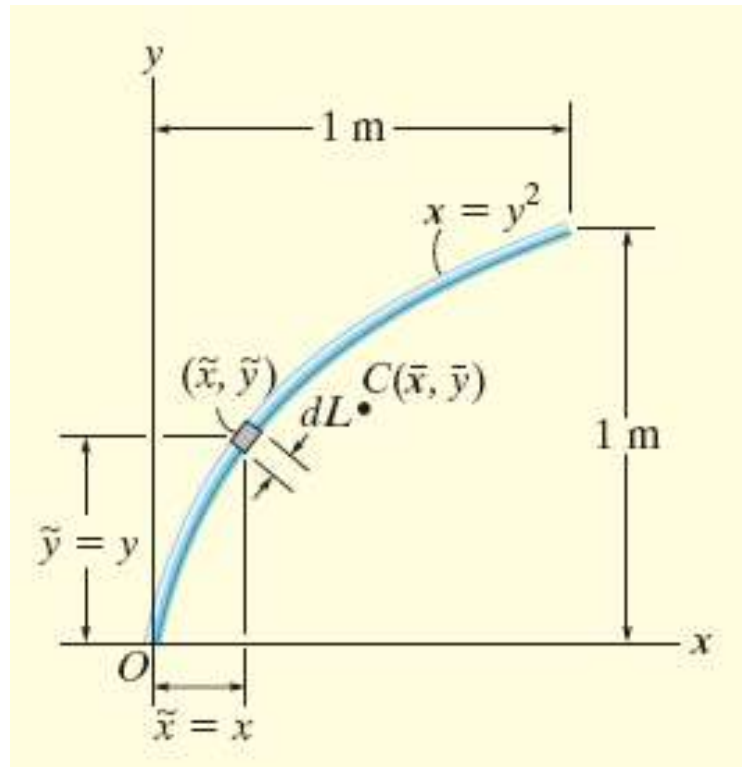
- dL diferansiyel elemanlarının her bir koordinat sistemine göre alınan momentlerinin dengesi dikkate alındığında şöyle yazılabilir.

$$\bar{x} = \frac{\int \tilde{x} dL}{\int_L dL}; \bar{y} = \frac{\int \tilde{y} dL}{\int_L dL}; \bar{z} = \frac{\int \tilde{z} dL}{\int_L dL}$$



Örnek 9.1

Bir parabolik yay şeklinde bükülmüş olan çubuğun merkezini bulunuz.



Örnek 9.1 (d'm)

Diferansiyel eleman

Eğri üzerinde bulunan rastgele bir nokta (x, y) olsun

Alan ve Moment Kolları

dL elemanının diferansiyel uzunluğu için;

$$dL = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1} dy$$

$x = y^2$ eğri denklemi bilindiğine göre, $dx/dy = 2y$ olacaktır.

$$dL = \sqrt{(2y)^2 + 1} dy$$

Merkezin yeri:

$$\tilde{x} = x, \tilde{y} = y$$

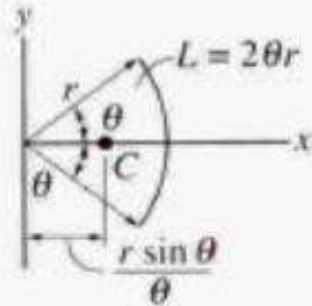
Örnek 9.1 (d'm)

İntegrasyonlar:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{\int_L \tilde{x} dL}{\int_L dL} = \frac{\int_0^1 x \sqrt{4y^2 + 1} dy}{\int_0^1 \sqrt{4y^2 + 1} dy} = \frac{\int_0^1 y^2 \sqrt{4y^2 + 1} dy}{\int_0^1 \sqrt{4y^2 + 1} dy} \\ &= \frac{0.6063}{1.479} = 0.410m\end{aligned}$$

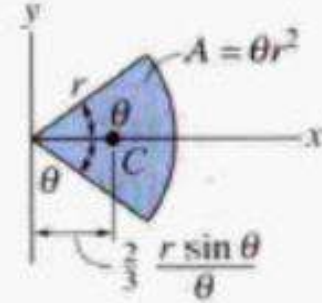
$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{\int_L \tilde{y} dL}{\int_L dL} = \frac{\int_0^1 y \sqrt{4y^2 + 1} dy}{\int_0^1 \sqrt{4y^2 + 1} dy} \\ &= \frac{0.8484}{1.479} = 0.574m\end{aligned}$$

Centroid Location

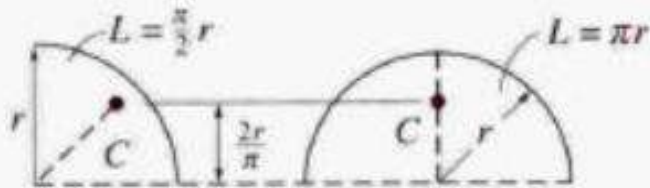


Circular arc segment

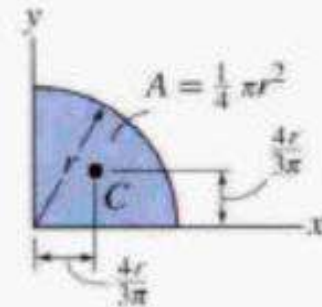
Centroid Location



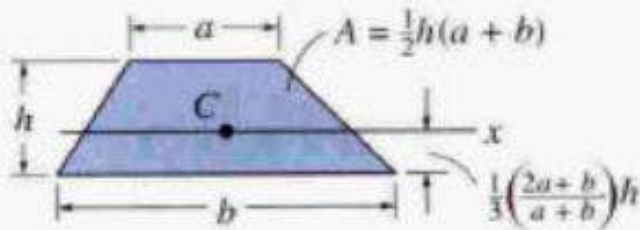
Circular sector area



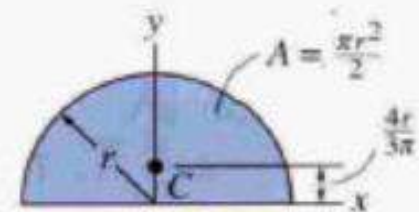
Quarter and semicircle arcs



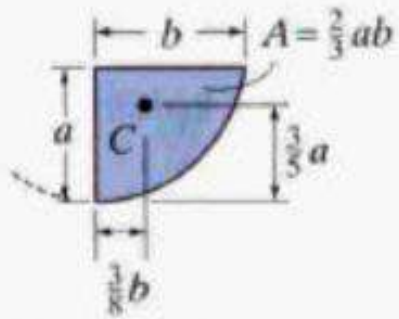
Quarter circle area



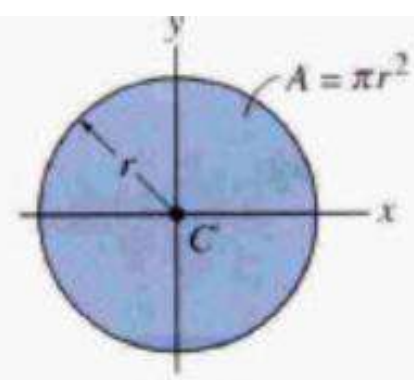
Trapezoidal area



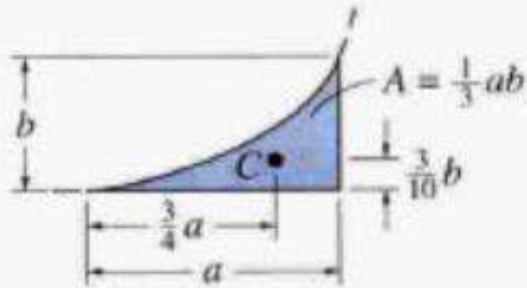
Semicircular area



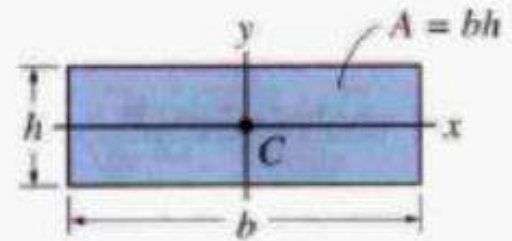
Semiparabolic area



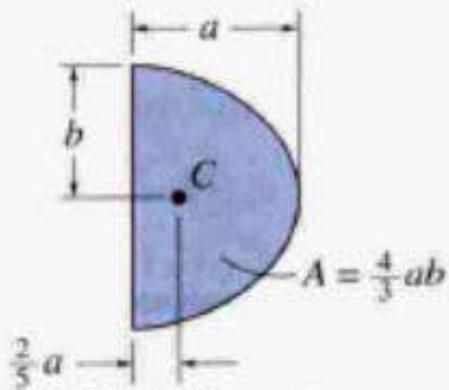
Circular area



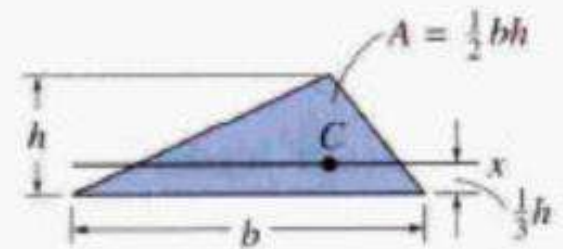
Exparabolic area



Rectangular area



Parabolic area



Triangular area

9.2 Kompozit Cisimler (Composite Bodies)

- Kompozit cisimler dikdörtgen, üçgen veya yarım daire şeklinde olabilen bir dizi birbirine bağlı “daha basit” biçimli cisimlerin birleşmesinden oluşmaktadır.
- Bir cisim kompozitin parçalarına bölünebilir veya ayrılabilir
- Sonlu ağırlıkların hesaplanması

$$\bar{x} = \frac{\sum \tilde{x}W}{\sum W} \quad \bar{y} = \frac{\sum \tilde{y}W}{\sum W} \quad \bar{z} = \frac{\sum \tilde{z}W}{\sum W}$$



9.2 Kompozit Cisimler (d'm)

Analiz Prosedürleri

Kompozit Parçalar

- Cismi veya nesneyi, daha basit şekillere sahip sonlu sayıda kompozit parçaya bölün
- Kompozit cisimde bulunan delik kısımlar, negatif ağırlık veya boyuta sahip ek bir kompozit parça olarak dikkate alınabilir.

Moment Kolları

- Koordinat eksenlerini tesis ediniz ve her bir parçanın ağırlık merkezinin veya cismin merkezinin koordinatlarını belirleyiniz.

9.2 Kompozit Cisimler (d'm)

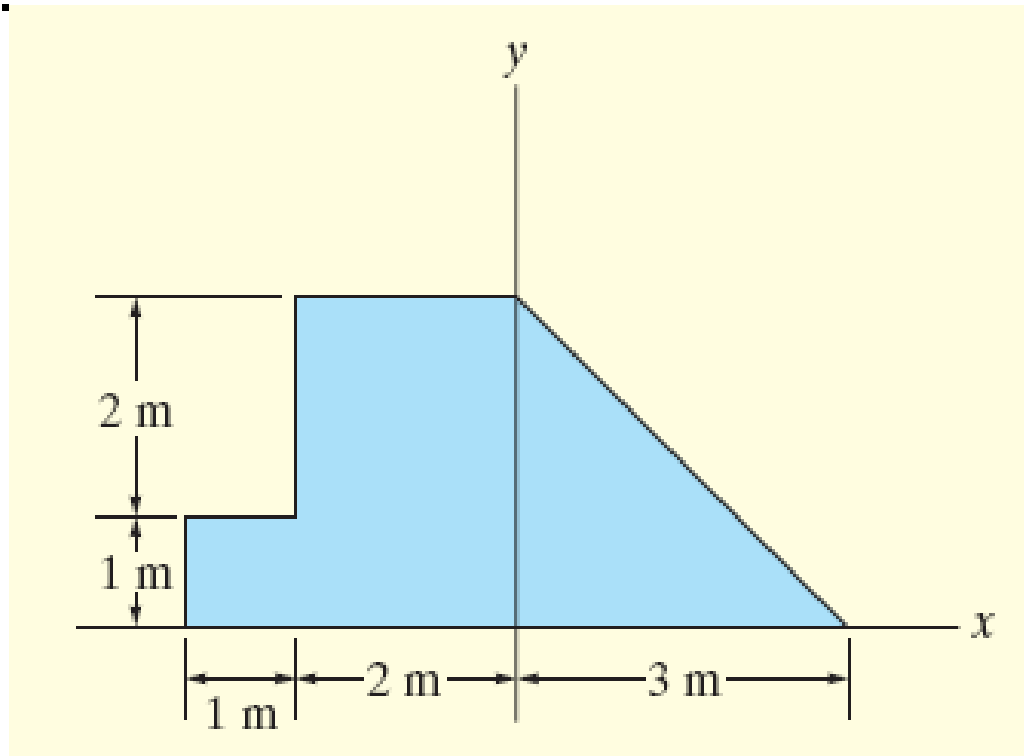
Analiz Prosedürleri

Özet

- Ağırlık merkezi denklemlerini uygulayarak ağırlık merkezinin koordinatlarını belirleyiniz.
- Bir nesne bir eksene göre simetrik ise, nesnenin merkez noktası eksen üzerinde oluşur.

Örnek 9.10

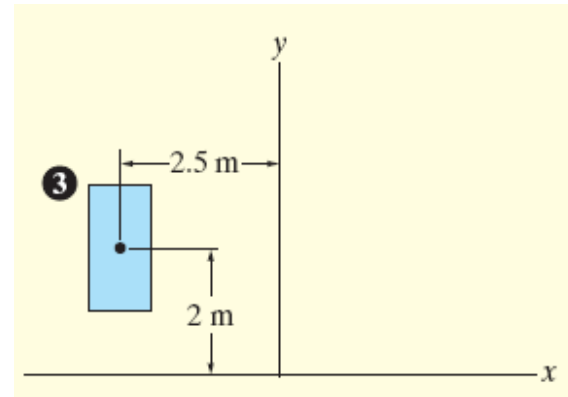
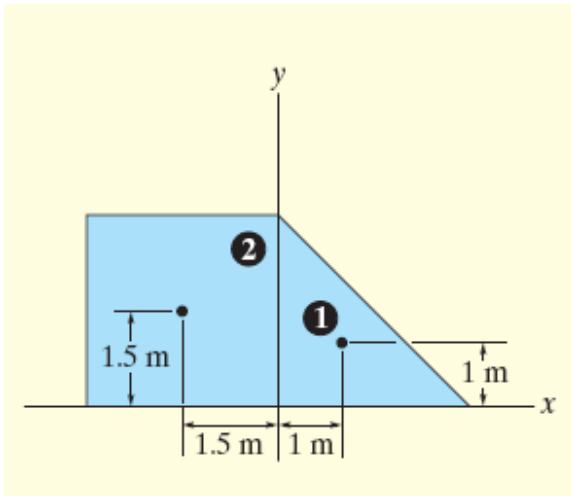
Şekildeki kompozit plaka yüzey alanının merkez noktasını bulunuz.



Çözüm

Kompozit Kısımlar

- Plaka 3 segmente bölünerek çözüm yapılacaktır.
- Küçük dikdörtgen olan 3'ün alanı, boşluk olduğu için "negatif" olarak dikkate alınacaktır.



Çözüm (d'm)

Moment Kolları

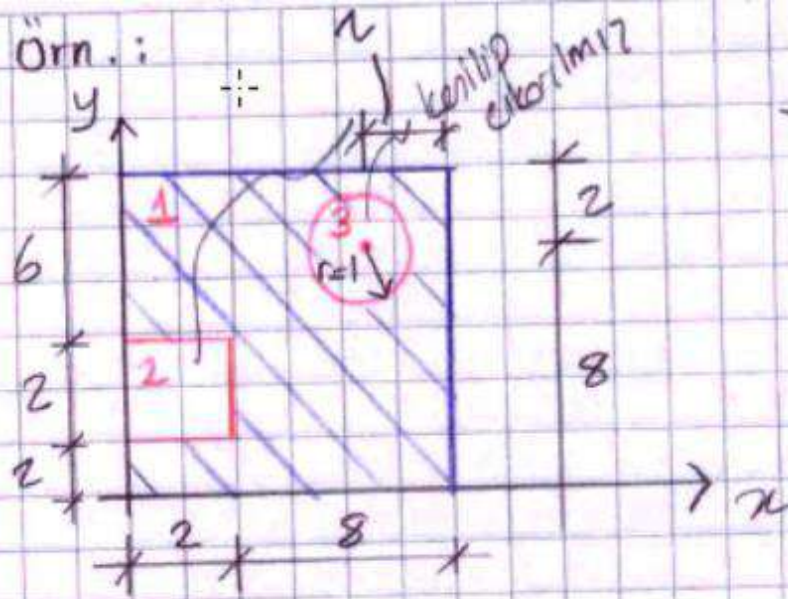
Her bir parça için kendi ağırlık merkezlerinin yeri belirlenir ve tabloda yerine yazılır.

Segment	$A \text{ (m}^2\text{)}$	$\tilde{x} \text{ (m)}$	$\tilde{y} \text{ (m)}$	$\tilde{x}A \text{ (m}^3\text{)}$	$\tilde{y}A \text{ (m}^3\text{)}$
1	$\frac{1}{2}(3)(3) = 4.5$	1	1	4.5	4.5
2	$(3)(3) = 9$	-1.5	1.5	-13.5	13.5
3	$-(2)(1) = -2$	-2.5	2	5	-4
$\Sigma A = 11.5$				$\Sigma \tilde{x}A = -4$	$\Sigma \tilde{y}A = 14$

Sonuç olarak:

$$\bar{x} = \frac{\Sigma \tilde{x}A}{\Sigma A} = \frac{-4}{11.5} = -0.348mm$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \tilde{y}A}{\Sigma A} = \frac{14}{11.5} = 1.22mm$$



Tüm ölçüler mm cinsindedir. Şekilde verilen kompozit alanın ağırlık merkezini $(\bar{x}, \bar{y})$ bulunuz.

Soru 3 alone ayrılarak çözülecektir. Aitkenin parçalar formüle (-) olarak yansıtılacaktır. Referans elemanları şekilde gösterildiği gibi alınacaktır.

Formüller:

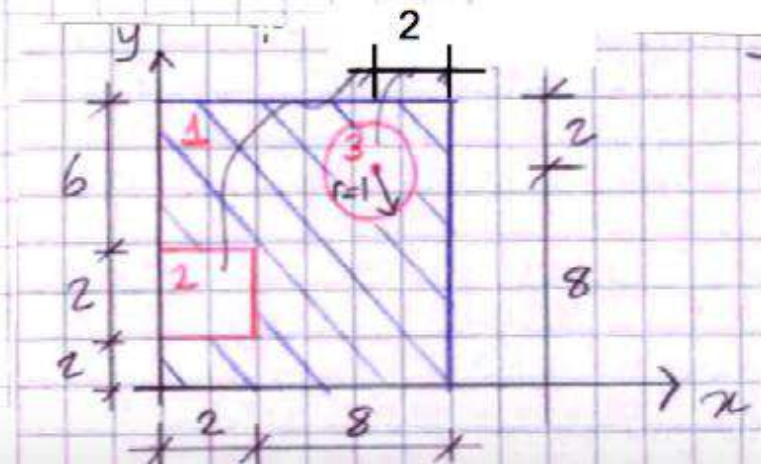
$$\bar{x} = \frac{\sum \bar{x}_i A_i}{\sum A_i}, \quad \bar{y} = \frac{\sum \bar{y}_i A_i}{\sum A_i}, \text{ bunlar bir tablo şeklinde uygulanacak.}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum \bar{x}_i A_i}{\sum A_i}, \quad \bar{y} = \frac{\sum \bar{y}_i A_i}{\sum A_i}, \text{ bunlar bir tablo zeklinde uygulanacak.}$$

Alan No	Alan [mm ²]	$\bar{x}_i$ [mm]	$\bar{y}_i$ [mm]	$\bar{x}_i A_i$ [mm ³]	$\bar{y}_i A_i$ [mm ³]
1	100	5	5	500	500
2	-4	1	3	-4	-12
3	-3.14	8	8	-25.13	-25.13
Σ	92.86			470.87	462.87

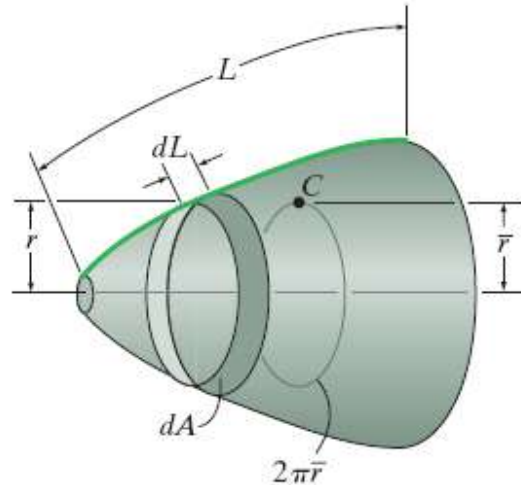
$$\bar{x} = \frac{470.87}{92.86} = 5.07 \text{ mm}$$

$$\bar{y} = \frac{462.87}{92.86} = 4.98 \text{ mm}$$



9.3 Pappus ve Guldinus Teoremleri

- Bir düzlem eğrisinin eğri düzleminde kesişmeyen sabit bir eksen etrafında döndürülmesiyle bir dönme yüzey alanı oluşturulur.
- Bir alan düzleminde kesişmeyen sabit bir eksene sahip bir düzlem alanının döndürülmesiyle bir dönme hacmi elde edilir.



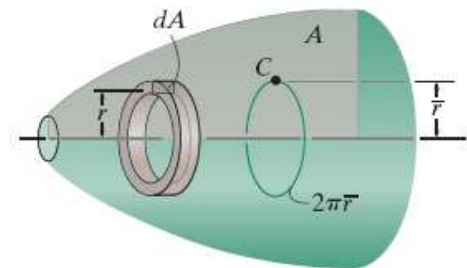
9.3 Pappus ve Guldinus Teoremleri (d'm)

- Pappus ve Guldinus'un teoremleri, dönme eğrileri ve alanlarının etrafında döndürülen eksen kesmemesi durumu için yüzey alanını ve herhangi bir dönen nesnenin hacmini bulmak için kullanılır.

Yüzey Alanı

- Dönme yüzeyinin alanı = Eğrinin uzunluğu ile oluşturulan yüzey alanının merkezi tarafından kat edilen mesafenin çarpımı

$$A = \theta \bar{r} L$$

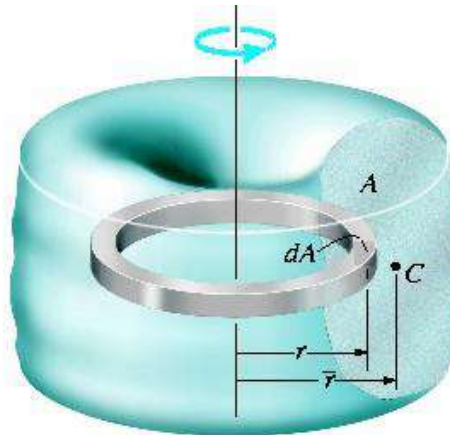


9.3 Pappus ve Guldinus Teoremleri (d'm)

Hacim

- Dönen bir cismin hacmi = Oluşan alan ile oluşan hacim merkezinin kat ettiği mesafenin çarpımı

$$V = \theta \bar{r} A$$



Örnek 9.12

Kürenin alanının $A = 4\pi R^2$ ve hacminin $V = (4/3)\pi R^3$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm

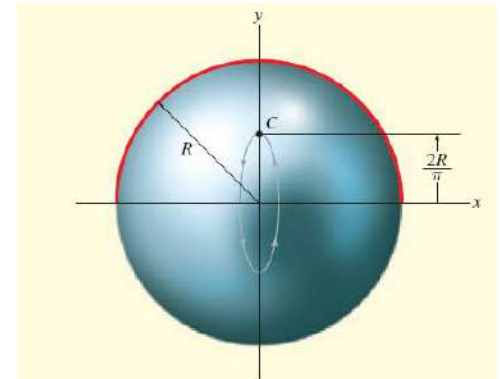
Yüzey Alanı

•Yarım arkın x eksenini etrafında döndürülmesi sonucu:

Merkez için, $\bar{r} = 2R / \pi$

Yüzey alanı için, $A = \theta \tilde{r} L;$

$$A = 2\pi \left(\frac{2R}{\pi} \right) \pi R = 4\pi R^2$$



Çözüm

Hacim

Yarım dairesel alanın x eksenini etrafında döndürülmesi sonucu:

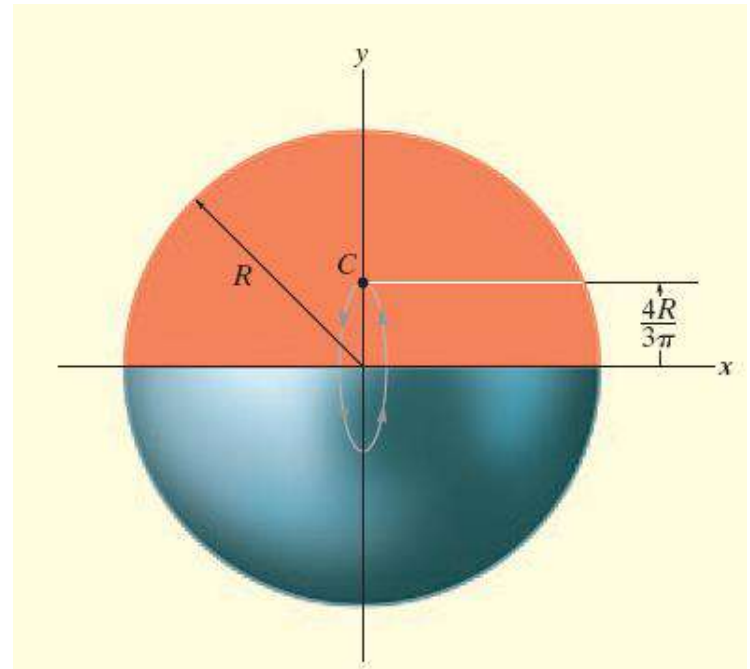
Merkez nokta için,

$$\bar{r} = 4R/3\pi$$

Hacim için,

$$V = \theta \tilde{r} A;$$

$$V = 2\pi \left(\frac{4R}{3\pi} \right) \left(\frac{1}{2} \pi R^2 \right) = \frac{4}{3} \pi R^3$$



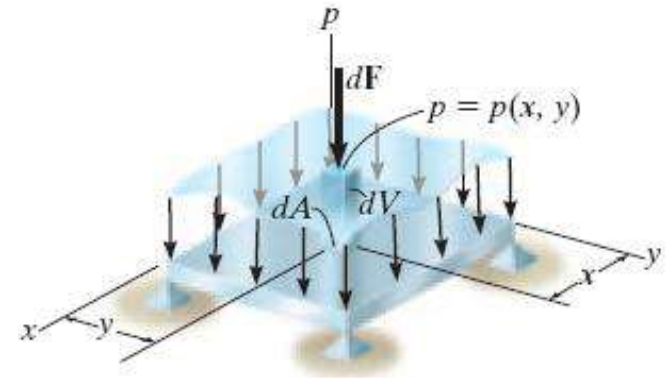
9.4 Genel Bir Yayılı Yükün Bileşkesi

Bir Yüzey Üzerindeki Basınç Dağılımı

- $p=p(x,y)$ Pa(Pascal):(N/m²) yükleme fonksiyonuna maruz düz bir plak düşünelim.
- Diferansiyel bir (x,y) noktasında plağın diferansiyel alanı dA m² üzerine etki eden dF kuvvetini elde edelim.

$$\begin{aligned} dF &= [p(x, y) \text{ (N/m}^2\text{)}](dA \text{ (m}^2\text{)}) \\ &= [p(x, y) dA] \text{ N} \end{aligned}$$

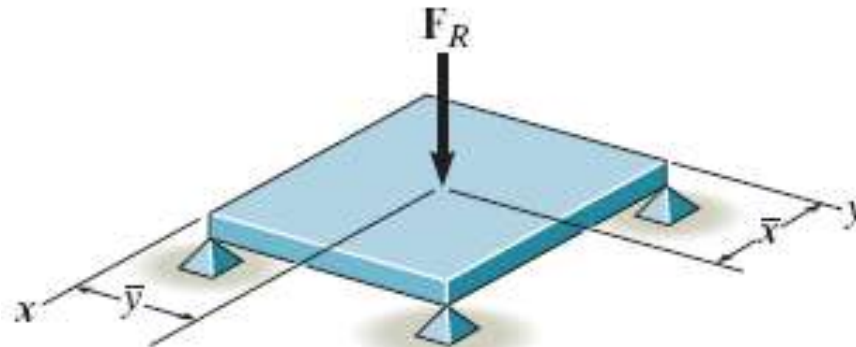
- Bütün yükleme, ayrı ayrı diferansiyel alan dA 'ya etki eden sonsuz paralel kuvvetler olarak ifade edilir.



9.4 Genel Bir Yayılı Yükün Bileşkesi (d'm)

Bir Yüzey Üzerindeki Basınç Dağılımı

- Bu sistem, plaka üzerindeki tek bir noktaya etki eden bir $\mathbf{F}_R$ bileşke kuvvetine indirgenecektir.



9.4 Genel Bir Yayılı Yükün Bileşkesi (d'm)

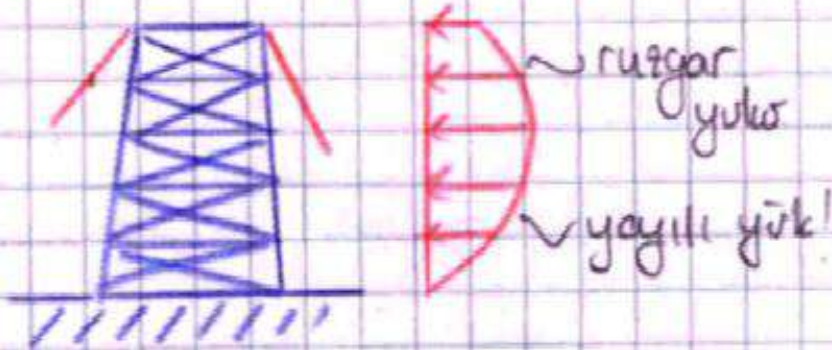
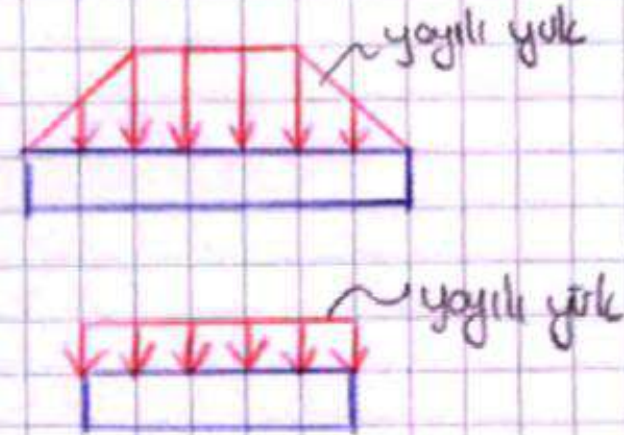
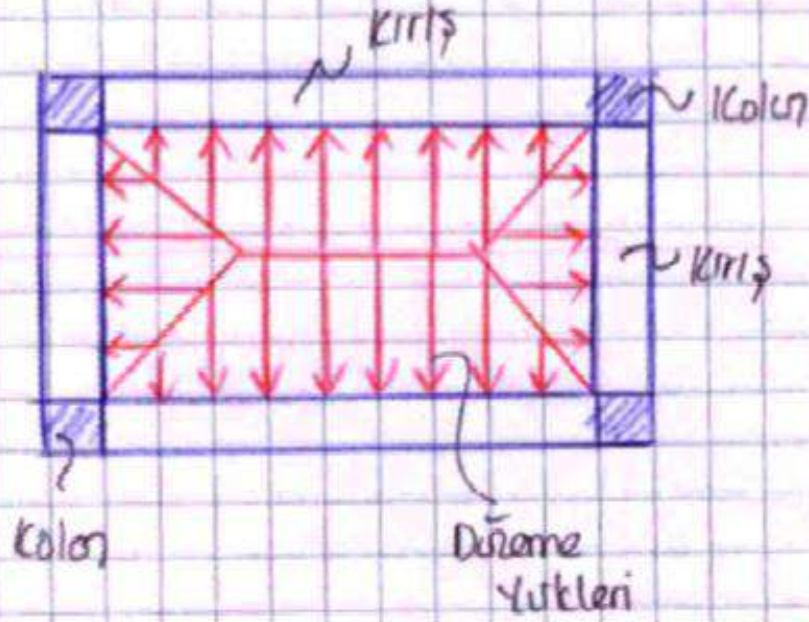
Bileşke Kuvvetin Büyüklüğü

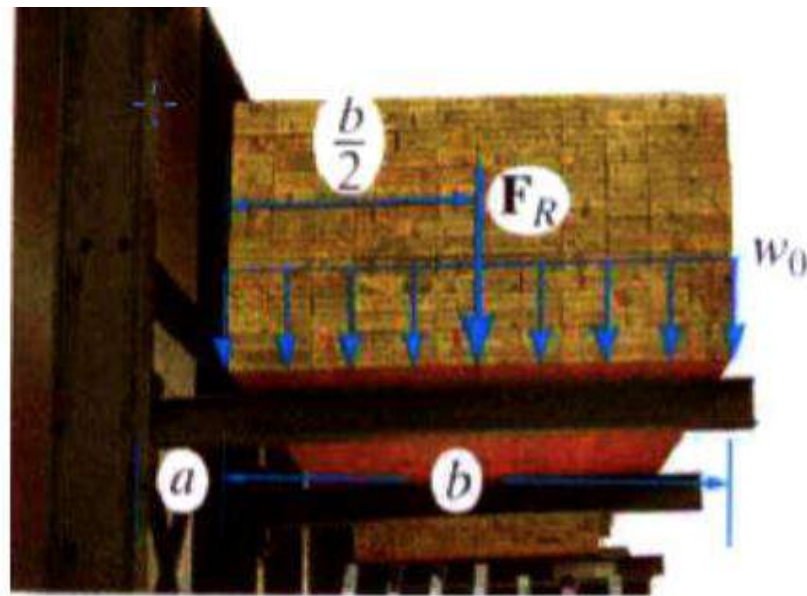
- $\mathbf{F}_R$ 'nin büyüklüğünü belirlemek için, plakanın tüm yüzey alanı $d\mathbf{A}$ üzerine etki eden diferansiyel kuvvetleri $d\mathbf{F}$ toplayın.
- Bileşke kuvvetin büyüklüğü = Yayılı yük diyagramının altında toplam hacim
- Bileşke kuvvetin yeri:

$$\bar{x} = \frac{\int_A x p(x, y) dA}{\int_A p(x, y) dA} = \frac{\int_V x dV}{\int_V dV}$$

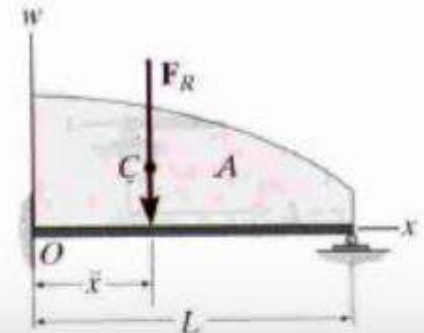
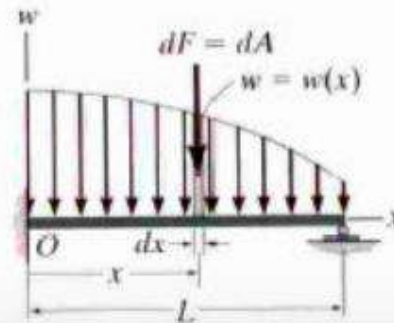
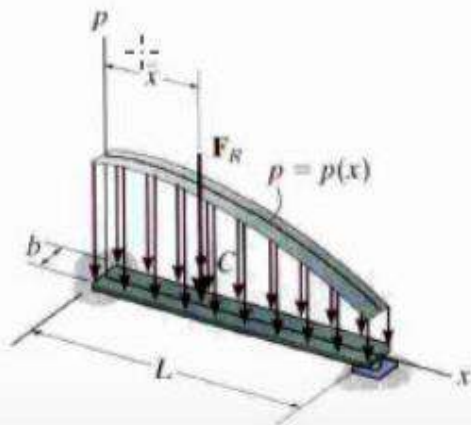
$$\bar{y} = \frac{\int_A y p(x, y) dA}{\int_A p(x, y) dA} = \frac{\int_V y dV}{\int_V dV}$$

Birçok mühendislik uygulamasında, cisimlere yükler yayılı şekilde etki-
mektedir





Bileşke Kuvvetin Şiddeti

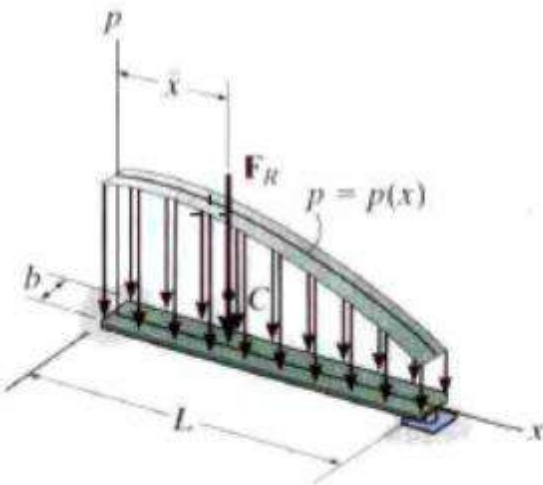


$$F_R = \int_L \underbrace{w(x) dx}_{dF} = \int dA = A$$

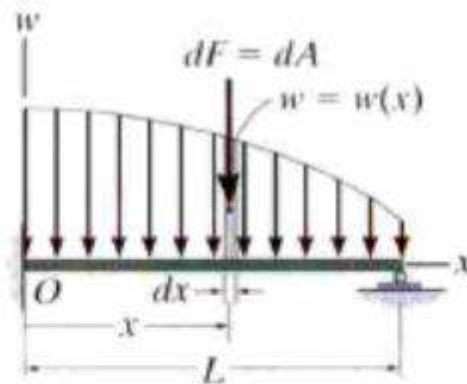
~ eşdeğer kuvvet!
($\downarrow F_R = \sum F$)

Birleşik kuvvetin reddeti, toplam alan A 'ya eşittir. Not: $w(x)$ kuvvet/yünlük birimindedir!

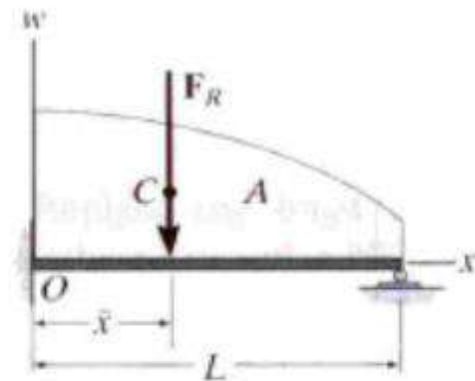
Birleşik Kuvvetin Yeri:



(a)



(b)



(c)

Bilerek kuvvet F_R 'nin yeri moment eşitliğinden bulunur (eşdeğer kuvvet tanımını hatırlıyalım burada.)

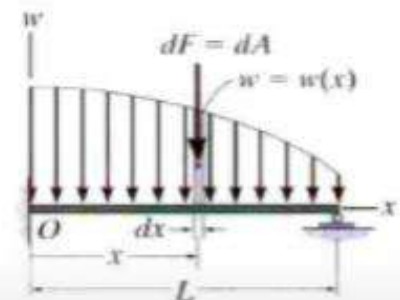
$$(M_R)_O = \sum M_O$$

dF kuvveti; $x dF = x w(x) dx$ kadar O nok. mom. oluşturmaktadır. Bu durumda:

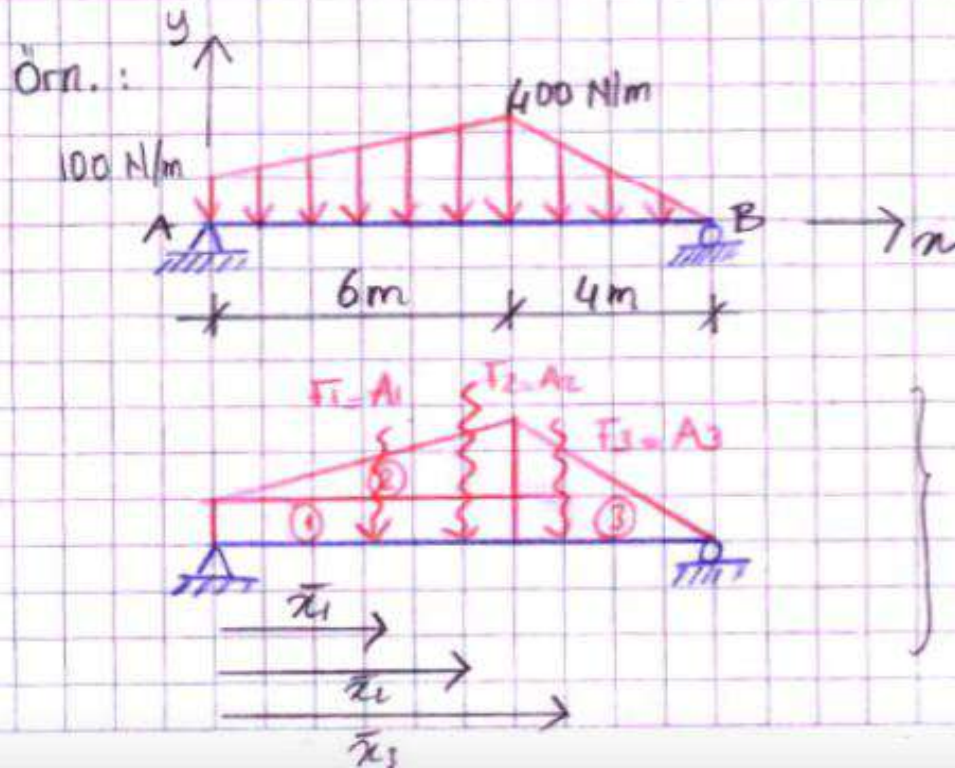
$$\checkmark (M_R)_O = \sum M_O; \quad -\bar{x} F_R = - \int_L x w(x) dx$$

Buradan $\bar{x}$ bulunursa,

$$\bar{x} = \frac{\int_L x w(x) dx}{\int_L w(x) dx} = \frac{\int x dA}{\int dA} \quad \text{olarak bulunur!}$$



Buradan çıkan sonuç: Yayılı yüke equivalent bileşke kuvvet yayılı yükü
 değiştirdiği alanın ağırlık merkezinden geçmektedir! Bir başka deyişle
 eşdeğer tekil kuvvet F_R , ağırlık merkezine etkilendiğinde yarataca-
 ğı etkiler (örn.: moment kuvvetleri) yayılı yükü yaratacağı moment
 kuvvetleri ile aynı olacaktır.

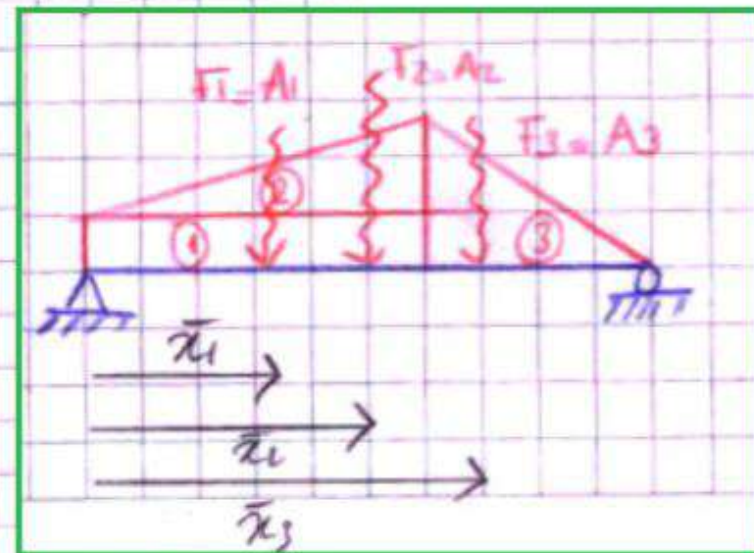
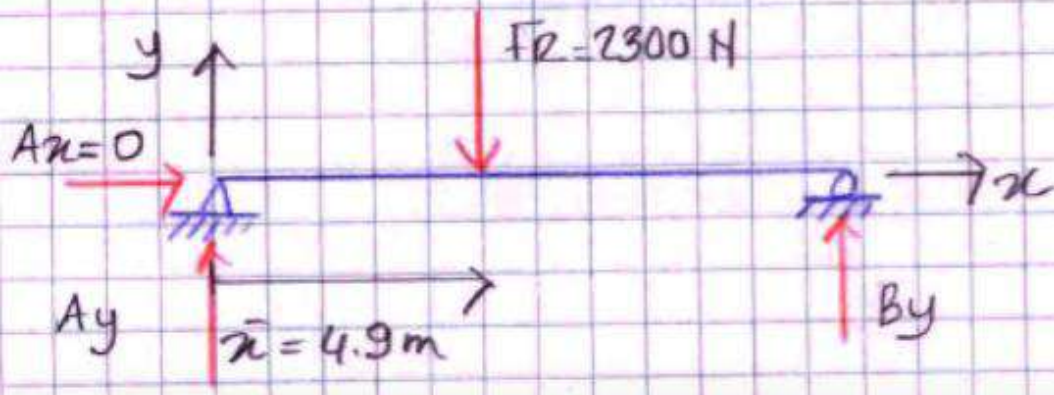


Yayılı yükü eşdeğer tekil
 yüke indirgeyin ve moment
 tepkilerini bulunuz.

Küçük alanın momenti
 olarak düşünülebilir!

Alan No	Alan [N]	$\bar{x}_i$	$\bar{x}_i A_i$
1	100x6	6/2	1800 Nm
2	$\frac{1}{2} 300 \times 6$	$\frac{2}{3}(6)$	3600 Nm
3	$\frac{1}{2} 400 \times 4$	$6 + \frac{1}{3}(4)$	5864 Nm
Σ	2300 N		11,264 Nm

$$\bar{x} = \frac{11,264}{2300} = 4.9 \text{ m}$$

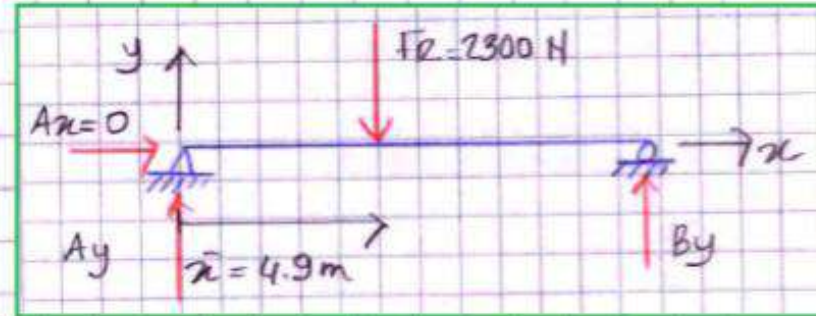


$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0 ; \quad -2300(4.9) + B_y(10) = 0$$

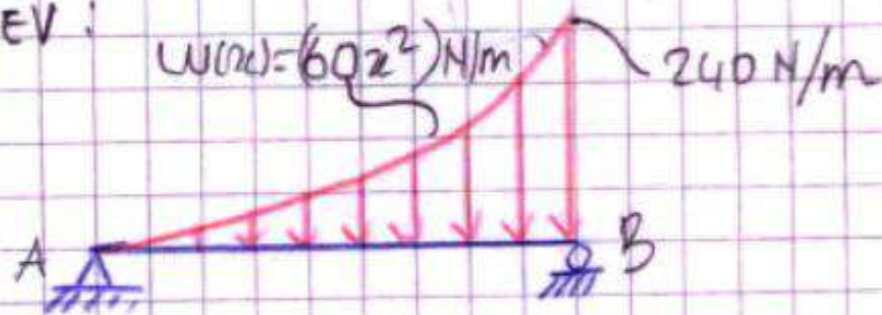
$$B_y = 1127 \text{ N}$$

$$+\uparrow \sum F_y = 0 ; \quad A_y + 1127 - 2300 = 0$$

$$A_y = 1173 \text{ N}$$



ÖDEV :



A ve B mesnet kuvvetlerini bulunuz.

9.5 Sıvı Basıncı (Fluid Pressure)

- Pascal kanunu uyarınca, durgun haldeki bir akışkan, herhangi bir noktada her yönde aynı değere sahip olan bir **p** basıncı yaratır.
- p'nin büyüklüğü, sıvının özgül ağırlığına (**γ**) veya kütle yoğunluğuna (**ρ**) ve sıvının yüzeyinden itibaren bulunulan noktanın derinliğine (**z**) bağlıdır.

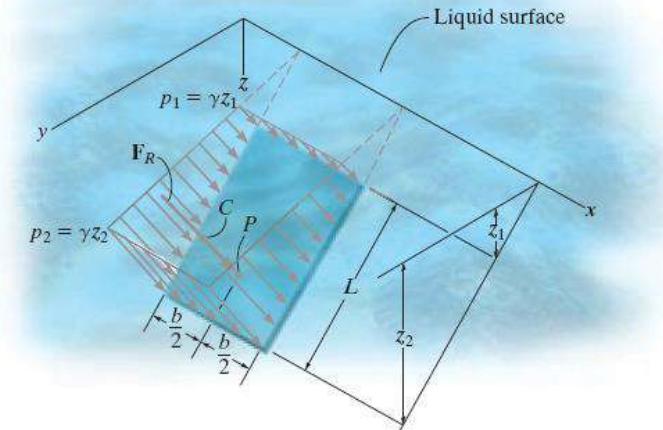
$$p = \gamma \cdot z = \rho \cdot g \cdot z$$

- Bu denklem sıkıştırılamayan akışkanlar (incompressible fluids) için geçerlidir.
- Gazlar sıkıştırılabilir akışkanlardır ve yukarıdaki denklem gazlar için kullanılamaz.

9.5 Sıvı Basıncı (d'm)

Sabit Genişlikli Düzlem Plaklar (Flat Plate of Constant Width)

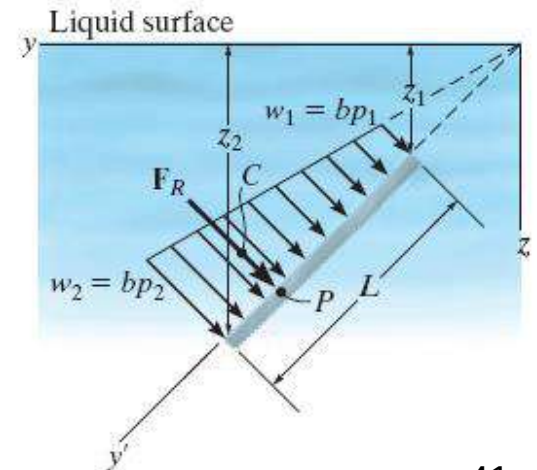
- Belirli bir özgül ağırlığa (γ) sahip bir sıvı içine daldırılmış sabit genişlikli yassı dikdörtgen bir plaka düşünelim.
- Plaka düzlemi, şekilde gösterildiği gibi yatayla bir açı yapar.



9.5 Sıvı Basıncı (d'm)

Sabit Genişlikli Düzlem Plaklar (d'm)

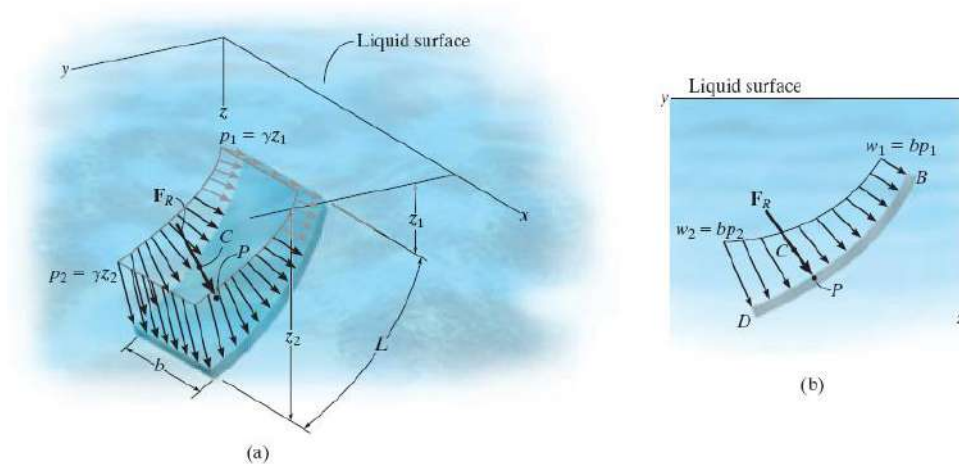
- Basınç, derinlik ile doğrusal bir biçimde değiştiği için, plakanın yüzeyi üzerindeki basıncın dağılımı, z_1 derinliğinde $p_1 = \gamma z_1$ yoğunluğuna ve z_2 derinliğinde $p_2 = \gamma z_2$ olan bir trapezoidal (yamuk) hacimle ifade edilir.
- Bileşke kuvvet F_R 'nin büyüklüğü
= Yükleme diyagramının hacmi



9.5 Sıvı Basıncı (d'm)

Sabit Genişlikli Eğrisel Plaklar (Curved Plate of Constant Width)

- Daldırılmış plak eğrisel olduğu zaman, plak yüzeyine etki eden basınç sürekli bir şekilde doğrultu ile değişecektir.
- F_R bileşke kuvvetini ve C geometrik merkez noktanın yerini ya da P basıncını bulmak için integrasyon kullanılabilir.

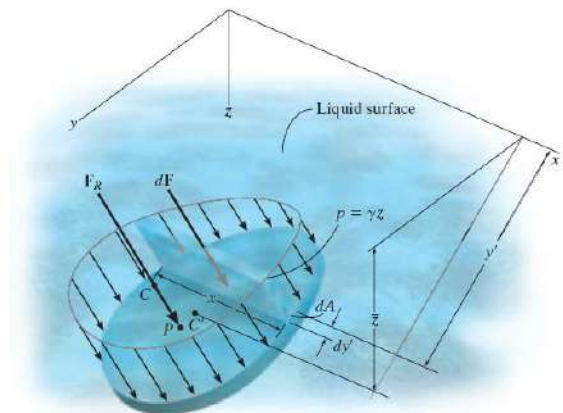


9.5 Sıvı Basıncı (d'm)

Değişken Genişlikli Düzlem Plaklar (Flat Plate of Variable Width)

- Değişken genişliğe sahip batırılmış bir plakanın yüzeyine etki eden basınç dağılımını düşünelim.
- **dA** üzerine etki eden düzgün (uniform) basınç **p = γz** (kuvvet/alan) olduğundan dolayı, diferensiyel kuvvet **dF**'nin büyüklüğü

$$dF = dV = \rho \, dA = \gamma \cdot z \cdot (x \, dy)$$



9.5 Sıvı Basıncı (d'm)

Değişken Genişlikli Düzlem Plaklar (d'm)

- Hacim V 'nin merkezi $\mathbf{F}_R$ bileşkesinin etkiye noktasıdır.

$$F_R = \int_A \rho dA = \int_V dV = V$$

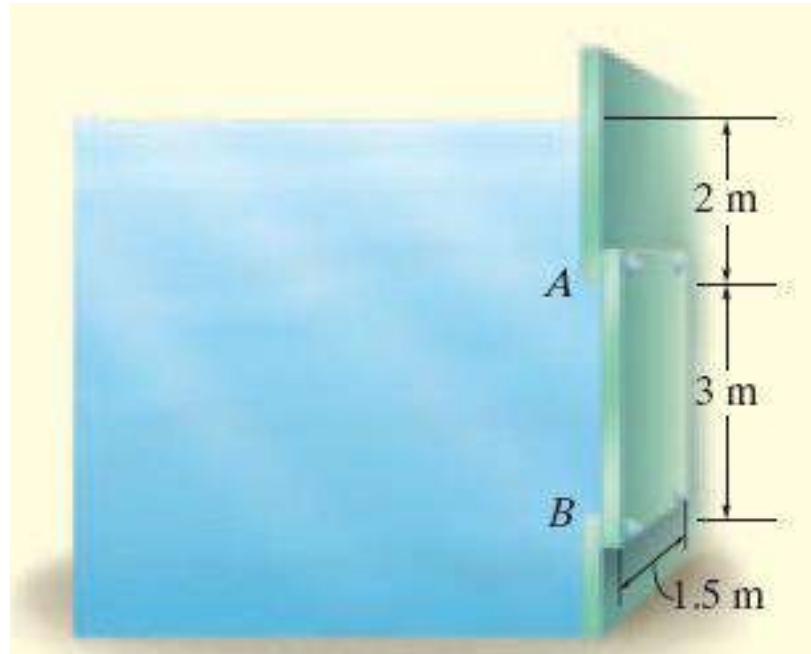
- C'nin hemen altındaki plakanın yüzeyinde bulunan basınç merkezi, denklemlerle tanımlanan $\mathbf{P}$ koordinatlarına sahiptir

$$\bar{x} = \frac{\int_V \tilde{x} dV}{\int_V dV} \quad \bar{y}' = \frac{\int_V \tilde{y}' dV}{\int_V dV}$$

- Bu nokta, plaka alanının merkezi ile karıştırılmamalıdır.

Örnek 9.14

Suya batırılmış dikdörtgen AB plakası üzerine etkiyen bileşke hidrostatik kuvvetin büyüklüğünü ve yerini belirleyin. Plaka genişliği 1.5 m'dir ve suyun yoğunluğu $\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$ 'tür.



Çözüm

A ve B derinliğindeki su basınçları:

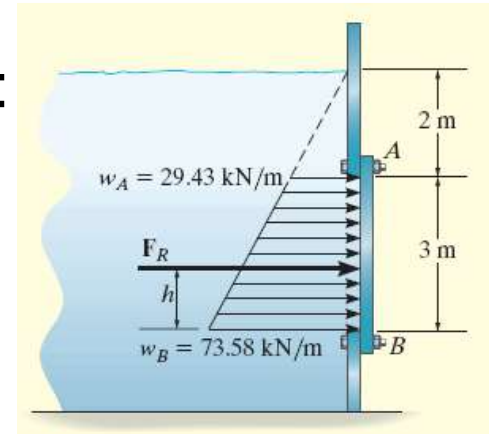
$$p_A = r_w g z_A = (1000 \text{ kg} / \text{m}^3)(9.81 \text{ m} / \text{s}^2)(2 \text{ m}) = 19.62 \text{ kPa}$$

$$p_B = r_w g z_B = (1000 \text{ kg} / \text{m}^3)(9.81 \text{ m} / \text{s}^2)(5 \text{ m}) = 49.05 \text{ kPa}$$

A ve B noktalarındaki yayılı yükün değeri:

$$w_A = b p_A = (1.5 \text{ m})(19.62 \text{ kPa}) = 29.43 \text{ kN} / \text{m}$$

$$w_B = b p_B = (1.5 \text{ m})(49.05 \text{ kPa}) = 73.58 \text{ kN} / \text{m}$$



Çözüm

Yayılı yükün bileşke kuvveti F_R 'nin büyüklüğü:

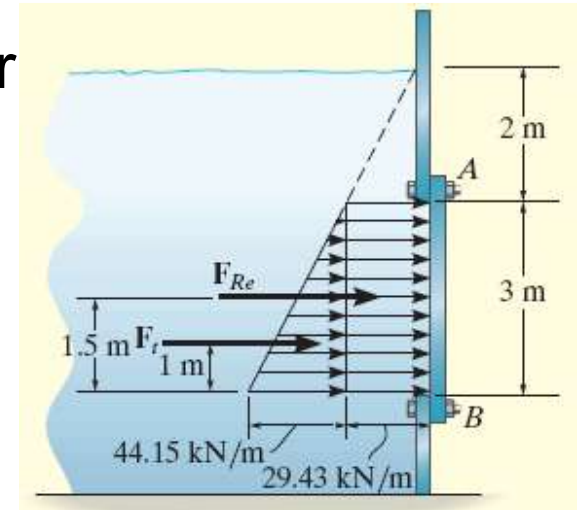
$F_R = \text{yamuk kısmın alanı}$

$F_R = \text{area of trapezoid}$

$$= \frac{1}{2}(3)(29.4 + 73.6) = 154.5N$$

Bu kuvvet alanının merkezine etki eder
B noktasından yukarı doğru h:

$$h = \frac{1}{3} \left(\frac{2(29.43) + 73.58}{29.43 + 73.58} \right) (3) = 1.29m$$



Çözüm

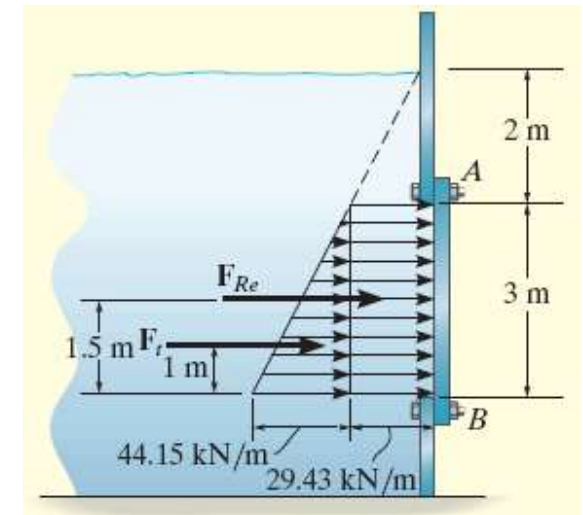
- Aynı sonuçlar, üçgen ve dikdörtgen tarafından tanımlanan F_R 'nin iki bileşeni dikkate alınarak da elde edilebilir.
- Her bir kuvvet, ilişkili olduğu merkez noktaya etki eder ve büyüklükleri;

$$F_{Re} = (29.43 \text{ kN} / \text{m})(3 \text{ m}) = 88.3 \text{ kN}$$

$$F_t = \frac{1}{2}(44.15 \text{ kN} / \text{m})(3 \text{ m}) = 66.2 \text{ kN}$$

- Böylece şu sonuç elde edilir.

$$F_R = F_{Re} + F_t = 88.3 \text{ kN} + 66.2 \text{ kN} = 154.5 \text{ kN}$$



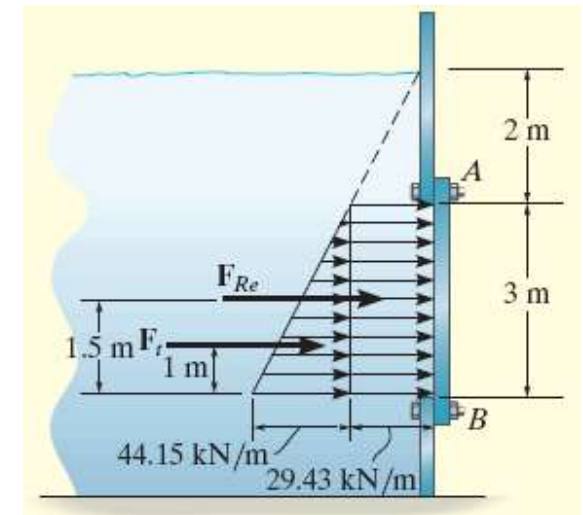
Çözüm

- F_R 'nin yeri, bileşkenin ve bileşenlerin **B**'ye göre alınan momentlerinin birbirine eşitlenmesiyle elde edilebilir.

$$\Sigma(M_R)_B = \Sigma M_B;$$

$$(154.5)h = 88.3(1.5) + 66.2(1)$$

$$h = 1.29m$$



STATİK

BÖLÜM 8. AĞIRLIK MERKEZİ VE GEOMETRİK MERKEZ (CENTER OF GRAVITY AND CENTROID)

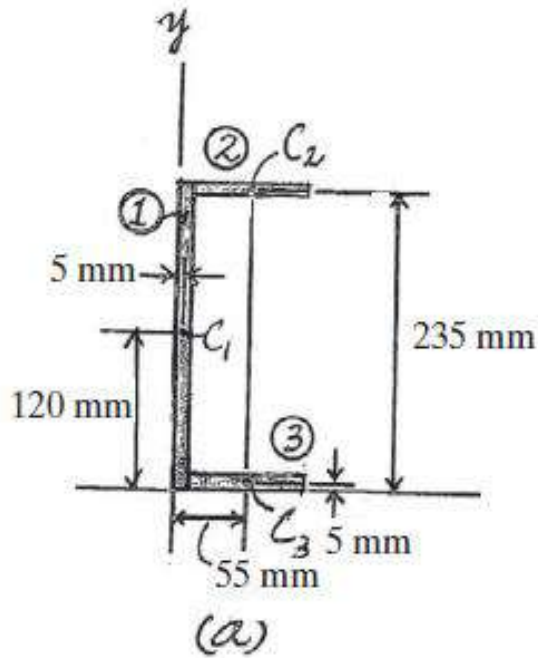
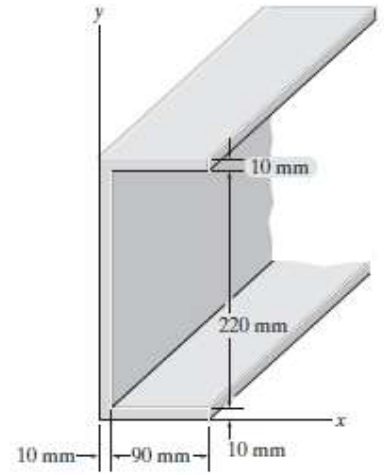
ÖRNEK SORU ÇÖZÜMLERİ

1. Şekildeki kesitin geometrik merkezinin yerini ifade eden $(\bar{x}, \bar{y})$ koordinatlarını bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$\bar{x} = \frac{\sum \bar{x}A}{\sum A} = \frac{5(240(10)) + 55(90(10)) + 55(90(10))}{240(10) + 90(10) + 90(10)} = \frac{111000}{4200} = 26.4 \text{ mm}$$

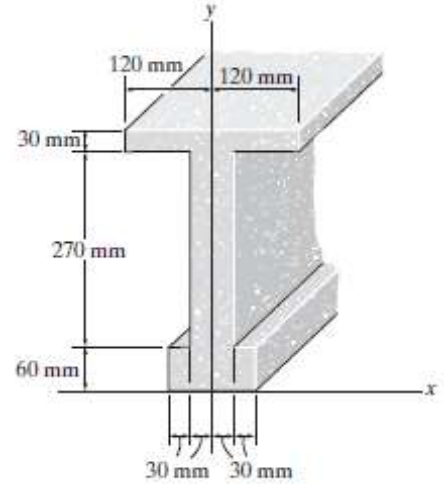
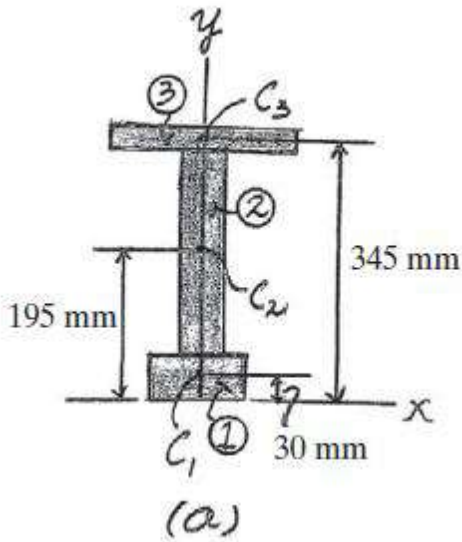
$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{y}A}{\sum A} = \frac{120(240(10)) + 235(90(10)) + 5(90(10))}{240(10) + 90(10) + 90(10)} = \frac{50400}{4200} = 120 \text{ mm}$$



2. Şekildeki beton kirişin kesit alanının geometrik merkezinin $\bar{y}$ koordinatını bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{y}A}{\sum A} = \frac{30(120)(60) + 195(270)(60) + 345(240)(30)}{120(60) + 270(60) + 240(30)} = 191 \text{ mm}$$





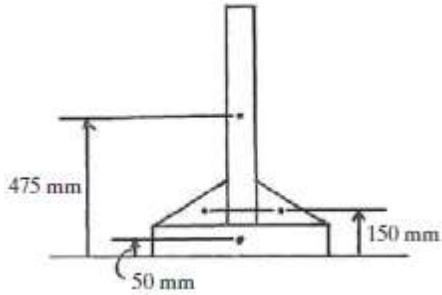
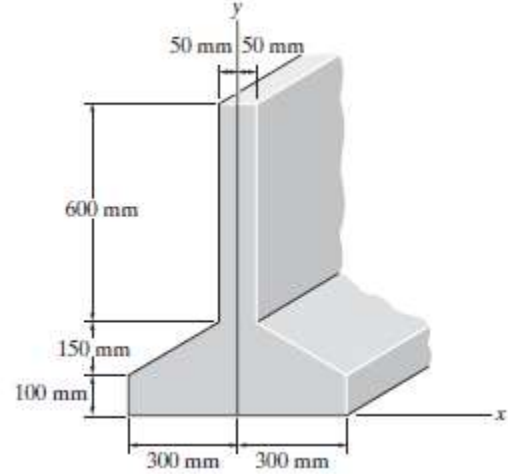
3. Şekildeki beton kirişin kesit alanının geometrik merkezinin $\bar{y}$ koordinatını bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$\Sigma \bar{y}A = 50(600)(100) + 2(150)\left(\frac{1}{2}\right)(250)(150) + 475(750)(100)$$
$$= 44.25 (10^6) \text{ mm}^3$$

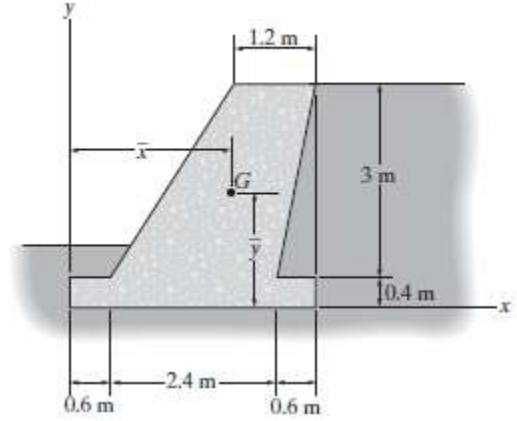
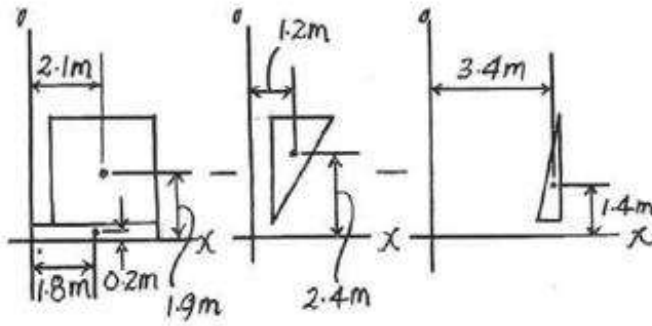
$$\Sigma A = 600(100) + (2)\left(\frac{1}{2}\right)(250)(150) + 750(100)$$
$$= 17.25 (10^4) \text{ mm}^2$$

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \bar{y}A}{\Sigma A} = \frac{44.25 (10^6)}{17.25 (10^4)} = 257 \text{ mm} \quad \text{Ans}$$



4. Şekildeki kesiti görülen istinad duvarının ağırlık merkezi olan G'nin yerini ifade eden $(\bar{x}, \bar{y})$ koordinatlarını bulunuz.

ÇÖZÜM:



$$\Sigma \bar{x}A = 1.8(3.6)(0.4) + 2.1(3)(3) - 3.4 \left(\frac{1}{2} \right) (3)(0.6) - 1.2 \left(\frac{1}{2} \right) (1.8)(3)$$

$$= 15.192 \text{ m}^3$$

$$\Sigma \bar{y}A = 0.2(3.6)(0.4) + 1.9(3)(3) - 1.4 \left(\frac{1}{2} \right) (3)(0.6) - 2.4 \left(\frac{1}{2} \right) (1.8)(3)$$

$$= 9.648 \text{ m}^3$$

$$\Sigma A = 3.6(0.4) + 3(3) - \frac{1}{2} (3)(0.6) - \frac{1}{2} (1.8)(3)$$

$$= 6.84 \text{ m}^2$$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma \bar{x}A}{\Sigma A} = \frac{15.192}{6.84} = 2.22 \text{ m}$$

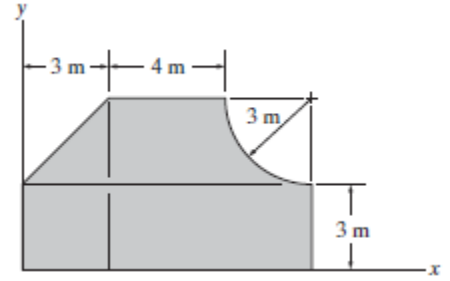
Ans

$$\bar{y} = \frac{\Sigma \bar{y}A}{\Sigma A} = \frac{9.648}{6.84} = 1.41 \text{ m}$$

Ans

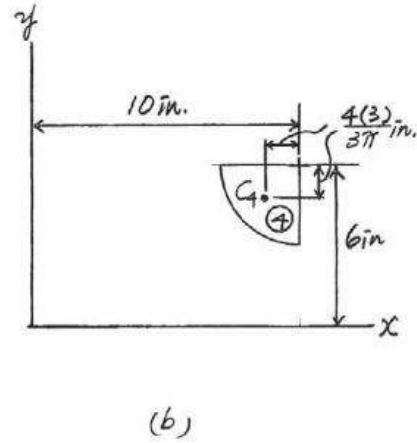
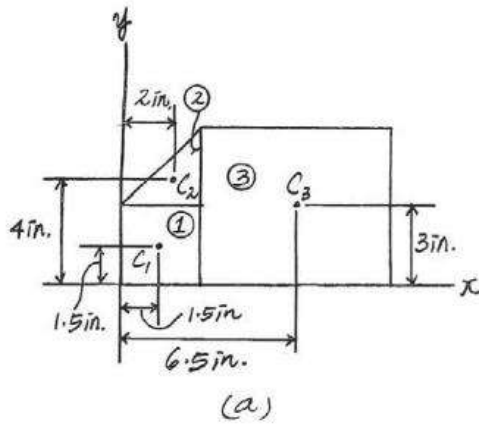
5. Şekildeki kesitin ağırlık merkezi noktasının yerini ifade eden $(\bar{x}, \bar{y})$ koordinatlarını bulunuz.

ÇÖZÜM:



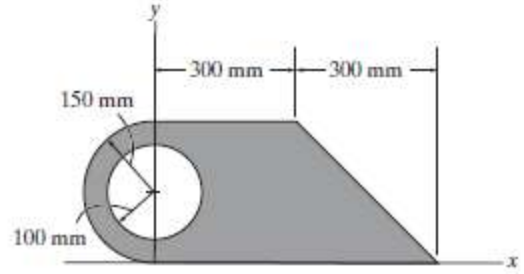
$$\bar{x} = \frac{\sum \bar{x}A}{\sum A} = \frac{1.5(3(3)) + \left(\frac{1}{2}\right)(3(3)) + 6.5(7(6)) + \left(10 - \frac{4(3)}{3\pi}\right) \left(-\frac{\pi(3^2)}{4}\right)}{3(3) + \frac{1}{2}3(3) + 7(6) + \left(-\frac{\pi(3^2)}{4}\right)} = \frac{233.81}{48.43} = 4.83 \text{ m}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{y}A}{\sum A} = \frac{1.5(3(3)) + 4\left(\frac{1}{2}\right)(3(3)) + 3(7(6)) + \left(6 - \frac{4(3)}{3\pi}\right) \left(-\frac{\pi(3^2)}{4}\right)}{3(3) + \frac{1}{2}3(3) + 7(6) + \left(-\frac{\pi(3^2)}{4}\right)} = \frac{124.09}{48.43} = 2.56 \text{ m}$$





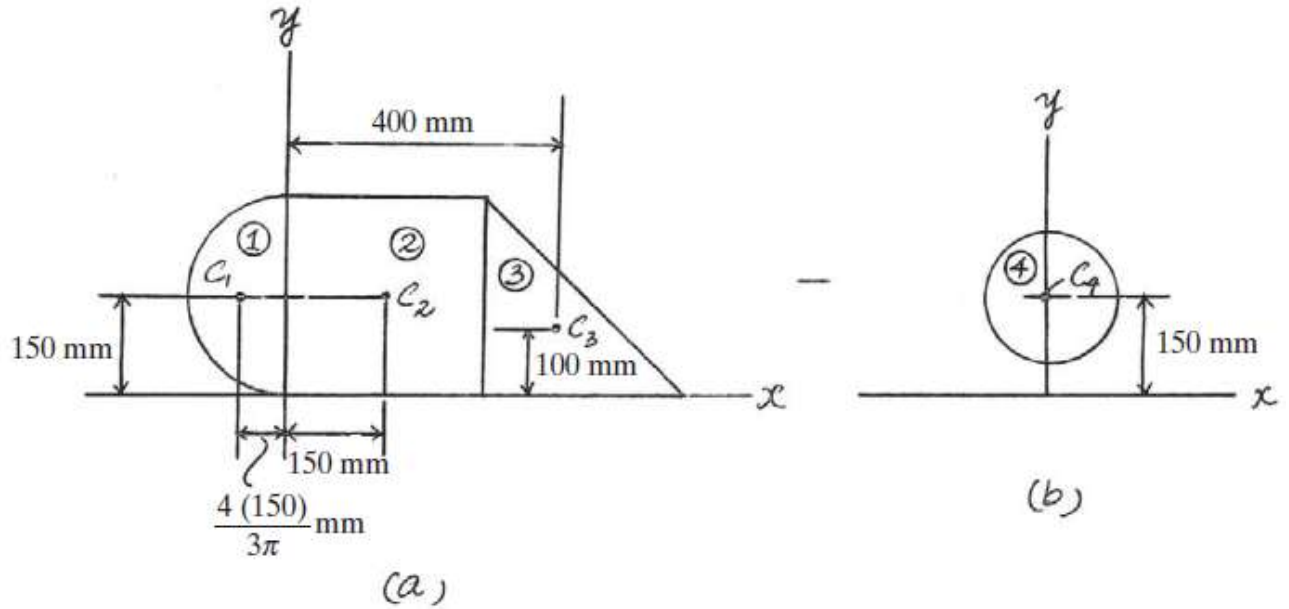
6. Şekildeki kesitin ağırlık merkezi noktasının yerini ifade eden $(\bar{x}, \bar{y})$ koordinatlarını bulunuz.



ÇÖZÜM:

$$\bar{x} = \frac{\sum \bar{x}A}{\sum A} = \frac{\left(-\frac{4(150)}{3\pi}\right)\left(\frac{\pi(150^2)}{2}\right) + 150(300)(300) + 400\left(\frac{1}{2}(300)(300)\right) + 0\left(-\frac{\pi(100^2)}{4}\right)}{\frac{\pi(150^2)}{2} + 300(300) + \frac{1}{2}(300)(300) + \left(-\frac{\pi(100^2)}{4}\right)} = \frac{29.25 (10^6)}{13.89 (10^4)} = 211 \text{ mm}$$

$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{y}A}{\sum A} = \frac{150\left(\frac{\pi(150^2)}{2}\right) + 150(300)(300) + 100\left(\frac{1}{2}(300)(300)\right) + 150\left(-\frac{\pi(100^2)}{4}\right)}{\frac{\pi(150^2)}{2} + 300(300) + \frac{1}{2}(300)(300) + \left(-\frac{\pi(100^2)}{4}\right)} = \frac{18.59 (10^6)}{13.89 (10^4)} = 134 \text{ mm}$$



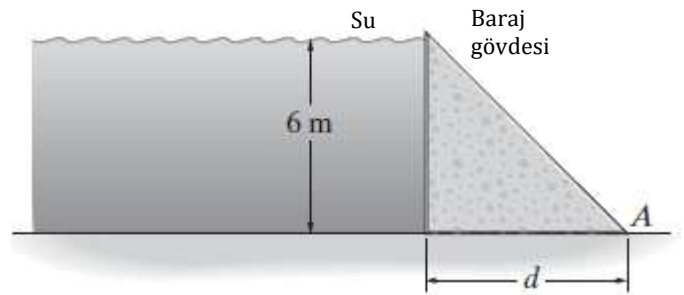
7. Şekilde görülen betondan yapılmış ağırlık barajı kendi ağırlığı ile yerinde durmaktadır. Betonun yoğunluğu $\rho_c = 2500 \text{ kg/m}^3$ ve suyun yoğunluğu $\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$ olduğuna göre,

a) Kağıt düzleminde 1 m genişliği dikkate alarak suyun betona uyguladığı üçgen yayılı yükü N/m biriminde hesaplayınız. ($w = ? [N/m]$)

b) Suyun betona uyguladığı üçgen yayılı yükün bileşkesini hesaplayınız. ($F = ? [N]$)

c) Beton barajın gövde ağırlığını d boyutuna bağlı olarak bulunuz. ($W = ? [N]$)

d) Baraj gövdesinin A noktası etrafında devrilmemesi için d boyutunun en az ne olması gerektiğini hesaplayınız? ($d = ? [m]$)



ÇÖZÜM:

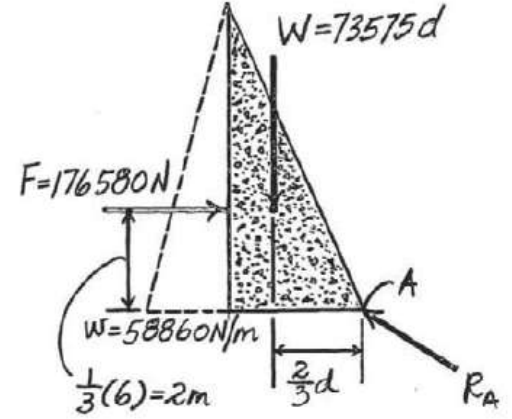
$$w = 1000(9.81)(6)(1) = 58\,860 \text{ N/m}$$

$$F = \frac{1}{2}(58\,860)(6) = 176\,580 \text{ N}$$

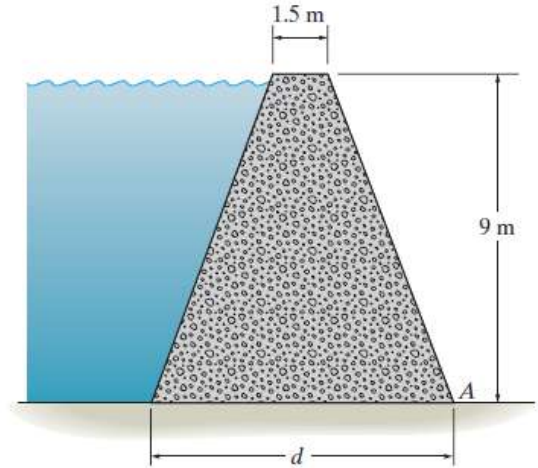
$$W = \frac{1}{2}(d)(6)(1)(2500)(9.81) = 73\,575d \text{ N}$$

$$(+\Sigma M_A = 0; -176\,580(2) + 73\,575d\left(\frac{2}{3}d\right) = 0$$

$$d = 2.68 \text{ m} \quad \text{Ans}$$



8. Simetrik beton ağırlık barajı kendi ağırlığı ile sabit olarak yerinde durmaktadır. Eğer betonun yoğunluğu $\rho_c = 2500 \text{ kg/m}^3$ ve suyun yoğunluğu $\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$ ise, baraj gövdesinin A noktası etrafında dönmesini engelleyecek en küçük **d** boyutu ne olmalıdır? Baraj gövdesinin kâğıt düzlemine dik genişliği $b = 8 \text{ m}$ 'dir.



ÇÖZÜM:

$$w = b \rho_w g h = 8(1000)(9.81)(9) = 706.32(10^3) \text{ N/m}$$

$$F_h = \frac{1}{2} \left[706.32(10^3) \right] (9) = 3178.44(10^3) \text{ N}$$

$$F_v = 1000(9.81) \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{d-1.5}{2} \right) (9)(8) = (176.58d - 264.87)(10^3)$$

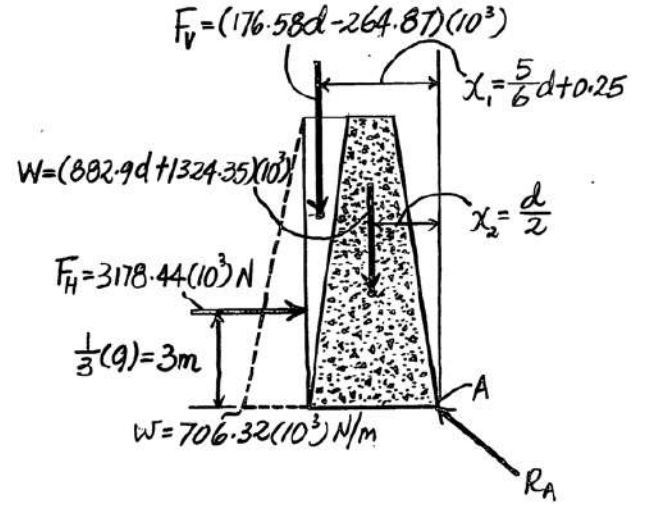
$$W = 2.5(10^3)(9.81) \left[\frac{1}{2} (d+1.5)(9)(8) \right] = (882.9d + 1324.35)(10^3)$$

$$x_1 = d - \frac{1}{3} \left(\frac{d-1.5}{2} \right) = \frac{5}{6}d + 0.25$$

$$x_2 = \frac{d}{2}$$

$$(+\sum M_A = 0; \quad (176.58d - 264.87)(10^3) \left(\frac{5}{6}d + 0.25 \right)$$

$$+ (882.9d + 1324.35)(10^3) \left(\frac{d}{2} \right) - 3178.44(10^3)(3) = 0$$



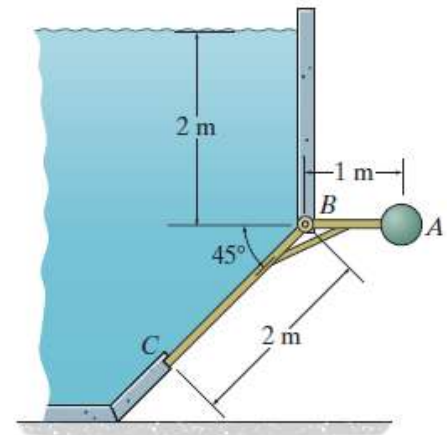
$$588.6d^2 + 485.595d - 9601.54 = 0$$

$$d = 3.65 \text{ m}$$

9. BC kapağının kapanmasını sağlayan A noktasındaki küre şeklindeki ağırlığın kütlesi 6500 kg olduğuna göre C noktasındaki kapanma (durdurma) noktasına uygulanan kuvveti hesaplayınız.

Kapak B noktasında mafsallıdır ve kapağın kâğıt düzlemine dik genişliği $b = 1 \text{ m}$ 'dir.

Suyun yoğunluğu ise $\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$ 'tür.

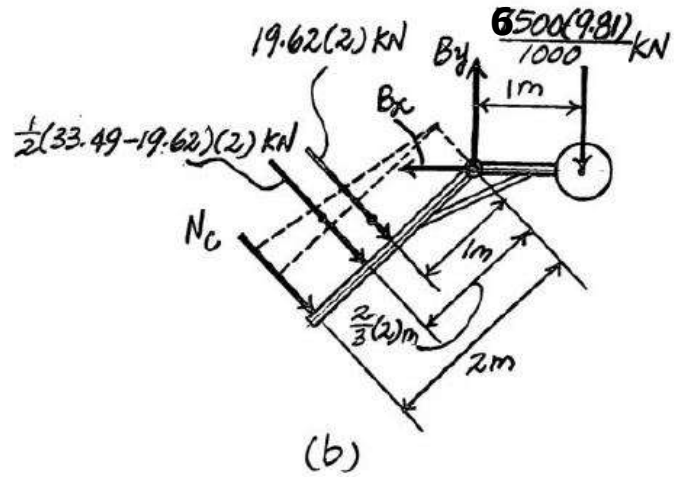
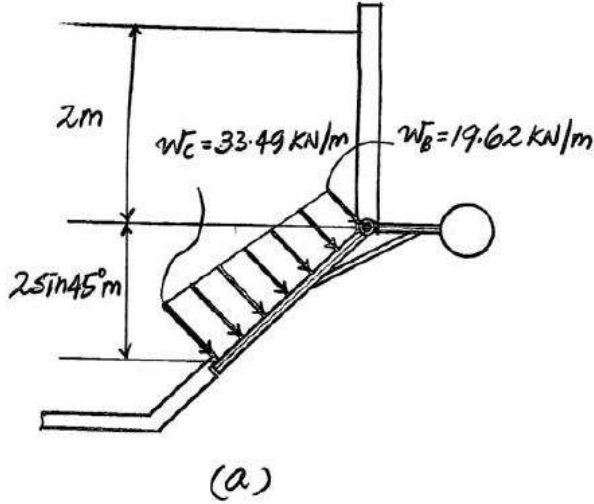


ÇÖZÜM:

$$w_B = \rho_w g h_B b = 1000(9.81)(2)(1) = 19620 \text{ N / m} = 19.62 \text{ kN / m}$$

$$w_C = \rho_w g h_C b = 1000(9.81)(2 + 2 \sin 45^\circ)(1) = 33493.44 \text{ N / m} = 33.49 \text{ kN / m}$$

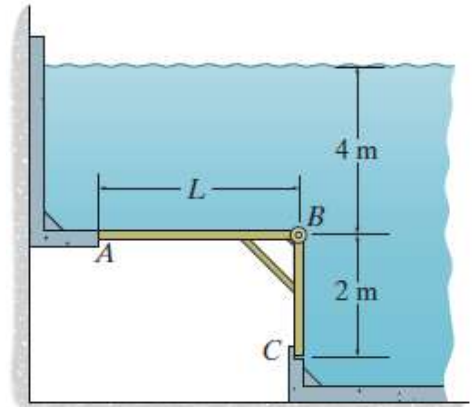
$$\begin{aligned} \sum M_B = 0, \quad N_C(2) + \frac{1}{2}(33.49 - 19.62)(2)\left(\frac{2}{3}\right)(2) + 19.62(2)(1) - \frac{6500(9.81)}{1000}(1) &= 0 \\ N_C &= 3.02 \text{ kN} \end{aligned}$$



10. ABC kapağının AB kısmı yeterince uzun olduğunda kapak açılmaya meyletmektedir. Buna göre kapağın açılmasına neden olacak AB kısmının en küçük L uzunluğu ne olmalıdır?

Kapak B noktasında mafsallıdır ve kapağın kâğıt düzlemine dik genişliği $b = 1 \text{ m}$ 'dir.

Suyun yoğunluğu ise $\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$ 'tür.



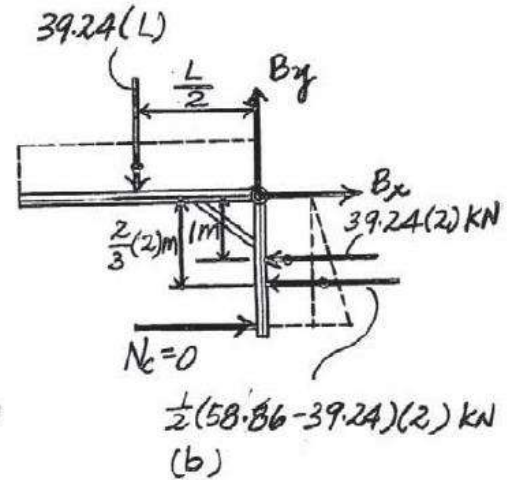
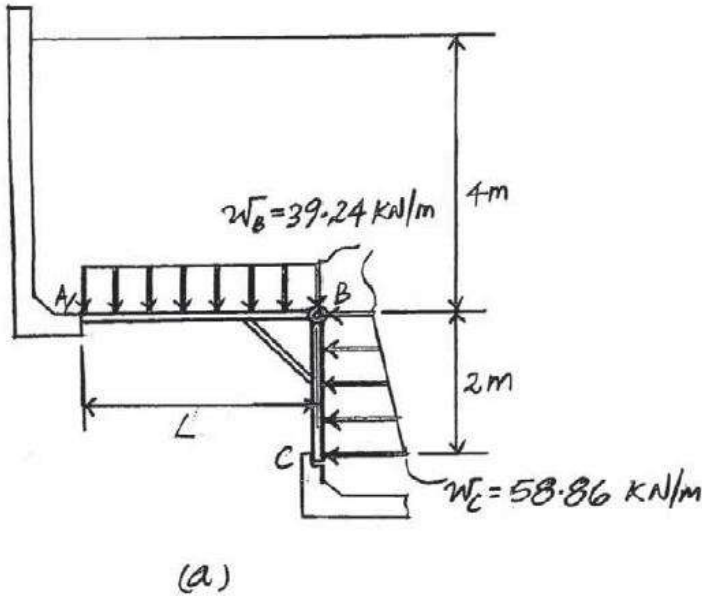
ÇÖZÜM:

$$w_B = \rho_w g h_B b = 1000(9.81)(4)(1) = 39\,240 \text{ N} = 39.24 \text{ kN}$$

$$w_C = \rho_w g h_C b = 1000(9.81)(6)(4 + 2) = 58\,860 \text{ N} = 58.86 \text{ kN}$$

$$(+\Sigma M_B = 0; \quad 39.24(L) \left(\frac{L}{2} \right) - 39.24(2)(1) - \frac{1}{2} (58.86 - 39.24)(2) \left(\frac{2}{3} \right) (2) = 0$$

$$L = 2.31 \text{ m}$$



Engineering Mechanics: Statics in SI Units, 12e

9

Atalet Momenti

Atalet Momentleri (Moments of Inertia)



Amaçlar:

(i) Aalet momentlerinin hesabı için gerekli yöntemler;

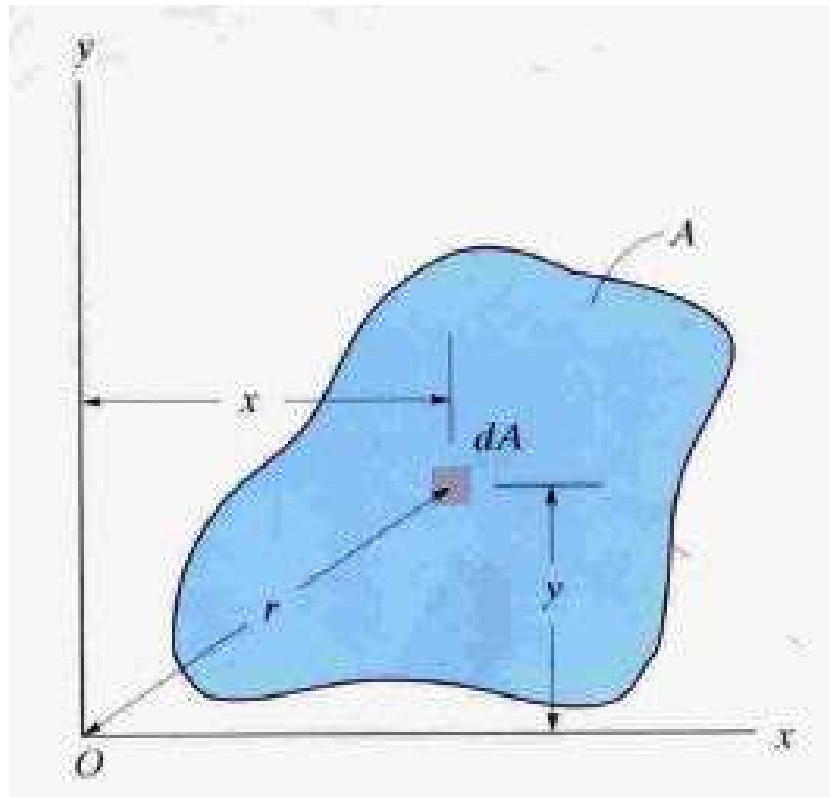
Atalet Momentleri:

Sonsuz küçük dA alanının x ve y eksenlerine göre atalet momentleri

$$dI_x \triangleq y^2 dA$$

$$dI_y \triangleq x^2 dA$$

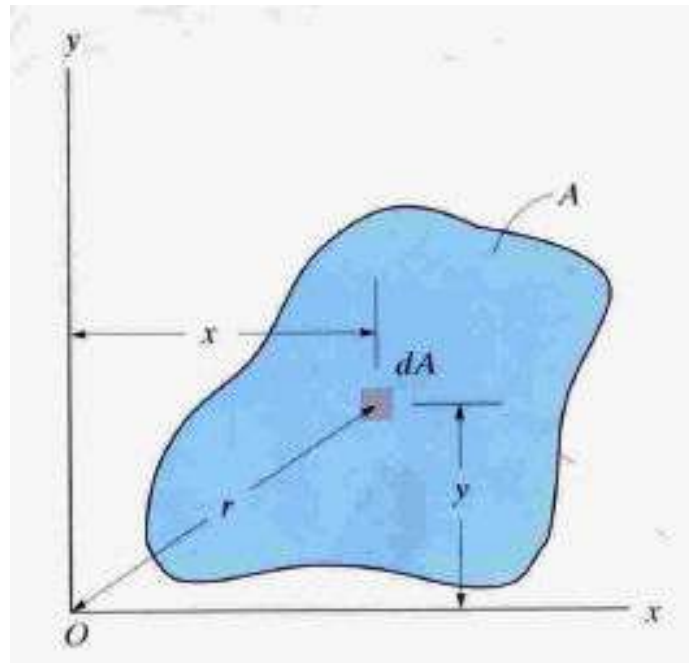
($\triangleq$: tanım olduğunu belirtir)



Tüm alan için atalet momentleri aşağıda verilmiştir :

Alanların İkinci momentleri !

$$\left\{ \begin{array}{l} I_x \triangleq \int y^2 dA \quad : \quad \begin{array}{l} \text{dA'nın } x\text{-eksenine uzaklığı} \\ x\text{-eksenine göre tüm alanın atalet mom.} \end{array} \\ I_y \triangleq \int x^2 dA \quad : \quad \begin{array}{l} y\text{-eksenine " " " " " " } \\ \text{dA'nın } y\text{-eksenine uzaklığı} \end{array} \end{array} \right.$$



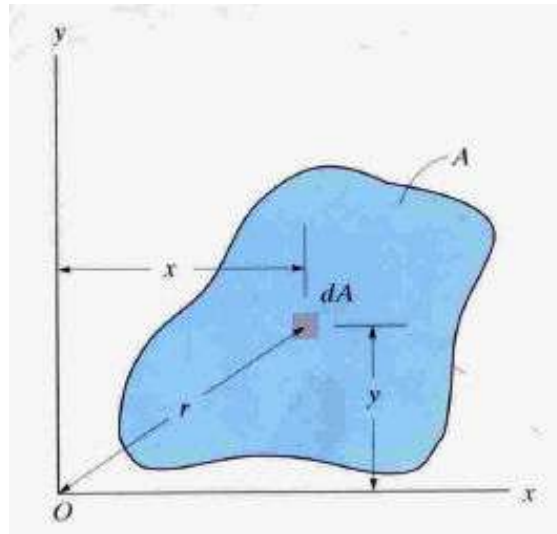
Animasyon – 1-12!

dA için bu ifadeler bir O nok. dikkate alınarak da hesaplanabilir.

$dJ_O = r^2 dA$, burada r , O noktasından dA 'ya dik mesafe olarak alındı. Tüm alan için bu değer:

$$J_O = \int_A r^2 dA = I_x + I_y \text{ olarak bulunur.}$$

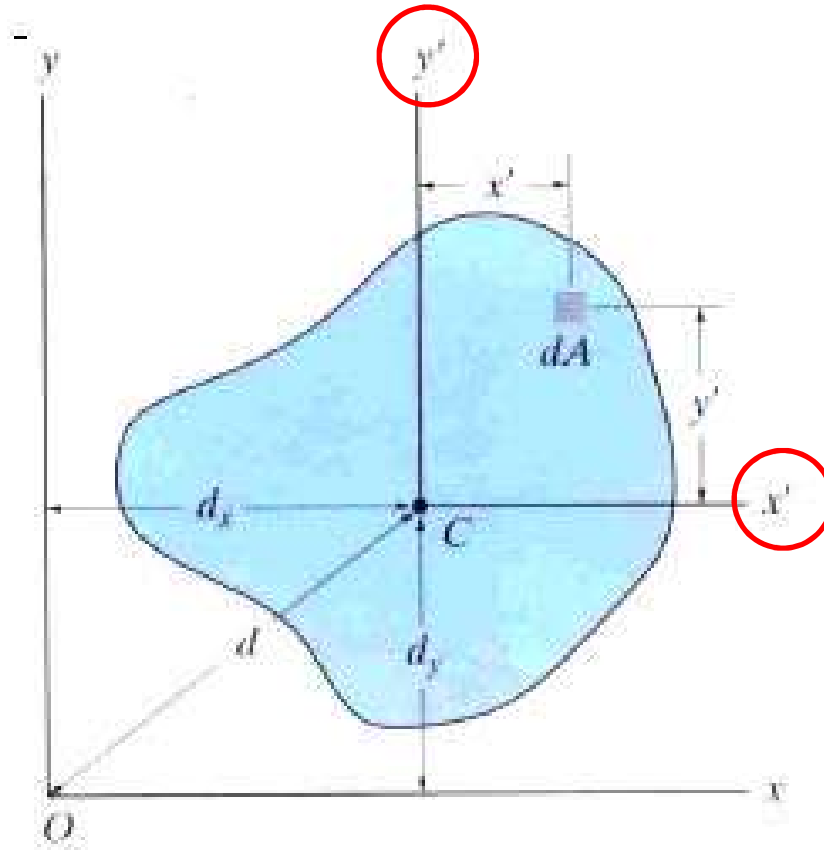
J_O ile I_x ve I_y arasındaki bu ilişki, $r^2 = x^2 + y^2$ ilişkisinden kaynaklıdır. Dikkat edilirse I_x , I_y ve J_O her zaman pozitif büyüklüklerdir, ağırlık uzaklığının karesi ve alanın çarpımının integrasyonu ile bulunurlar.



Alan için Paralel Eksenler Teoremi :

Bu teorem bir alanın ağırlık merkezinden geçen eksenlere paralel herhangi ^{başka}

iki eksenle göre alan atalet momentlerinin hesabında kullanılır:



agirlik merkezinin
geçen

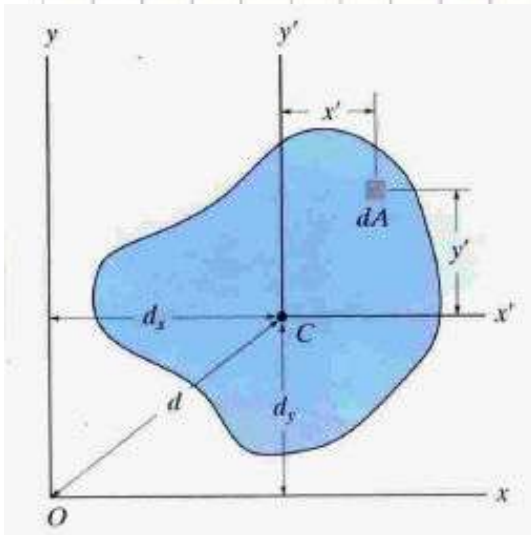
Teoremin ispatılması için x' -ekseninden rastgele y' mesafesinde bir dA alanını alalım. Ayrıca x' -ekseniyle ona paralel x eksenini orosunda da dy mesafesi olsun. Bu durumda toplam gereği;

$$dI_x = (y' + dy)^2 dA \text{ olarak bulunur.}$$

Toplam alan için;

$$I_x = \int_A (y' + dy)^2 dA = \int_A y'^2 dA + 2dy \int_A y' dA + dy^2 \int_A dA$$

(1) (2) (3)



Şimdi tek tek bu ifadeleri bakalım:

(1) 1. ifade: Alanın x' -eksenine göre atalet momentidir, ağırlık merkezinden geçen eksen,

(2) 2. ifade: dikkatlice bakılırsa sıfır olduğu görülür, çünkü $\bar{y}' = 0$ 'dır (x' ağırlık merkezidir); $\int y' dA = \bar{y}' \int dA = 0$ çünkü $\bar{y}' = 0$ 'dır

(3) 3. ifade: $\int_A dA = A$ olduğu için $\int dy^2 dA = dy^2 A$ 'dır.

Bu durumda;

$$I_x = \int y'^2 dA + A dy^2 = \bar{I}_{x'} + A d^2$$

x' -ekseninin x -eksenine ^{dik} uzaklığı

x' 'ne paralel diğer bir eksen

x' -ekseninin x -eksenine ^{dik} uzaklığı

$\bar{I}_{x'}$ ağırlık merkezinden geçen x' -eksenine göre atalet momentidir!

$$I_x = \int_A (y' + dy)^2 dA = \int_A y'^2 dA + 2dy \int_A y' dA + dy^2 \int_A dA$$

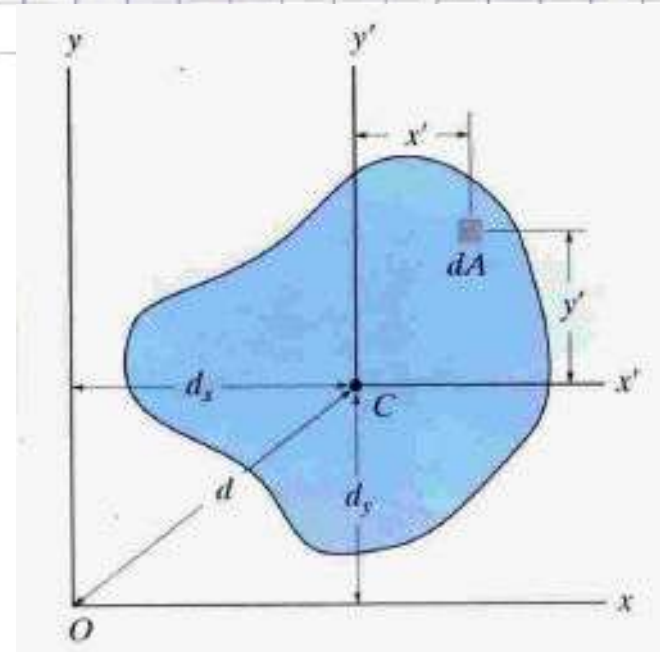
(1) (2) (3)

Benzer bir ifade y -ekseni için de yazılabilir :

$$I_y = \bar{I}_y + A d_x^2$$

$\nearrow$ $\bar{I}_y$: ağırlık merkezinden geçen y' -eksenine göre atalet momenti
 $\underbrace{A d_x^2}_{\text{toplam abs}} \sim y$ ekseninin y' eksenine olan ^{dik} uzaklığı !

Önemli NOT: Dikkat edilirse x' ve y' eksenleri ağırlık merkezinden geçmektedir !



Paralel eksen teoremine göre polar atalet momenti hesabı ise aşağıdaki gibi bulunur:

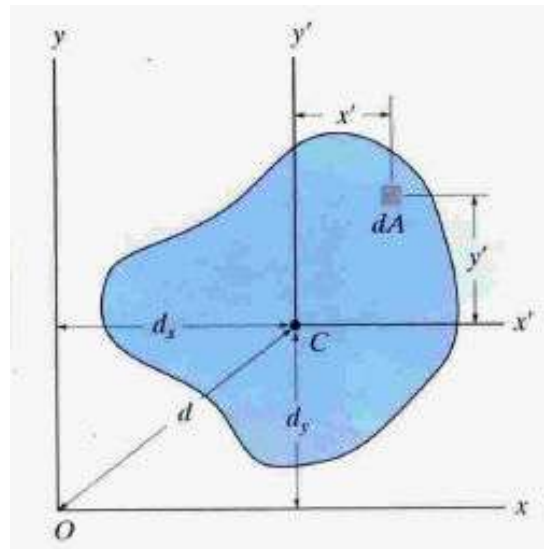
$$\bar{J}_C = \bar{I}_{x'} + \bar{I}_{y'} \text{ olduğuna göre ve}$$

$$d^2 = dy^2 + dx^2 \text{ ile}$$

$$\bar{J}_O = \bar{J}_C + \overbrace{A d^2}^{\text{Toplam Alan}}$$

alan merkezine
göre polar atalet
momenti

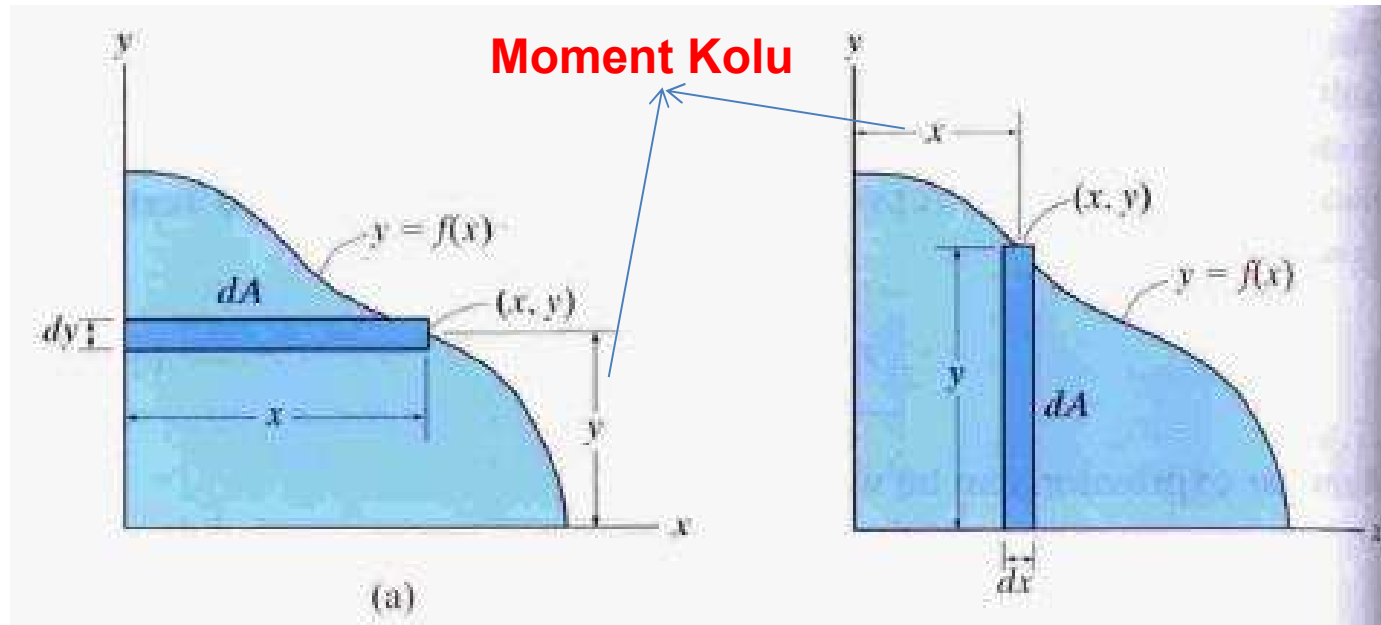
ağırlık merkezinden
O noktasına olan
dik uzaklık



Bu üç denklemin ifade ettiği durum şöyle
özetlenebilir: ağırlık merkezinden geçen
eksenlere **paralel** diğer eksenlere göre **alan**
atalet momenti, alanın **alan merkezinden** geçen
eksenlere göre **(atalet momenti) + (toplam alan**
*** bu paralel eksenler arasındaki dik mesafenin**
karesinin) toplamına eşittir.

Hesap Yöntemi

Birçok durumda atalet momenti tek bir integralle bulunabilmektedir.

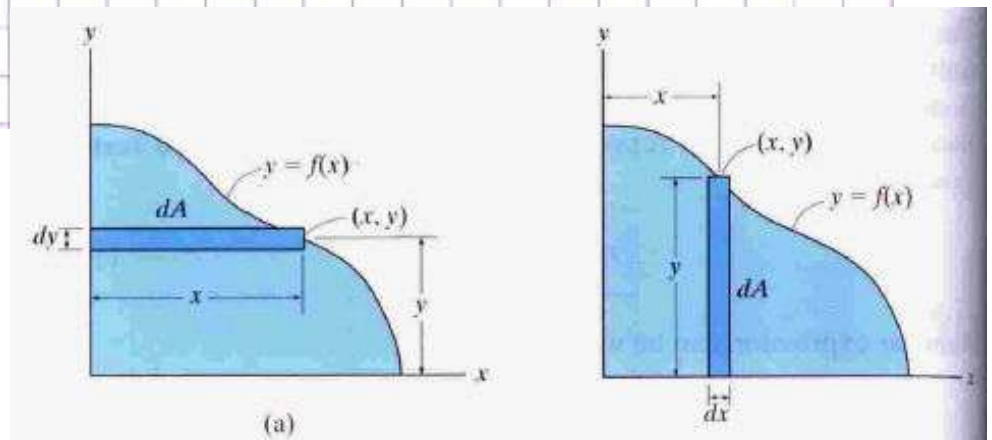


- Eğer eğri $y = f(x)$ şeklinde tanımlanabiliyorsa, sonlu uzunlukta ama diferansiyel genişlikte bir dikdörtgen eleman seçerek hesap yapılabilir.
- Bu eleman eğriyi herhangi bir (x, y) noktasında keserek çekilme sağlanmalıdır.

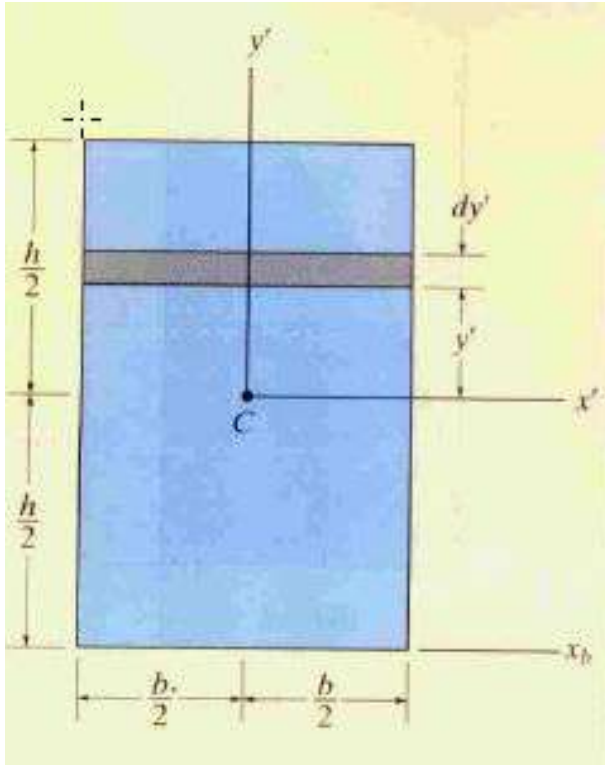
Buradaki diferansiyel dikdörtgen elemanlar dikkat edilirse x -eksenine göre atalet momenti bulunurken x -eksenine paralel; y -eksenine göre atalet momenti bulunurken ise y -eksenine paralel seçilmiştir; bu durumda aşağıdaki formüller direkt olarak kullanılabilir: - Durum 1

$$I_x = \int y^2 dA \quad \text{ve} \quad I_y = \int x^2 dA$$
$$dA = x dy \quad \quad dA = y dx$$

Ancak bunun tersi de yapılabilmektedir; bu durumda dikkat edilince moment kolu x ve/veya y seçilen dikdörtgen için sabit olmamaktadır. Bu durumda paralel eksenler teoremi kullanılmalıdır (örnekle açıklayacak) - Durum 2



Örnek:



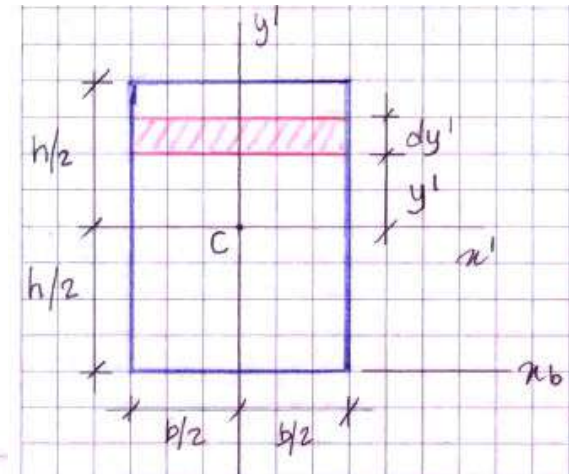
÷ Şeçilide gösterilen dikdörtgen alorın,

(a) ağırlık merkezinden geçen x' eksenine göre ,

b) tabanından geçen x_b eksenine göre

c) ağırlık merkezinden geçen z' eksenine göre polar atalet moment değerini bulunuz

atalet momentini



Durum 1'e örnek:

- a) Diferansiyel dikdörtgen x' eksenine paralel zıttığı için tüm eleman x' eksenine y' mesafesindedir, ve denklem direkt kullanılabilir:

$$\bar{I}_{x'} = \int_A y'^2 dA, \quad dA = b dy'$$

$$\bar{I}_{x'} = \int_{-h/2}^{h/2} y'^2 (b dy') = b \int_{-h/2}^{h/2} y'^2 dy' : \text{Sınırlar } -h/2 \text{ ile } h/2 \text{ arasındadır.}$$

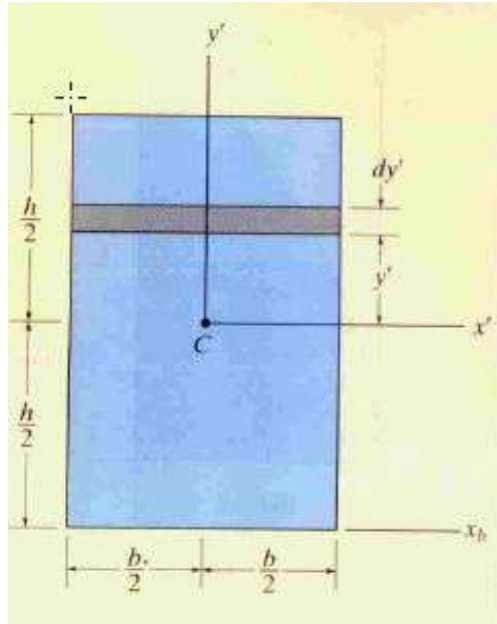
$$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{12} b h^3 \text{ olarak bulunur!}$$

b) Paralel eksen teoremi kullanılarak:

$$\begin{aligned} I_{xb} &= \bar{I}_{x'} + A d_y^2 \\ &= \frac{1}{12} b h^3 + (bh) \left(\frac{h}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} b h^3 \end{aligned}$$

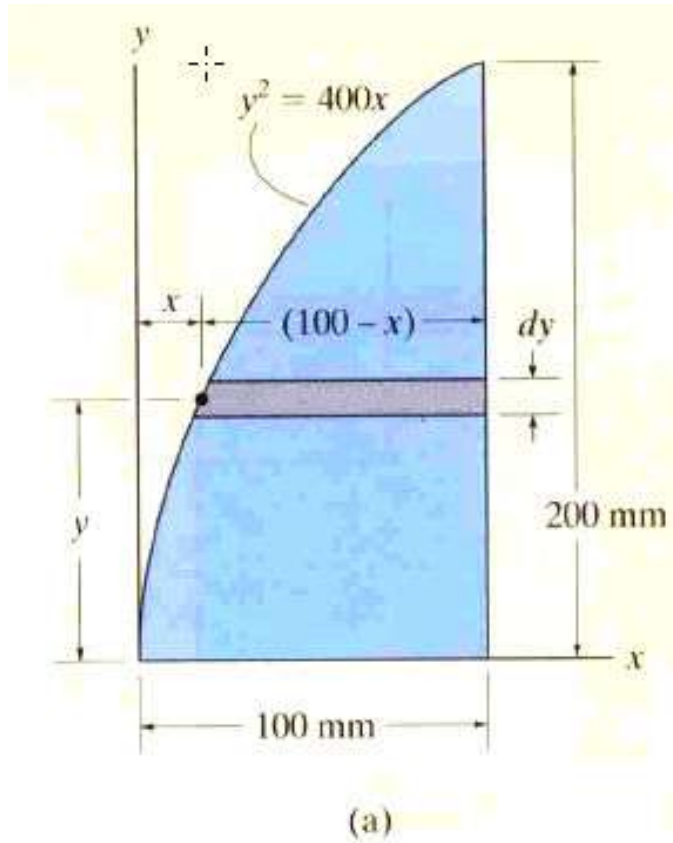
c) $\bar{J}_C = \bar{I}_{x'} + \bar{I}_{y'}$, $\bar{I}_{y'}$ 'nin bulunması gerekmektedir!

$\bar{I}_{y'}$ direkt olarak bulunabilir: $\bar{I}_{y'} = \frac{1}{12} h b^3$



$$\bar{J}_C = \frac{1}{12} b h^3 + \frac{1}{12} h b^3 = \frac{1}{12} b h (b^2 + h^2)$$

Örnek:

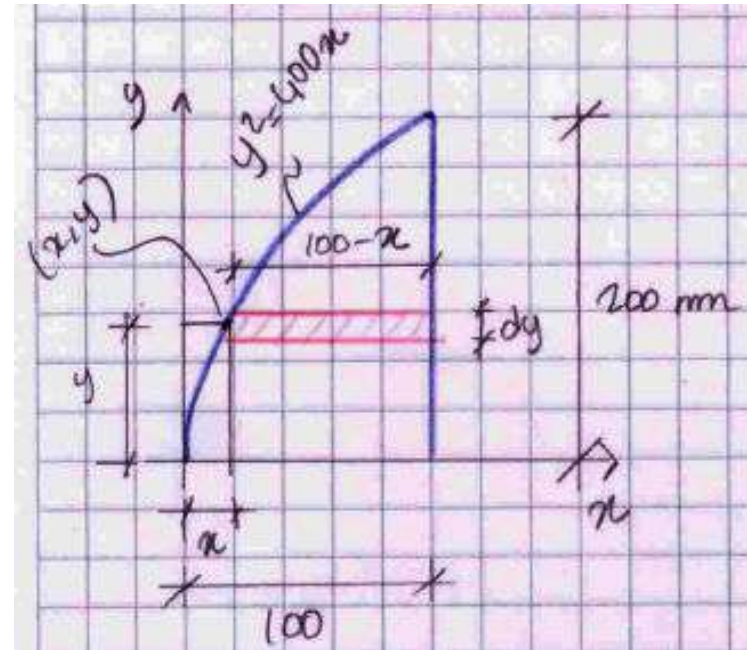


Şekilde gösterilen alanın x -eksenine
göre atalet momentini bulunuz!

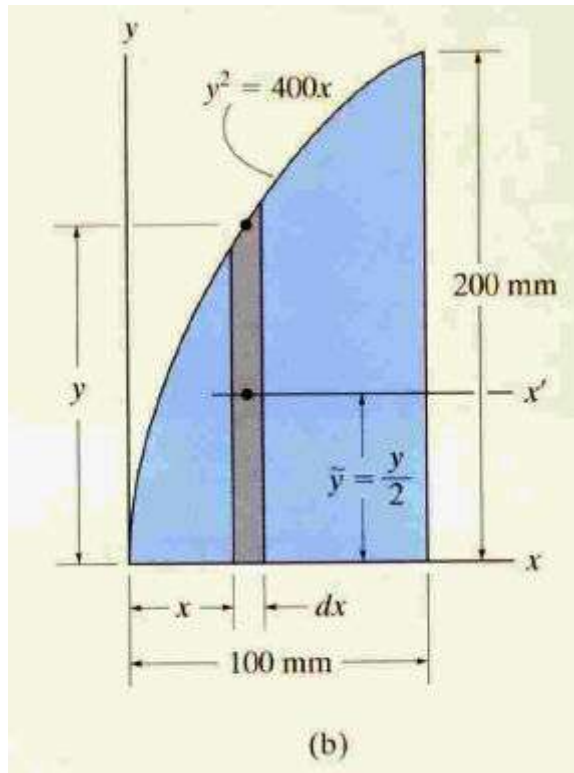
Örnek 1:

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_0^{200} y^2 (100 - x) dy$$

Değişken değiştirme gerektirir;



$$I_x = \int_0^{200} y^2 \left(100 - \frac{y^2}{400} \right) dy = \int_0^{200} \left(100y^2 - \frac{y^4}{400} \right) dy$$
$$= 107 \times 10^6 \text{ mm}^4 \text{ olarak bulunur!}$$



Durum 2:

$$dI_x = d\bar{I}_{x'} + dA \bar{y}^2$$

$$= \frac{1}{12} dx (y)^3 + y dx \left(\frac{y}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} y^3 dx$$

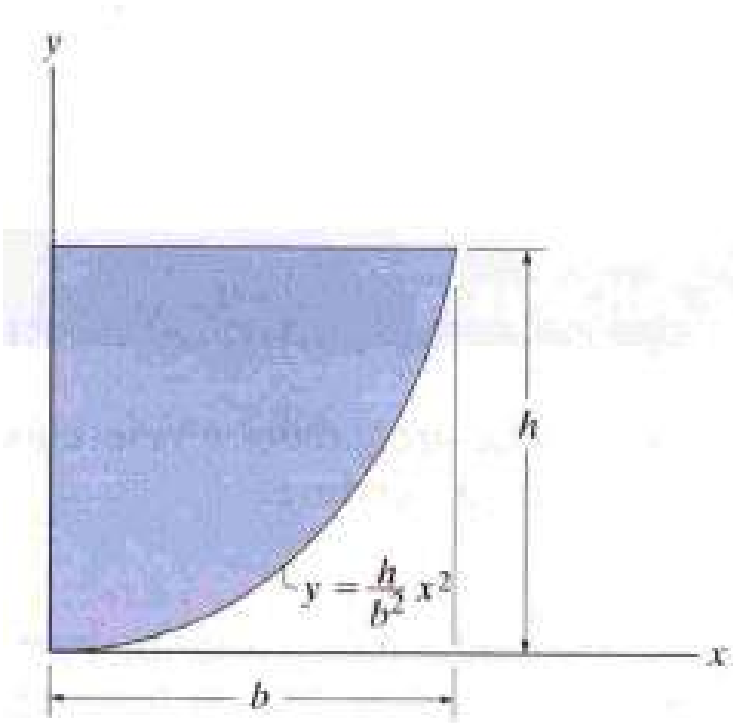
Bu sonucu ilk örnekten de kullanmak mümkündür!

$$I_x = \int dI_x = \int_0^{100} \frac{1}{3} y^3 dx = \int_0^{100} \frac{1}{3} (400x)^{3/2} dx$$

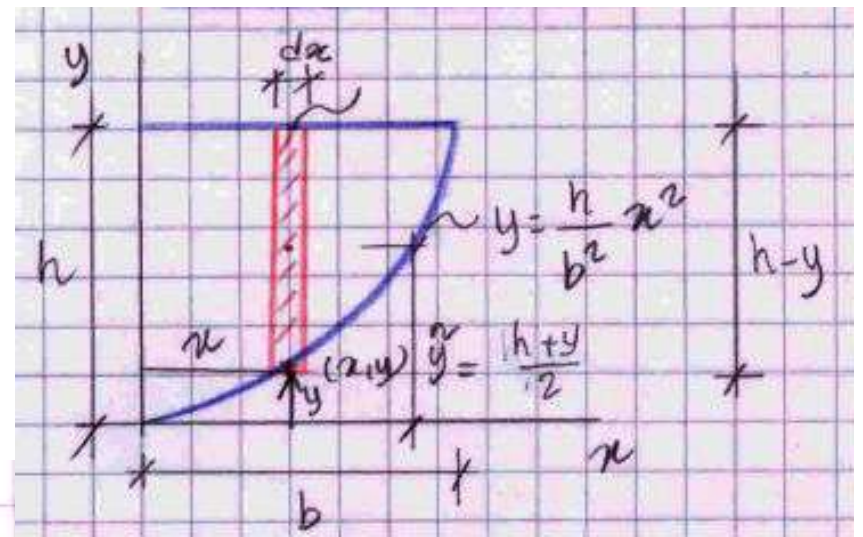
$$= \frac{1}{3} (400)^{3/2} \int_0^{100} x^{3/2} dx$$

$$= \frac{1}{3} (400)^{3/2} \frac{1}{5/2} x^{5/2} \Big|_0^{100} = 107 \times 10^6 \text{ mm}^4 \text{ olarak bulunur.}$$

Örnek:



÷
Zikilde gösterilen alanın
y-eksenine göre atalet momentini bulunuz.



Durum-1:

$$dA = (h-y) dx = \left(h - \frac{h}{b^2} x^2\right) dx$$

Aalet momenti:

$$I_y = \int_A x^2 dA = \int_0^b x^2 \left(h - \frac{h}{b^2} x^2\right) dx$$

$$= \frac{h}{3} x^3 - \frac{h}{b^2} \frac{1}{5} x^5 \Big|_0^b = \underline{\underline{\frac{2}{15} h b^3}}$$

x-eksenine göre atalet momentini durum 2'yi kullanarak bulalım:

Durum - 2 :

+

$$d\bar{I}_{x'} = \frac{1}{12} dx (h-y)^3 = \frac{1}{12} dx \left(h - \frac{h}{b^2} x^2\right)^3$$

: ağırlık merkezinde geçen x' -eksenine göre atalet mom.

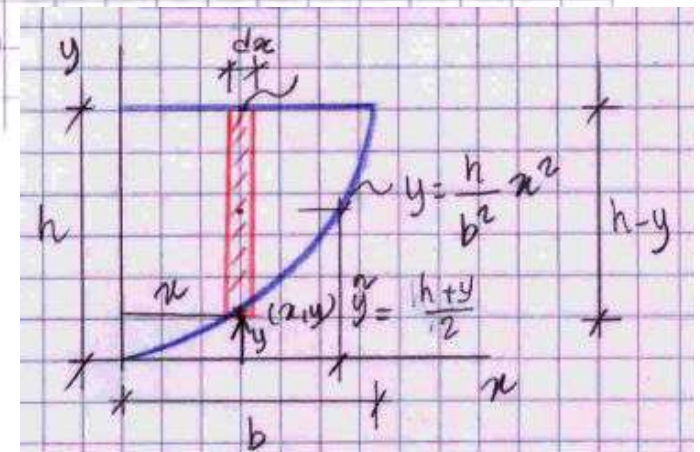
$$dI_x = d\bar{I}_{x'} + A \tilde{y}^2$$

: x -eksenine göre atalet mom.

$$= \frac{1}{12} \left(h - \frac{h}{b^2} x^2\right)^3 dx + \underbrace{\left(h - \frac{h}{b^2} x^2\right) dx}_{dA} \left(\frac{h + \frac{h}{b^2} x^2}{2}\right)^2$$

$$I_x = \int_0^b dI_x \quad \text{reklinde de bulunabilirdi!}$$

Bu integral, ilk integrale göre oldukça zor!



Kompozit Alanların Atalet Momentleri

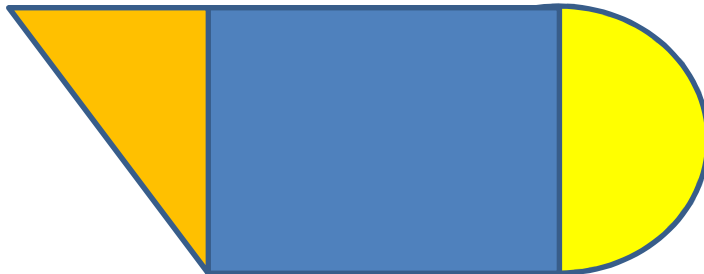
Kompozit alanlar bir seri daha basit/femel parçaların veya şekillerin (dikdörtgen, üçgen, daire v.b.) biraraya gelmesinden oluşmuştur. Bu parçaların atalet momenti biliniyor veya bir eksene göre hesaplanabiliyorsa kompozit alanın (tüm alanın) bu eksene göre atalet momenti parçaların atalet momentinin cebirsel toplamıdır.

Analiz Yöntemi

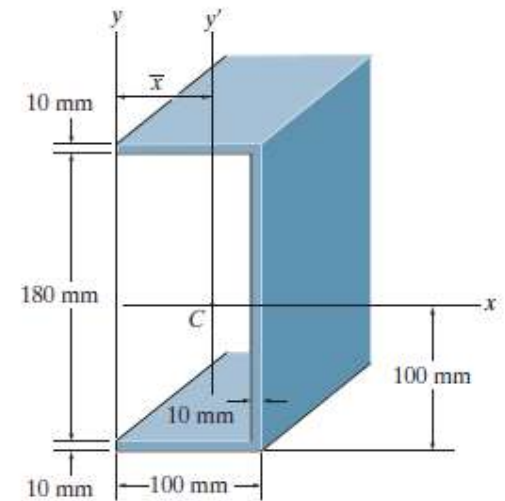
Kompozit alanın bir eksen

göre atalet momentli özgüldeki azamalar gerçekleştirilerek bulunur:

Bir Kompozit Alan Örneği



Bir başka kompozit alan örneği

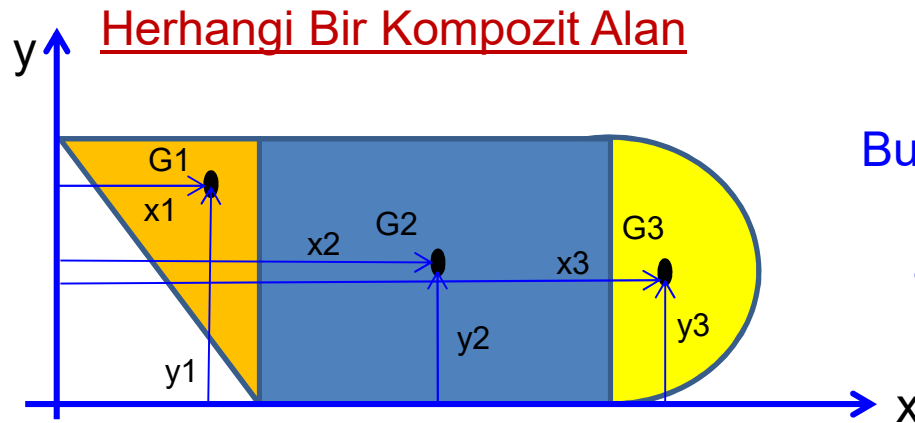


- Kompozit Parçalar:

Tüm alan kompozit parçalara ayrılır, ve bu parçaların ağırlık merkezlerinden referans eksenine dik mesafeler gösterilir,

- Paralel Eksen Teoremi:

Eğer parçaların merkezlerinden geçen eksenler referans eksenine gokuz-
miyorsa, paralel eksen teoremi kullanılmalıdır: $I = \bar{I} + Ad^2$. $\bar{I}$: parçaların ağırlık merkezinden geçen eksenlere göre atalet momenti, tablodan edinilebilir



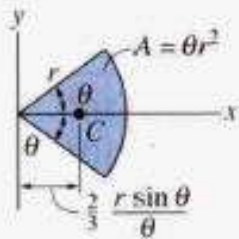
Bu kompozit alanın x ve y eksenlerine göre atalet momentlerini nasıl buluruz?

- Tüm alanın o referans eksenine göre atalet momenti, kompozit alanların aynı referans eksenine göre olan atalet momentlerinin toplamına eşittir.
- Eğer kompozit alanda bir boşluk mevcutsa, bu boşluğun atalet momenti çıkarılarak toplamaya yansıtılır.



Bazı Temel Şekillerin Atalet Momentleri

Centroid Location

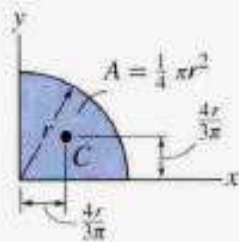


Circular sector area

Area Moment of Inertia

$$I_x = \frac{1}{4} r^4 (\theta - \frac{1}{2} \sin 2\theta)$$

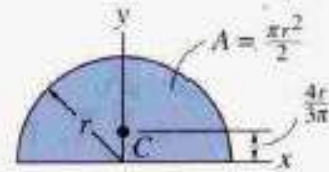
$$I_y = \frac{1}{4} r^4 (\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta)$$



Quarter circle area

$$I_x = \frac{1}{16} \pi r^4$$

$$I_y = \frac{1}{16} \pi r^4$$

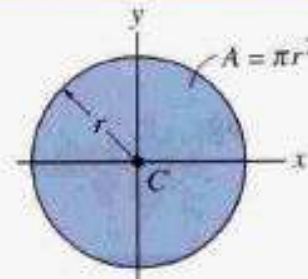


Semicircular area



$$I_x = \frac{1}{8} \pi r^4$$

$$I_y = \frac{1}{8} \pi r^4$$

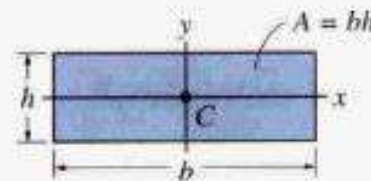


Circular area



$$I_x = \frac{1}{4} \pi r^4$$

$$I_y = \frac{1}{4} \pi r^4$$

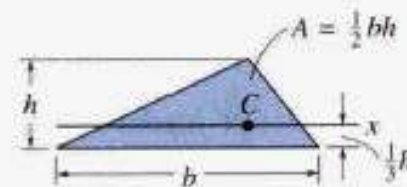


Rectangular area



$$I_x = \frac{1}{12} b h^3$$

$$I_y = \frac{1}{12} h b^3$$

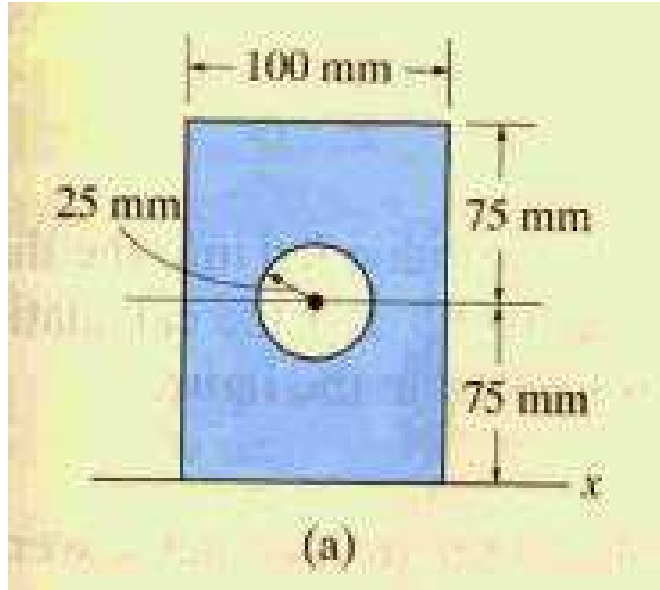


Triangular area

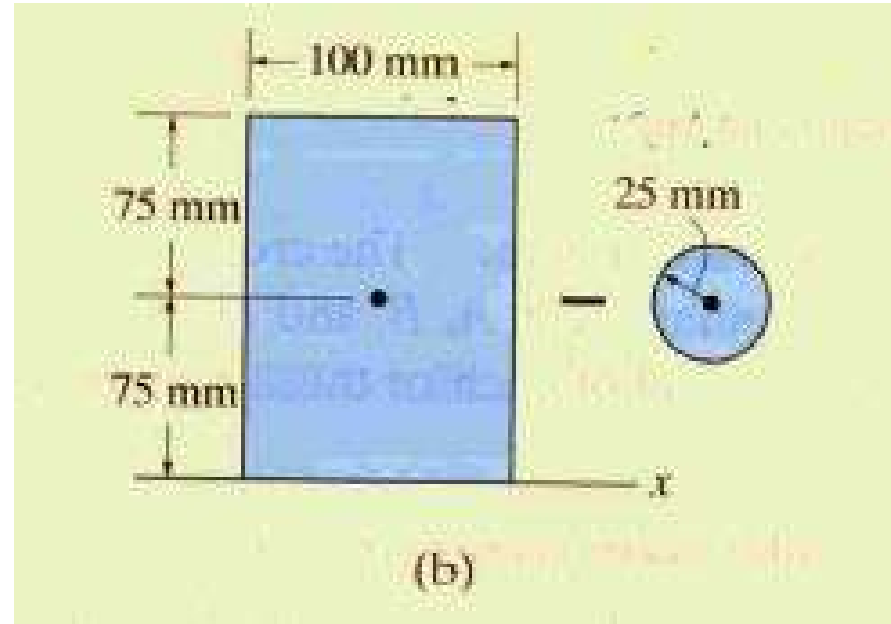


$$I_x = \frac{1}{36} b h^3$$

Örnek:



Şekilde gösterilen kompozit alanın
x- eksenine göre atalet momentini
bulunuz.



iki kompozit abidesi

oluşuyor. Bunların merkezleri de

şekilde gösterildi.

Dikkat edilirse merkezler x -eksenine ile çakışmamakta, bu durumdan paralel eksen teoremi kullanılmalı!

Daire:

$$I_x = \bar{I}_{x'} + A d_y^2$$

$$= \frac{1}{4} \pi (25)^4 + \pi (25)^2 (75)^2 = 11.4 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

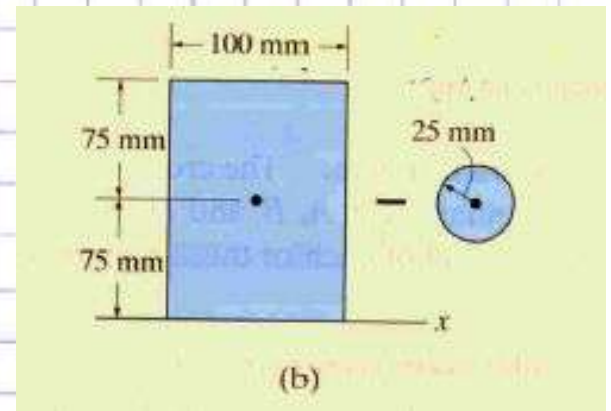
Dikdörtgen:

$$I_x = \bar{I}_{x'} + A d_y^2$$

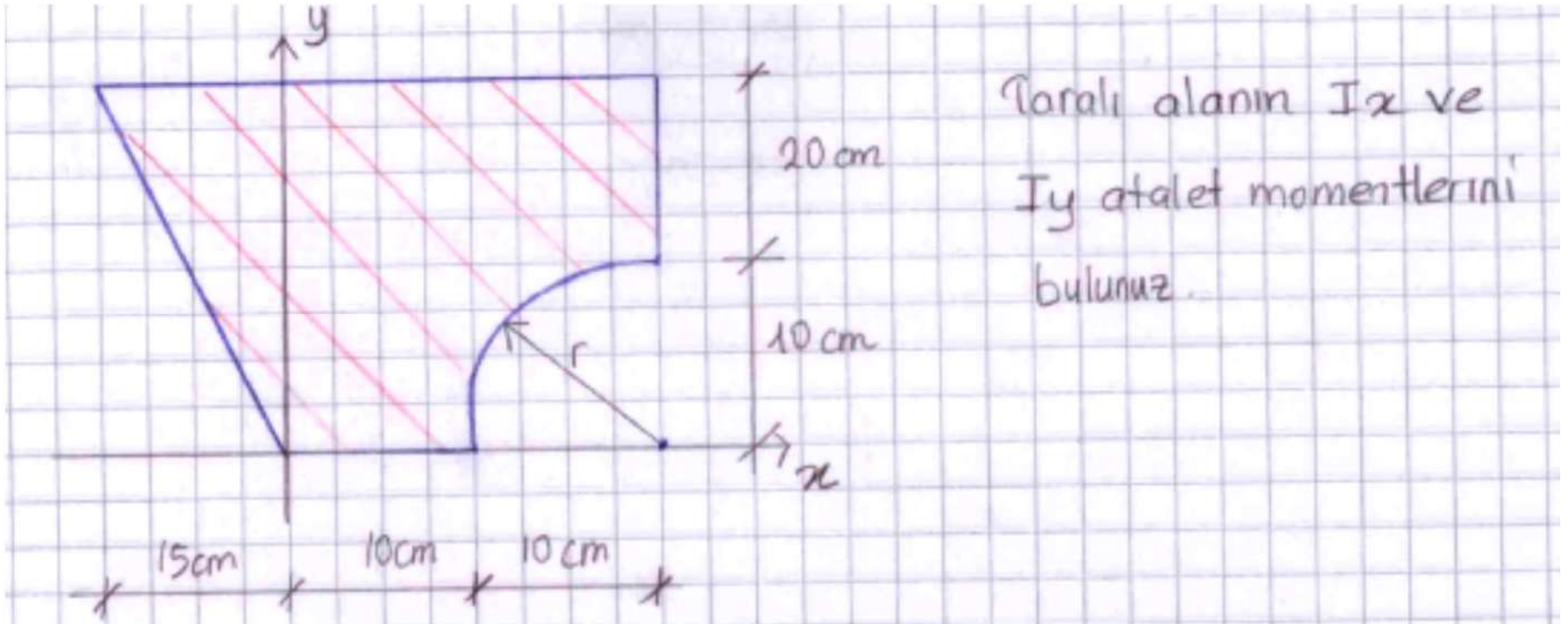
$$= \frac{1}{12} (100)(150)^3 + (100)(150)(75)^2 = 112.5 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

Kompozit alanın x -eksenine göre atalet mom.:

$$I_x = -11.4 \times 10^6 + 112.5 \times 10^6 = \underline{\underline{101 \times 10^6 \text{ mm}^4}}$$

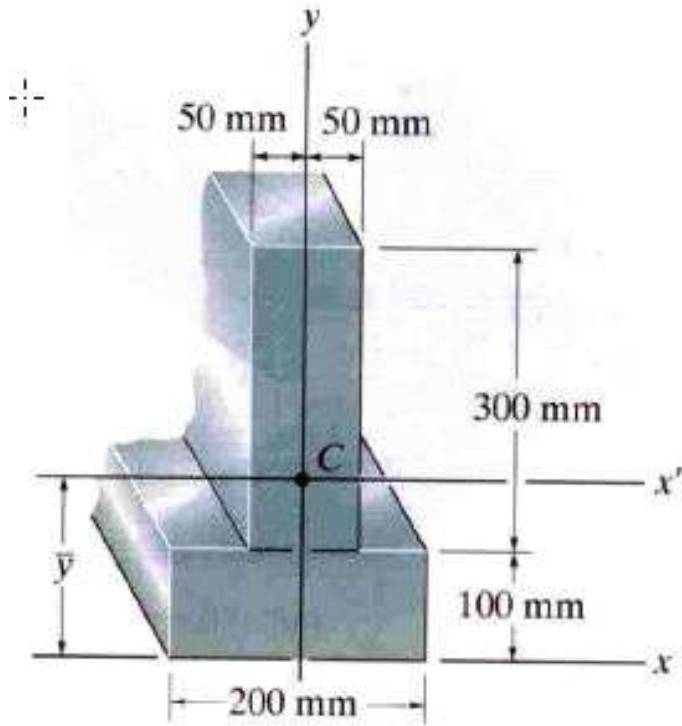


Örnek:

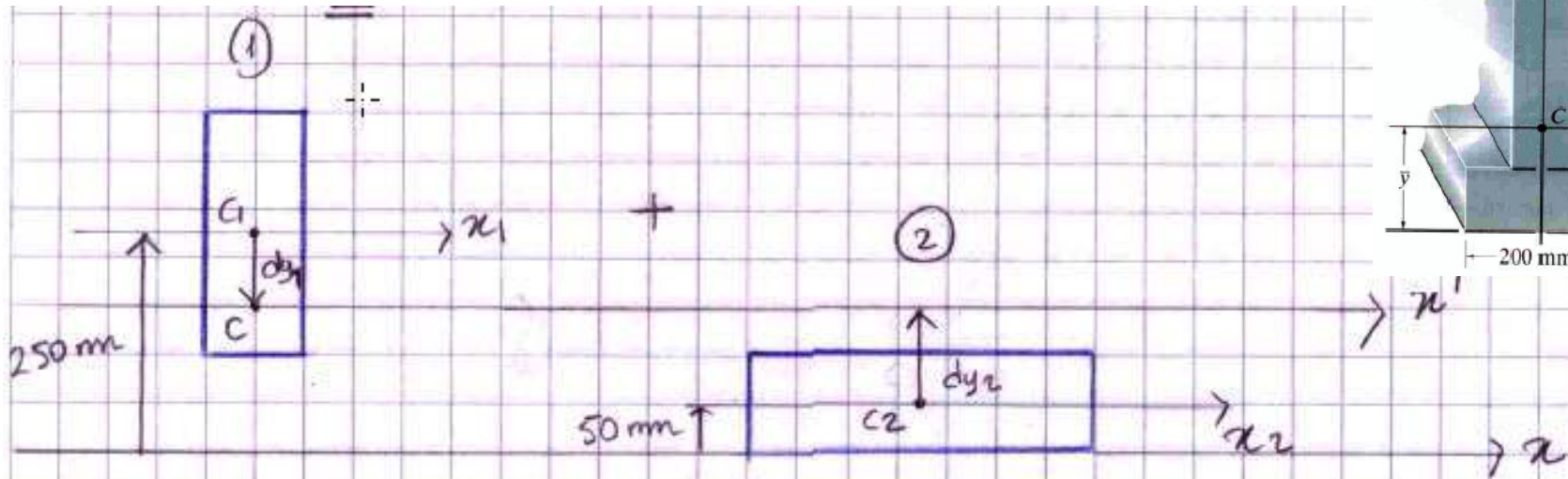
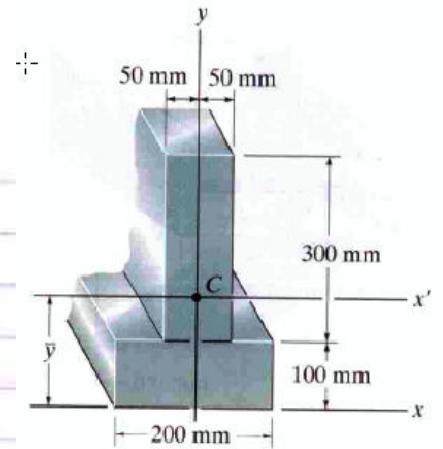


Çözümü web sitesine yüklendi. Lütfen oradan indirerek çalışın!

Örnek:



Şekilde gösterilen kapuzet alanın
ağırlık merkezinden geçen x'
eksenine göre atalet momentini
bulunuz.

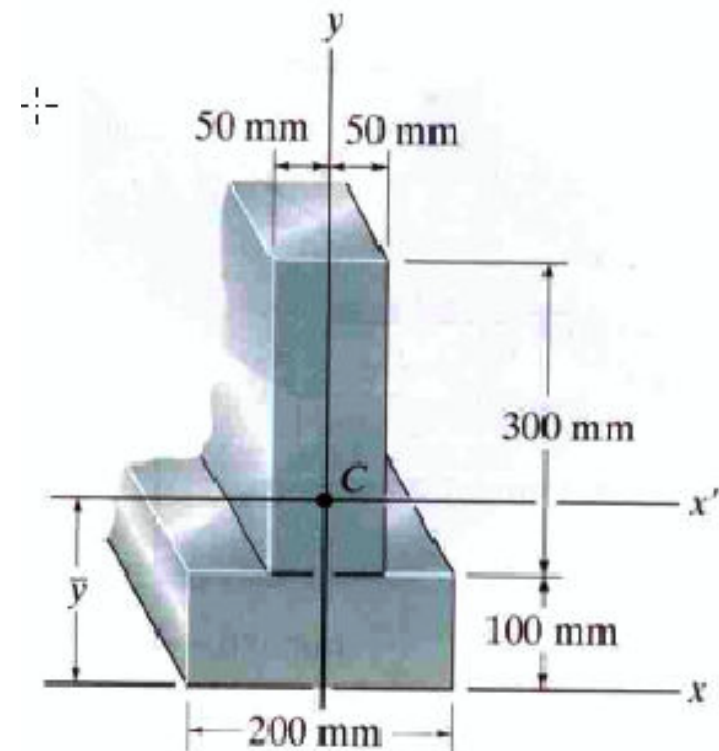


dy_1 ve dy_2 mesafelerini bulmak için kompozit alanın ağırlık merkezini bulmam gerekmektedir (C nok. yatay bir referans eksenine göre düzey mesafesi, bu yatay referans eksenini x -ekseni olarak seçilirse):

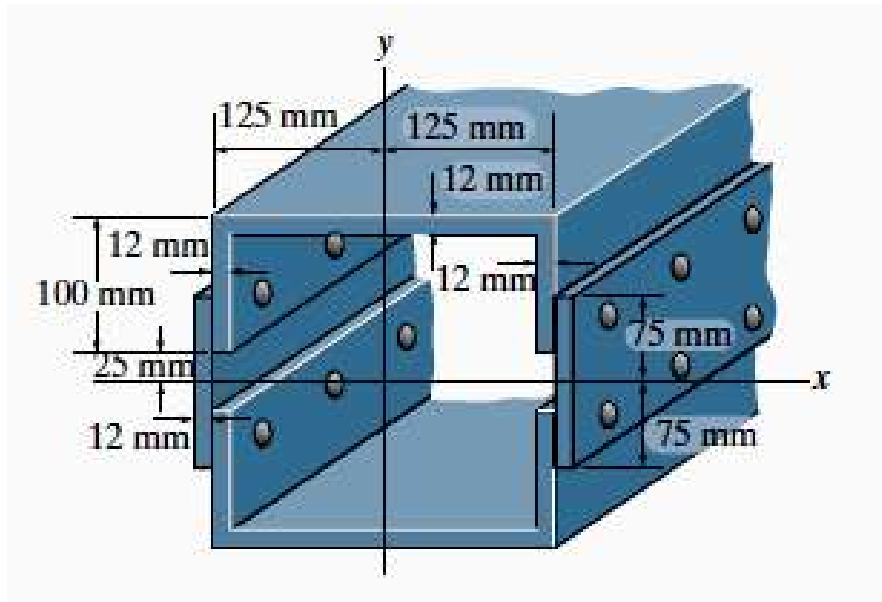
$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{y} A}{\sum A} = \frac{250(100)(300) + 50(100)(200)}{(100)(300) + (100)(200)} = \underline{170 \text{ mm}}$$

Şimdi dy_1 ve dy_2 mesafeleri bulunabilir ve paralel eksen teoremi uygulanabilir:

$$\begin{aligned} I_{x'} &= \frac{1}{12} 100 (300)^3 + (100)(300)(250-170)^2 + \\ &\quad \frac{1}{12} 200 (100)^3 + (200)(100)(170-50)^2 \\ &= \underline{\underline{722 \times 10^6 \text{ mm}^4}} \end{aligned}$$

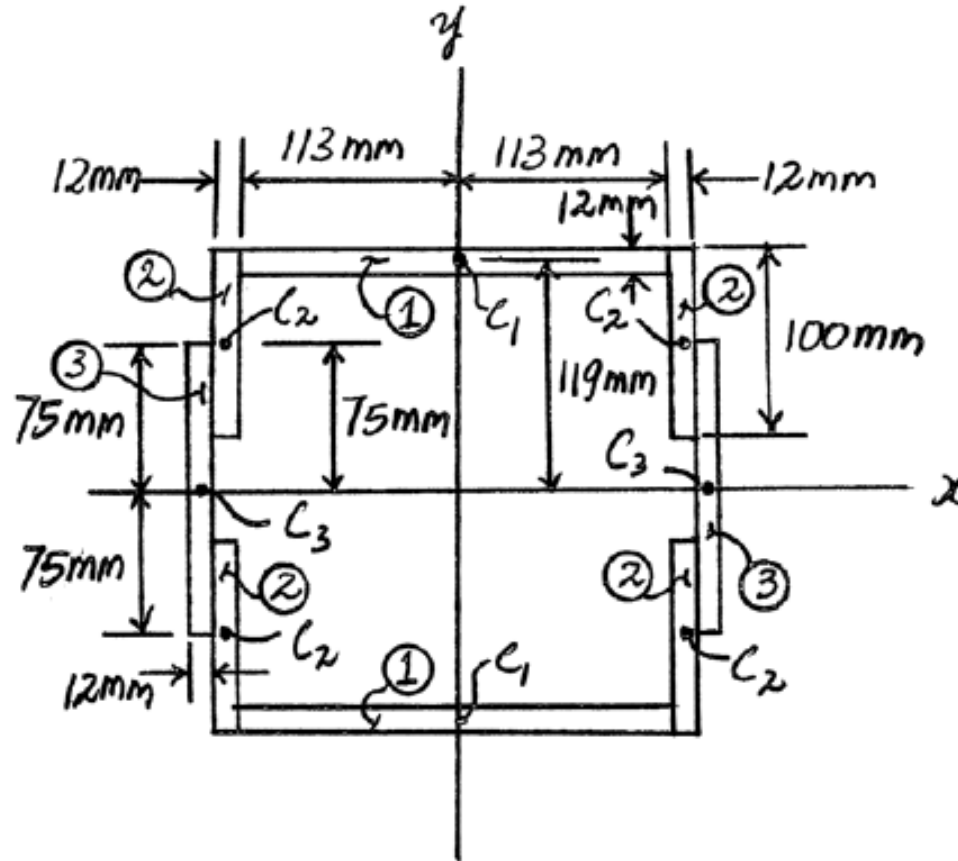


Örnek:



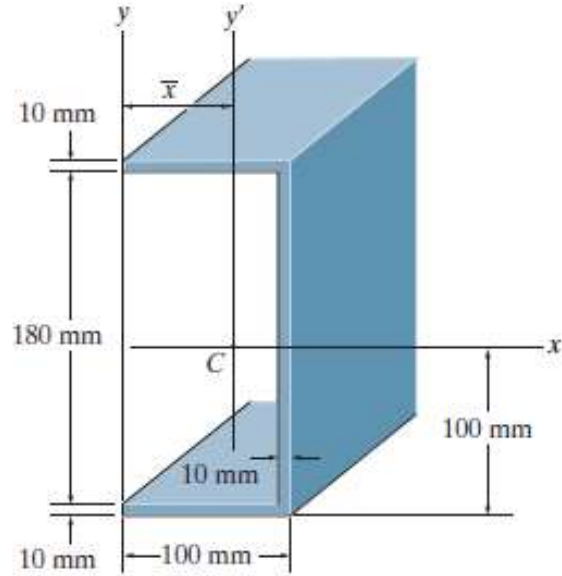
Şekilde gösterilen kesitin x eksenine göre atalet momentini bulunuz.

Kesit hem x, hem de y eksenlerine göre simetrik olduğuna göre, simetrik olan parçaların x eksenine göre atalet momentlerini bulmak yeterli olacaktır. Bunun için paralel eksen teoremi kullanılmalıdır çünkü parçaların ağırlık merkezleri ile x eksenini **ÇAKIŞMAMAKTADIR**.



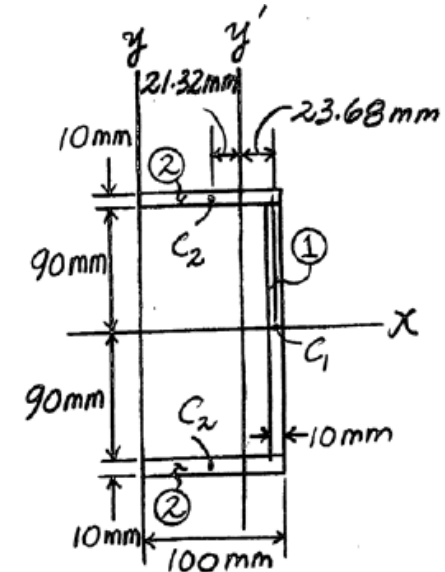
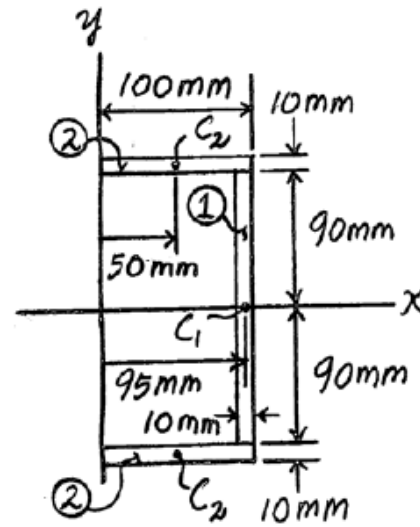
Cevap: 115e6 mm⁴

Ödev:



Şekilde gösterilen kesitin
ağırlık merkezinden geçen y'
eksenine göre atalet
momentini bulunuz.

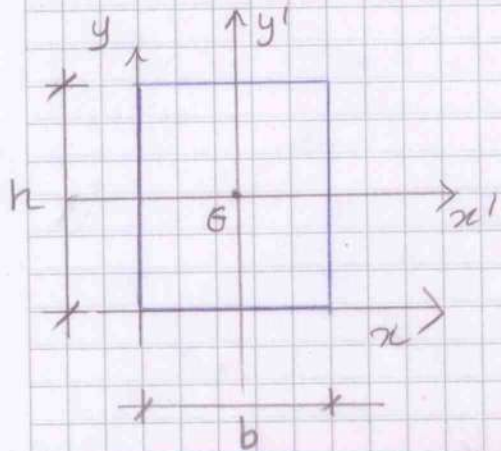
İpucu:



Cevap: $3.60 \times 10^6 \text{ mm}^4$

Temel Geometrik Alanların

Bazı eksenlere göre atalet momentleri

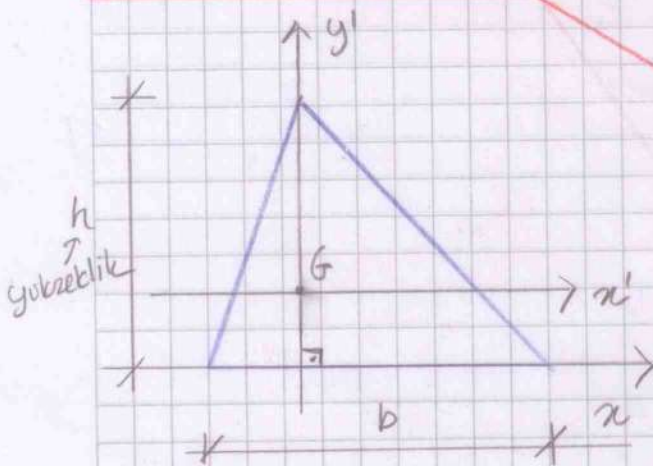


$$I_{x'} = \frac{1}{12} b h^3$$

$$I_{y'} = \frac{1}{12} h b^3$$

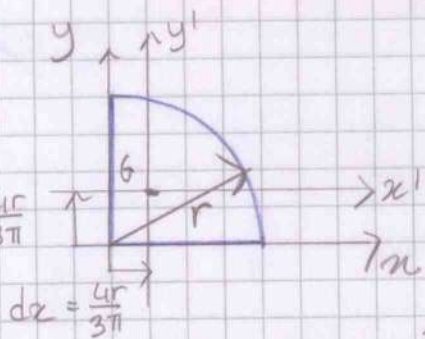
$$I_x = \frac{1}{12} b h^3 + b h \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} b h^3$$

$$I_y = \frac{1}{12} h b^3 + h b \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} h b^3$$



$$I_{x'} = \frac{1}{36} b h^3$$

$$I_x = \frac{1}{36} b h^3 + \frac{1}{2} b h \left(\frac{h}{3}\right)^2 = \frac{1}{12} b h^3$$



$$I_x = \frac{1}{16} \pi r^4, \quad I_y = \frac{1}{16} \pi r^4$$

$$I_x = I_{x'} + A d_y^2$$

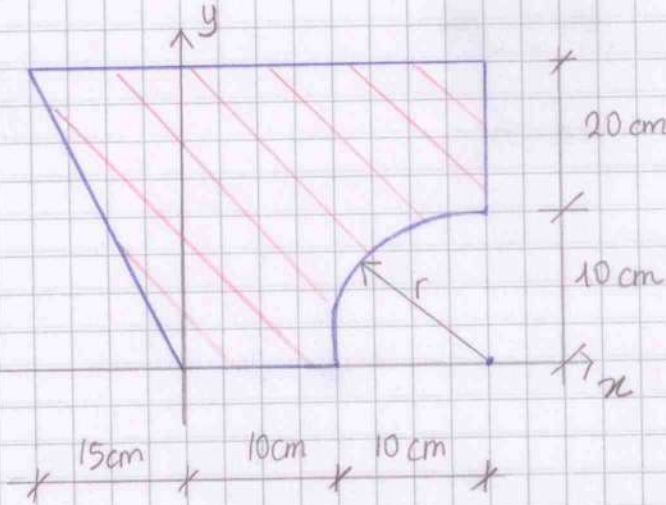
$$\frac{1}{16} \pi r^4 = I_{x'} + \frac{\pi r^2}{4} \left(\frac{4r}{3\pi}\right)^2 \text{ buradan}$$

$$I_{x'} = \frac{1}{16} \pi r^4 - \frac{\pi r^2}{4} \left(\frac{4r}{3\pi}\right)^2 = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right) r^4$$

9
ağırlık merkezinden.

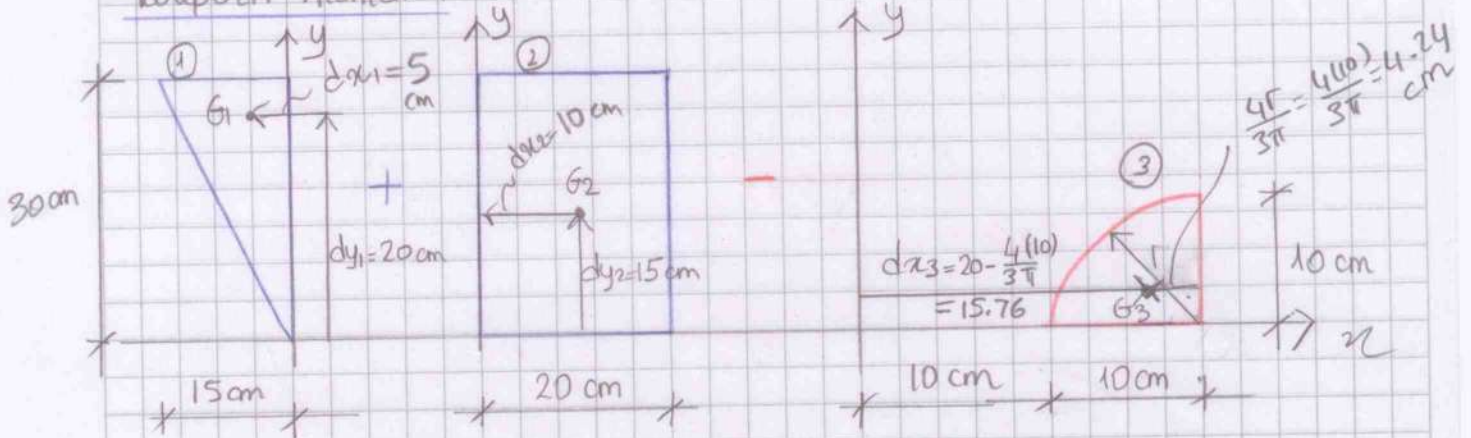
Benzer şekilde $I_{y'}$ 'de bulunabilir, $I_{y'} = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right) r^4$

Örn.:



Verilen alanın I_x ve I_y atalet momentlerini bulunuz.

Kompozit Alanlar:



x -eksenine göre atalet momenti:
(tabandan geçen eksenlere göre)

$$I_x = \sum_{i=1}^3 \bar{I}_{x_i} + A_i d_{y_i}^2$$

$$I_x = \frac{1}{36} (15)(30)^3 + \frac{1}{2} (15)(30)(20)^2 +$$

üçgenin ağırlık mer. geçen x' eksenine göre atalet mom. ($\bar{I}_{x_1}$)

paralel eksenler teo. dolayı gelen ek kısım ($A_1 d_{y_1}^2$)

$$+ \frac{1}{12} (20)(30)^3 + (20)(30)(15)^2 -$$

dikdörtgenin ağırlık merkezinden geçen x' eksenine göre atalet mom. ($\bar{I}_{x_2}$)

paralel eksenler teoreminden gelen kısım ($A_2 d_{y_2}^2$)

$$- \frac{1}{16} \pi (10)^4 + 0 \quad \text{zaten } x\text{-eksenine göre atalet momenti biliniyor!} = 279286.5 \text{ cm}^4$$

çeyrek dairenin tabanından geçen eksenlere göre atalet momenti (x -ekseni)

(Tablolarda çeyrek daire için genellikle tabandan geçen eksenlere göre atalet mom. verilir, →)

$$\text{Y-eksenine göre atalet momenti} = I_y = \sum_{i=1}^3 \bar{I}_{y_i} + A_i d_i^2$$

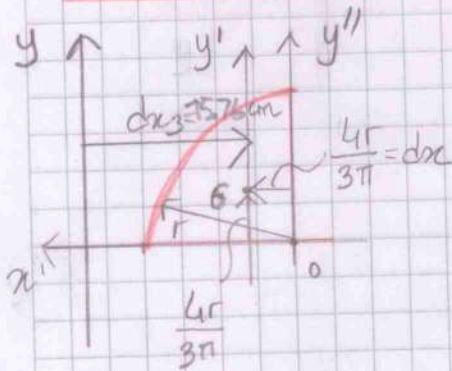
$$I_{y_1} = \frac{1}{36} (30)(15)^3 + \frac{1}{2} (30)(15)(5)^2 \quad ; \text{üçgenin y-eksenine göre atalet momenti}$$

$$= 8437.5 \text{ cm}^4$$

$$I_{y_2} = \frac{1}{12} (30)(20)^3 + (30)(20)(10)^2 \quad ; \text{dikdörtgenin y eksenine göre atalet momenti}$$

$$= 80000$$

★ Çeyrek dairenin y eksenine göre atalet momentini bulmak için önce kendi ağırlık merkezinden geçen eksen y' eksenine göre atalet momentini bulmamız gerekmektedir (parabol elemanlar teoremini uygulamak için):



$$I_{y_3}'' = \bar{I}_{y_3}' + A dx^2$$

Çeyrek dairenin y' eksenine göre atalet momentini biliniyor, $I_{y_3}'' = \frac{1}{16} \pi r^4$

Bu durumda parabol elemanlar teoremini kullanmak için gerekli y' eksenine göre olan atalet momentini hesaplayabiliriz: $\bar{I}_{y_3}'' = \bar{I}_{y_3}' - A dx^2$

$$\bar{I}_{y_3}' = \frac{1}{16} \pi (10)^4 - \frac{\pi (10)^2 \left(\frac{4(10)}{3\pi} \right)^2}{4} = 548.78 \text{ cm}^4$$

Artık y-eksenine göre olan atalet momentini bulabiliriz:

$$I_{y_3} = \bar{I}_{y_3}' + A_3 dx_3^2 = 548.78 + \frac{\pi 10^2}{4} \left(20 - \frac{4(10)}{3\pi} \right)^2$$

$$= 20056.31$$

Kompozit alanın y ek. göre toplam atalet mom.:

$$I_y = I_{y_1} + I_{y_2} - I_{y_3} = 8437.5 + 80000 - 20056.31 = 68381.19 \text{ cm}^4$$

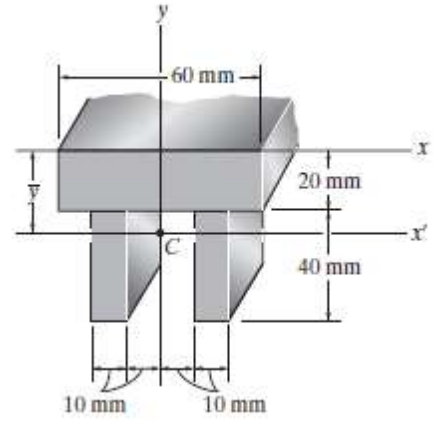
STATİK

BÖLÜM 9. ATALET MOMENTİ (MOMENTS OF INERTIA)

ÖRNEK SORU ÇÖZÜMLERİ

1. Şekilde verilen betonarme kiriş kesitinin öncelikle ağırlık merkezinin üst kısma olan $\bar{y}$ mesafesini hesaplayınız. Daha sonra da;

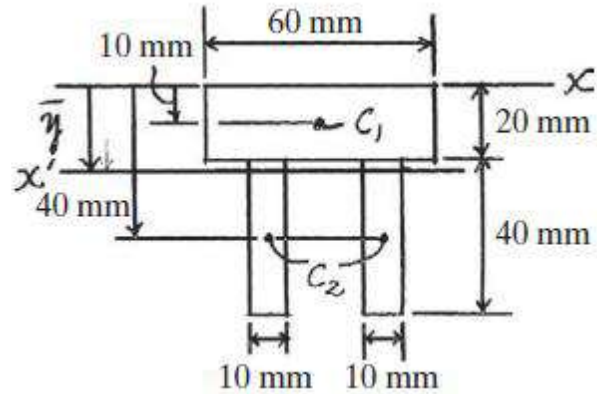
- Ağırlık merkezinden geçen x' eksenine göre,
- Üst kısımdan geçen x eksenine göre,
- Ağırlık merkezinden geçen y eksenine göre kesitin atalet momentini hesaplayınız.



Çözüm

$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{y}A}{\sum A} = \frac{10(60)(20) + 2[40(40)(10)]}{60(20) + 2[40(10)]} = 22.0 \text{ mm} \quad \text{Ans}$$

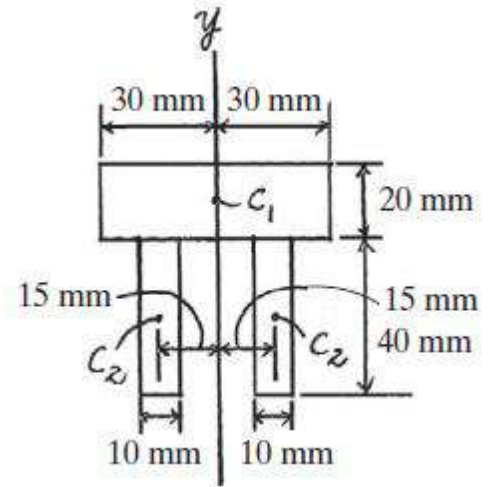
$$I_x = \frac{1}{12} (60)(20)^3 + 60(20)(22.0 - 10)^2 + 2 \left[\frac{1}{12} (10)(40)^3 + 10(40)(40 - 22.0)^2 \right] = 57.9 (10^4) \text{ mm}^4$$





$$I_x = \left[\frac{1}{12} (60)(20)^3 + (60)(20)(10)^2 \right] \\ + 2 \left[\frac{1}{12} (10)(40)^3 + (40)(10)(40)^2 \right] \\ = 155 (10^4) \text{ mm}^4 \quad \text{Ans}$$

$$I_y = \frac{1}{12} (20)(60)^3 + 2 \left[\frac{1}{12} (40)(10)^3 + 10(40)(15)^2 \right] \\ = 54.7 (10^4) \text{ mm}^4 \quad \text{Ans}$$

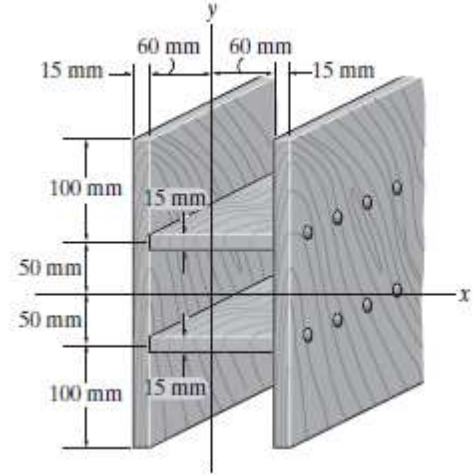


2. Şekilde verilen ahşap kesitin ağırlık merkezinden geçen;

a) x eksenine göre,

b) y eksenine göre,

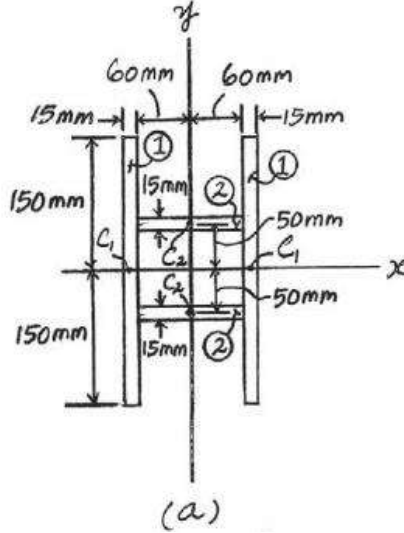
atalet momentini bulunuz.



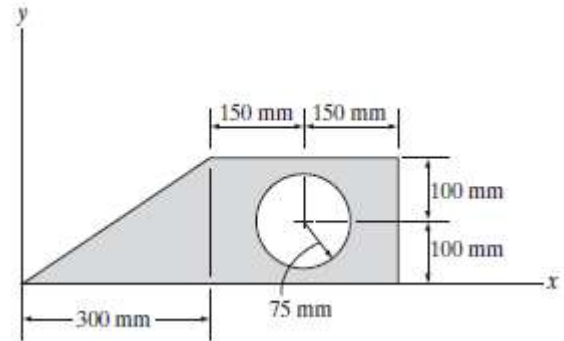
Çözüm

$$\begin{aligned}
 I_x &= \bar{I}_x + A(d_y)^2 \\
 &= \left[2 \left(\frac{1}{12} (15)(300^3) \right) + 2(15)(300)(0)^2 \right] + \left[2 \left(\frac{1}{12} (120)(15^3) \right) + 2(120)(15)(50)^2 \right] \\
 &= 67.5(10^6) + 9.0675(10^6) = 76.6(10^6) \text{ mm}^4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_y &= \bar{I}_y + A(d_x)^2 \\
 &= \left[2 \left(\frac{1}{12} (300)(15^3) \right) + 2(300)(15)(67.5)^2 \right] + \left[2 \left(\frac{1}{12} (15)(120^3) \right) + 2(120)(15)(0)^2 \right] \\
 &= 41.175(10^6) + 4.32(10^6) = 45.5(10^6) \text{ mm}^4
 \end{aligned}$$



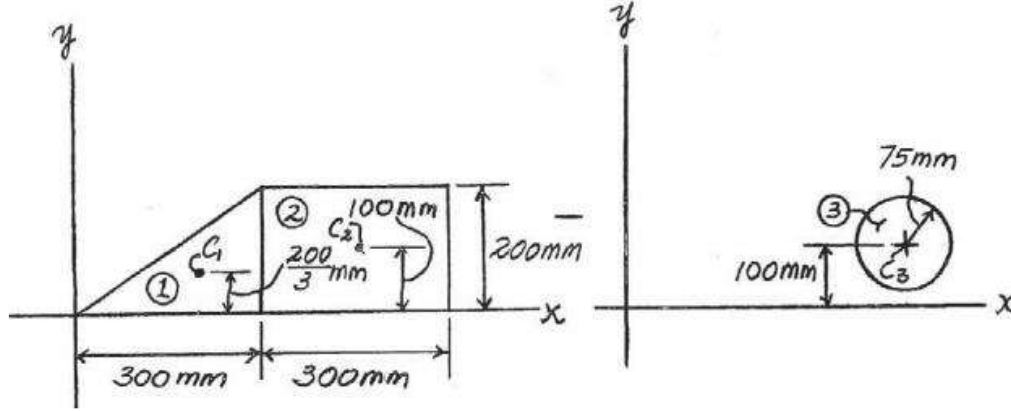
3. Şekilde verilen kompozit kesitin;
a) x eksenine ve
b) y eksenine göre
 atalet momentini bulunuz.



Çözüm

$$\begin{aligned}
 I_x &= \bar{I}_x + A(d_x)^2 \\
 &= \left[\frac{1}{36} (300)(200^3) + \frac{1}{2} (300)(200) \left(\frac{200}{3} \right)^2 \right] + \left[\frac{1}{12} (300)(200^3) + 300(200)(100)^2 \right] + \left[-\frac{\pi}{4} (75^4) + \left(-\pi(75^2) \right) (100)^2 \right] \\
 &= 798(10^6) \text{ mm}^4
 \end{aligned}$$

Ans

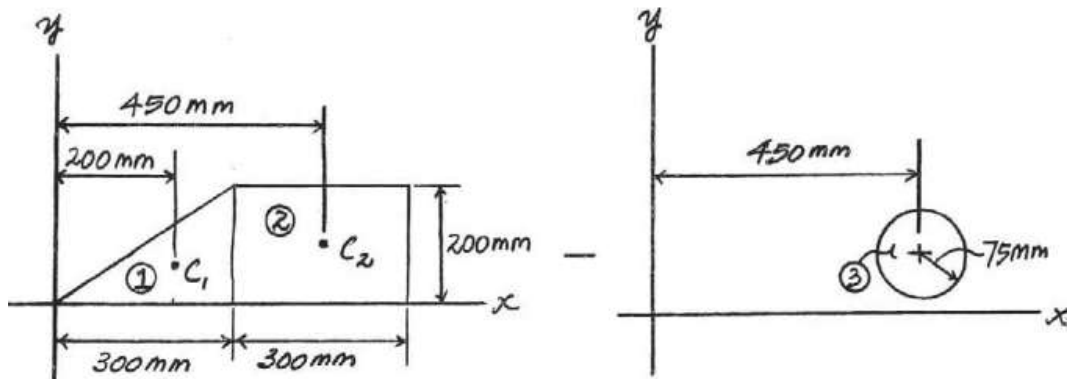


$$I_y = \bar{I}_y + A(d_x)^2$$

$$= \left[\frac{1}{36} (200)(300^3) + \frac{1}{2} (200)(300)(200)^2 \right] + \left[\frac{1}{12} (300)(200^3) + 200(300)(450)^2 \right] + \left[-\frac{\pi}{4} (75^4) + \left(-\pi(75^2) \right) (450)^2 \right]$$

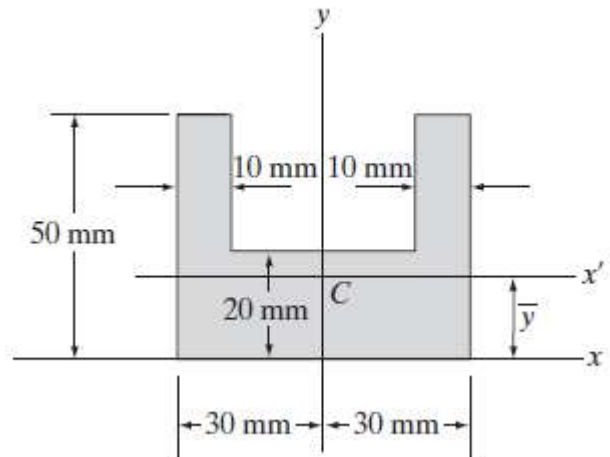
$$= 10.3(10^9) \text{ mm}^4$$

Ans





4. Şekilde verilen kompozit kesitin ağırlık merkezinin yerini bulunuz. Ayrıca kesitin merkezinden geçen eksenler olan;
- a) x' eksenine göre ve
 - b) y eksenine göre
- kesitin atalet momentini bulunuz.



Çözüm

$$\bar{y} = \frac{\sum y_c A}{\sum A} = \frac{(10)(60)(20) + 2[35(30)(10)]}{(60)(20) + 2[(30)(10)]} = 18.33 \text{ mm} \quad \text{Ans}$$

$$I_{x'} = \bar{I}_x + A(d_y)^2$$

$$= \left[\frac{1}{12} (60)(20^3) + (60)(20)(18.33 - 10)^2 \right] + 2 \left[\frac{1}{12} (10)(30^3) + 10(30)(35 - 18.33)^2 \right]$$

$$= 33.5 (10^4) \text{ mm}^4 \quad \text{Ans}$$

$$I_y = \bar{I}_y + A(d_x)^2$$

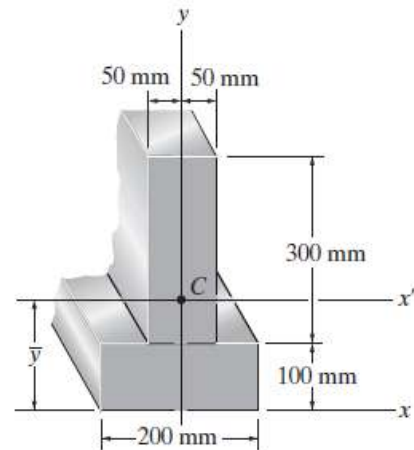
$$= \left[\frac{1}{12} (20)(60^3) \right] + 2 \left[\frac{1}{12} (30)(10^3) + 30(10)(25)^2 \right]$$

$$= 74 (10^4) \text{ mm}^4 \quad \text{Ans}$$

5. Şekilde verilen kompozit kesitin ağırlık merkezinin yerini bulduktan sonra;

- a) x' eksenine
- b) x eksenine
- c) y eksenine

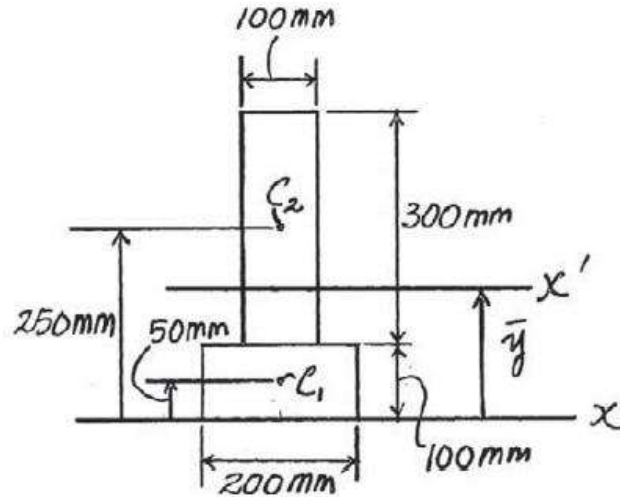
göre atalet momentini hesaplayınız.



Çözüm



$$\bar{y} = \frac{\Sigma \bar{y}A}{\Sigma A} = \frac{50(100(200)) + 250(100(300))}{100(200) + 100(300)} = 170 \text{ mm} \quad \text{Ans}$$

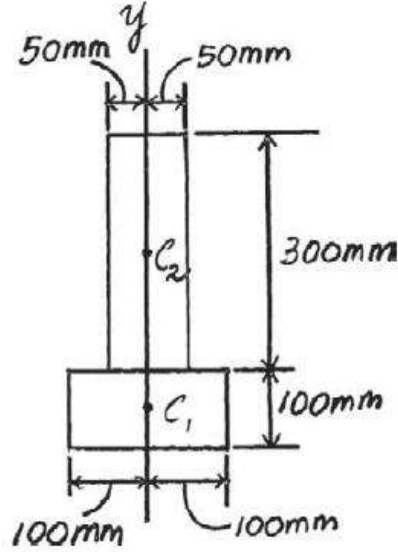


$$\begin{aligned} I_{x'} &= \frac{1}{12} (200)(100)^3 + 200(100)(170 - 50)^2 \\ &\quad + \frac{1}{12} (100)(300)^3 + 100(300)(250 - 170)^2 \\ &= 722(10^6) \text{ mm}^4 \quad \text{Ans} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_x &= \left[\frac{1}{12} (0.2)(0.1)^3 + (0.2)(0.1)(0.05)^2 \right] \\ &\quad + \left[\frac{1}{12} (0.1)(0.3)^3 + (0.1)(0.3)(0.25)^2 \right] = 2.17(10^{-3}) \text{ m}^4 \quad \text{Ans} \end{aligned}$$



$$I_y = \frac{1}{12} (100)(200)^3 + \frac{1}{12} (300)(100)^3 = 91.7(10)^6 \text{ mm}^4 \quad \text{Ans}$$

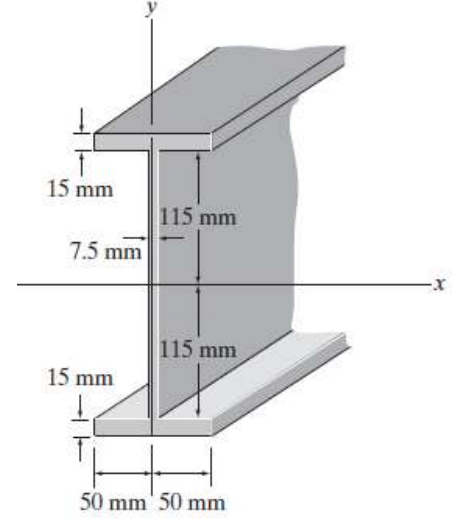


6. Şekilde verilen kompozit çelik kiriş kesitinin ağırlık merkezinden geçen eksenler olan;

a) x eksenine ve

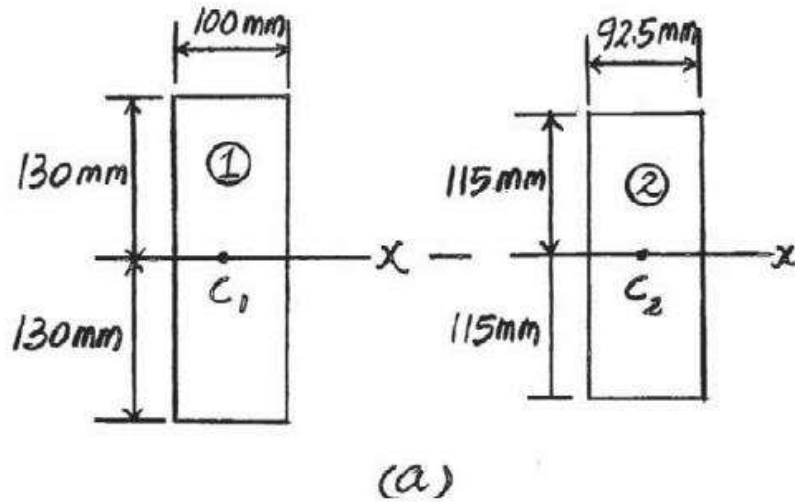
b) y eksenine

göre atalet momentini hesaplayınız.



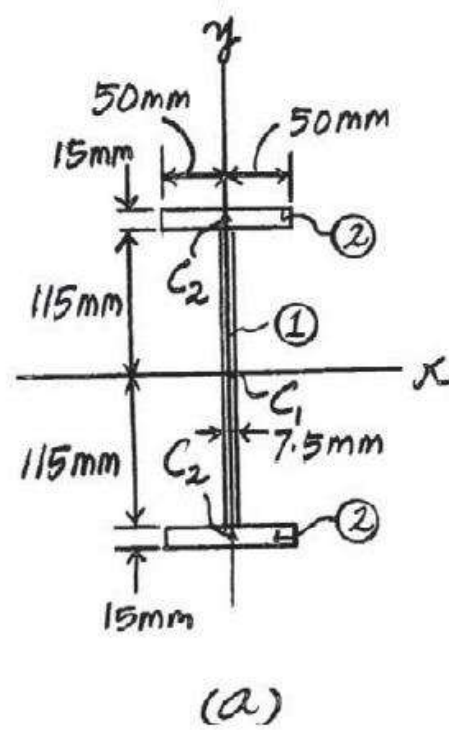
Cözüm

$$\begin{aligned}
 I_x &= (I_x)_1 + (I_x)_2 \\
 &= \frac{1}{12} (100)(260^3) - \frac{1}{12} (92.5)(230^3) \\
 &= 52.7(10^6) \text{ mm}^4
 \end{aligned}$$





$$\begin{aligned} I_y &= \Sigma(I_y)_i \\ &= 2 \left[\frac{1}{12} (15)(100^3) \right] + \frac{1}{12} (230)(7.5^3) \\ &= 2.5(10)^6 \text{ mm}^4 \end{aligned}$$

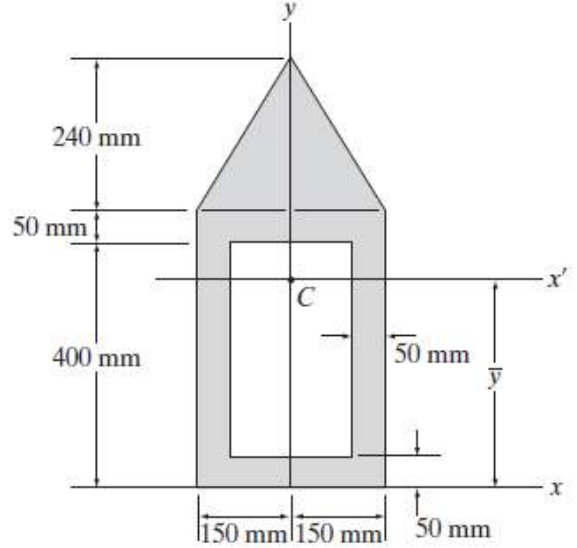


7. Şekilde verilen kompozit kesitin ağırlık merkezinin yerini belirleyerek;

a) x' eksenine

b) y eksenine

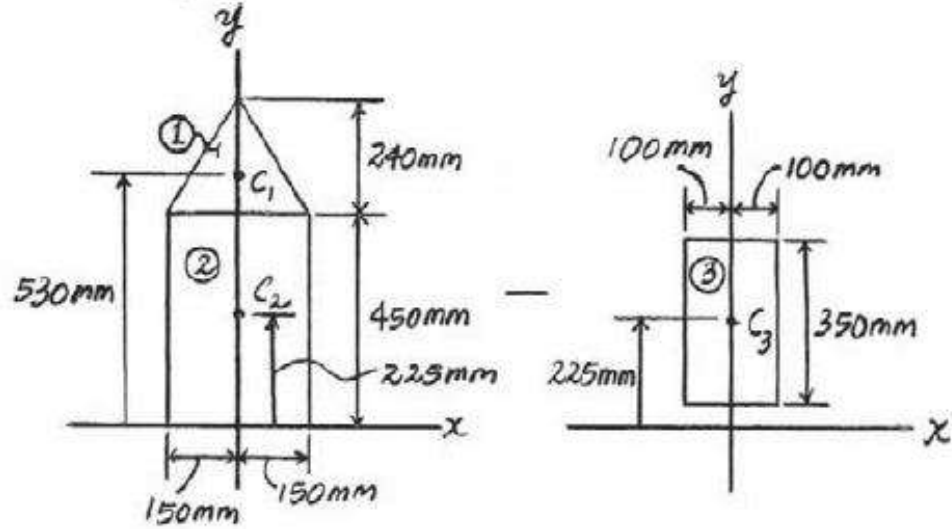
göre atalet momentini hesaplayınız.



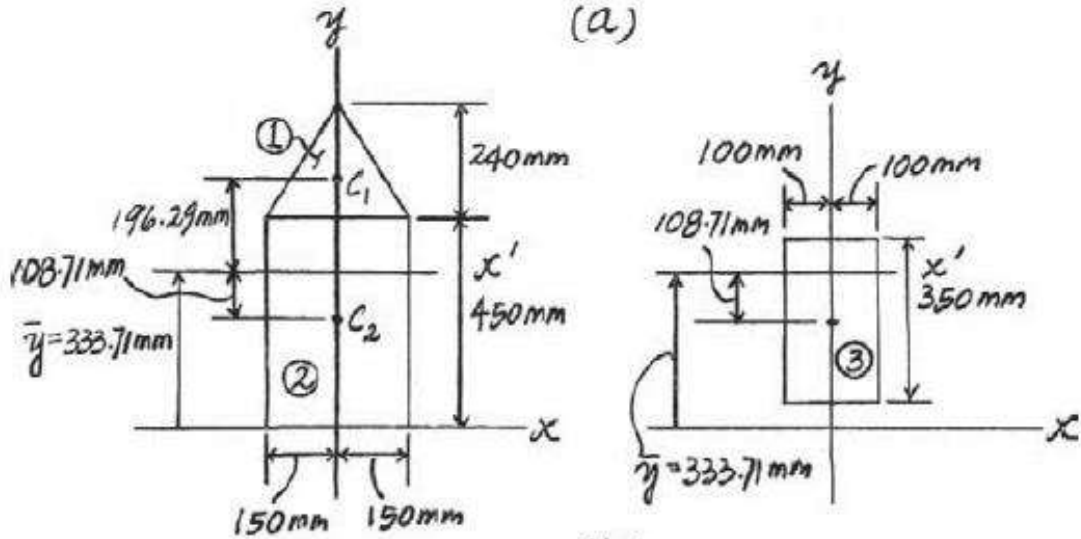
Cözüm

$$\bar{y} = \frac{\sum \bar{y}A}{\sum A} = \frac{530 \left(\frac{1}{2} (300)(240) \right) + 225(300)(450) + 225(-200)(350)}{\frac{1}{2} (300)(240) + 300(450) - 200(350)} = \frac{33.705(10^6)}{101(10^3)} = 333.71 \text{ mm} = 334 \text{ mm}$$

$$\begin{aligned} I_x &= \bar{I}_x + A(d_x)^2 \\ &= \left[\frac{1}{36} (300)(240^3) + \frac{1}{2} (300)(240)(196.29)^2 \right] + \left[\frac{1}{12} (300)(450^3) + 300(450)(108.71)^2 \right] \\ &\quad + \left[-\frac{1}{12} (200)(350^3) + (-200)(350)(108.71)^2 \right] \\ &= 3.83(10^9) \text{ mm}^4 \end{aligned}$$



(a)



(b)

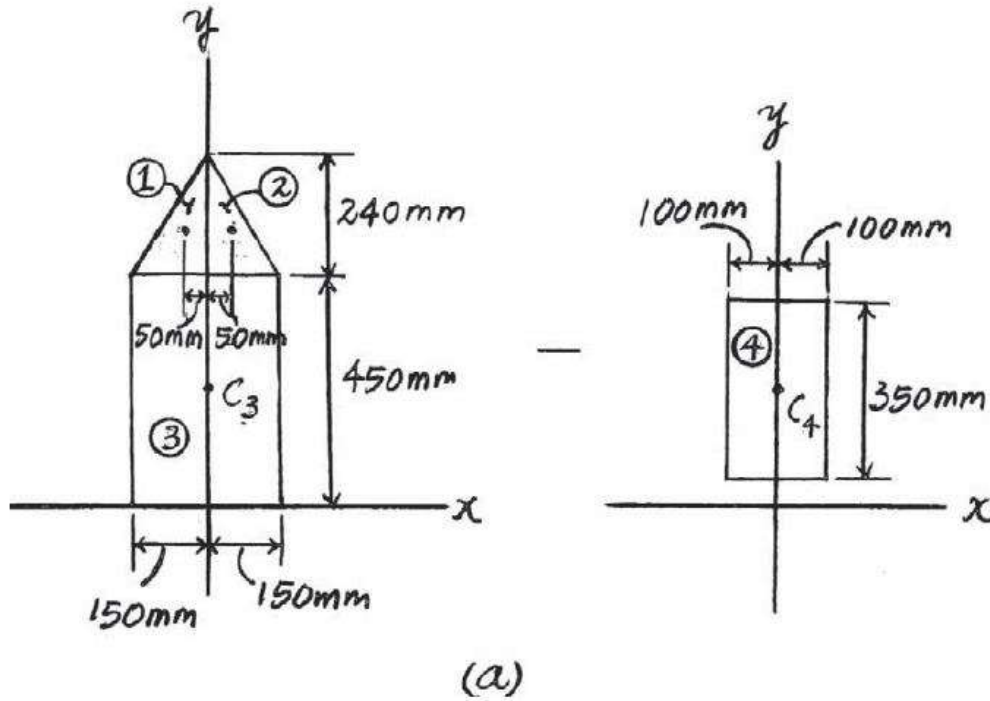


$$I_y = \bar{I}_y + A(d_x)^2$$

$$= \left[2 \left(\frac{1}{36} (240)(150^3) \right) + 2 \left(\frac{1}{2} (240)(150) (50)^2 \right) \right] + \left[\frac{1}{12} (450)(300^3) + 450(300)(0)^2 \right] + \left[-\frac{1}{12} (350)(200^3) + (-350)(200)(0)^2 \right]$$

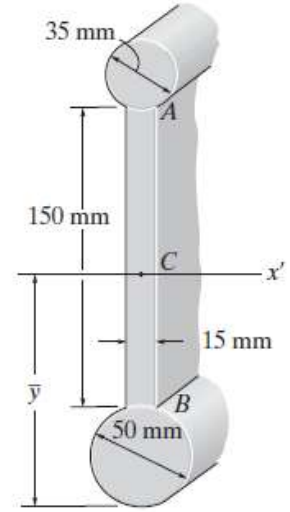
$$= 914(10)^6 \text{ mm}^4$$

Ans





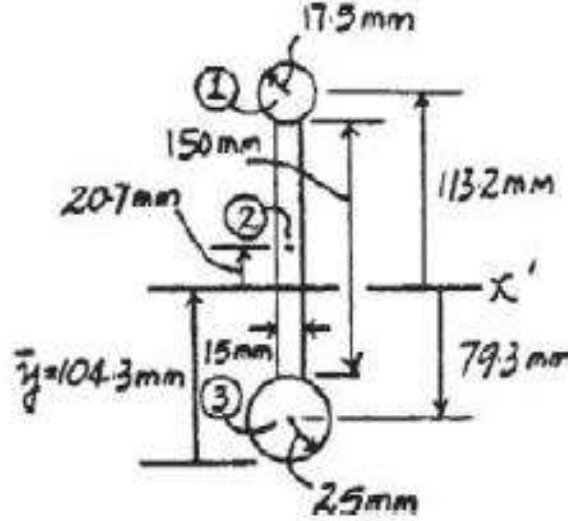
8. Şekilde verilen kompozit kesit alanının merkez noktası C'den geçen x' eksenine göre atalet momentini hesaplayınız. $\bar{y} = 104.3 \text{ mm}$ olarak dikkate alınız.



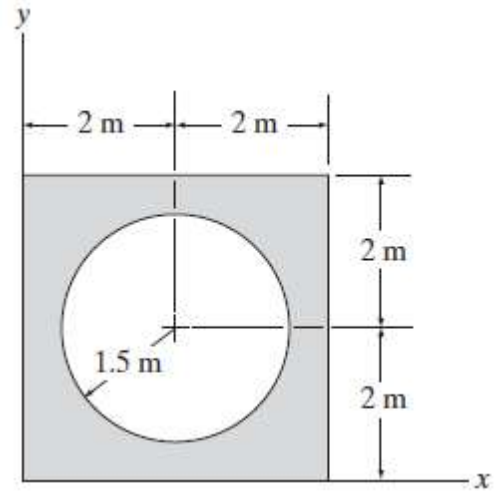
Cözüm

Segment	$A_i \text{ (mm}^2\text{)}$	$(d_y)_i \text{ (mm)}$	$(\bar{I}_x)_i \text{ (mm}^4\text{)}$	$(Ad_y^2)_i \text{ (mm}^4\text{)}$	$(I_x)_i \text{ (mm}^4\text{)}$
1	$\pi(17.5^2)$	113.2	$\frac{\pi}{4} (17.5^4)$	$12.329(10^6)$	$12.402(10^6)$
2	$15(150)$	20.7	$\frac{1}{12}(15)(150^3)$	$0.964(10^6)$	$5.183(10^6)$
3	$\pi(25^2)$	79.3	$\frac{\pi}{4} (25^4)$	$12.347(10^6)$	$12.654(10^6)$

$$I_{x'} = \Sigma(I_x)_i = 30.24(10^6) \text{ mm}^4 = 30.2(10^6) \text{ mm}^4 \quad \text{Ans}$$



9. Şekilde verilen kompozit alanın merkez noktasından geçen x ve y eksenine göre çarpım atalet momentini hesaplayınız.

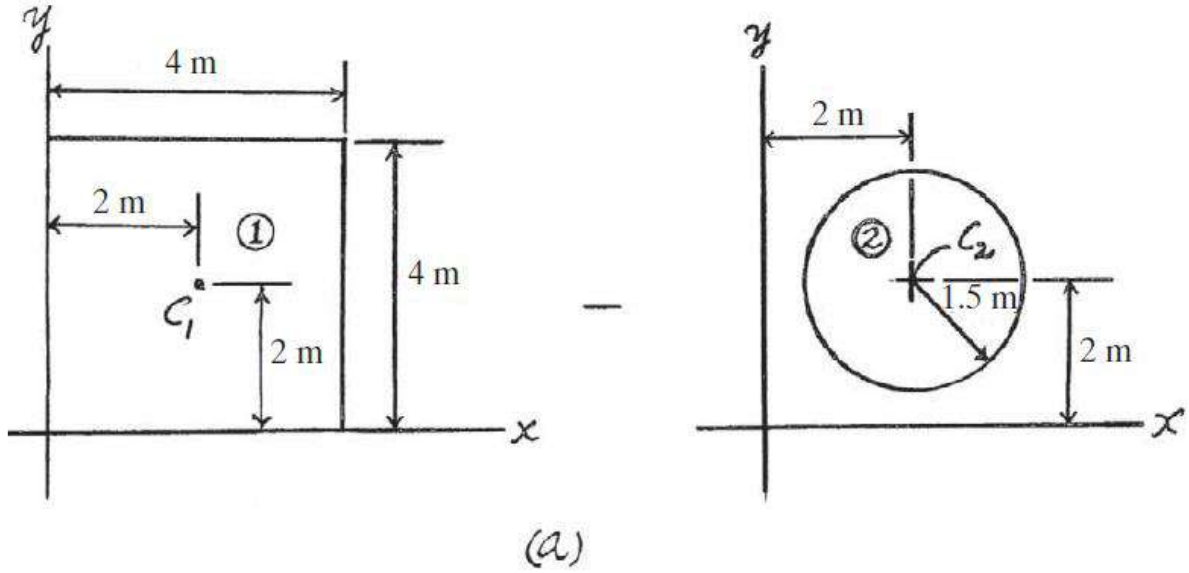


Çözüm

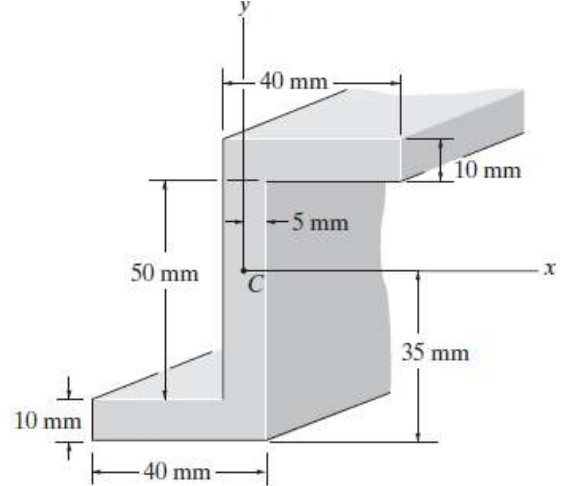
Merkezden geçen eksenler simetri eksenleri olduğundan dolayı $(\bar{I}_{x'y'})_1 = (\bar{I}_{x'y'})_2 = 0$ olarak alınacaktır.

$$I_{xy} = (\bar{I}_{x'y'}) + Ad_x d_y = Ad_x d_y$$

$$= 4(4)(2)(2) + (-\pi(1.5^2))(2)(2) = 64 + (-9\pi) = 35.7 \text{ m}^4$$



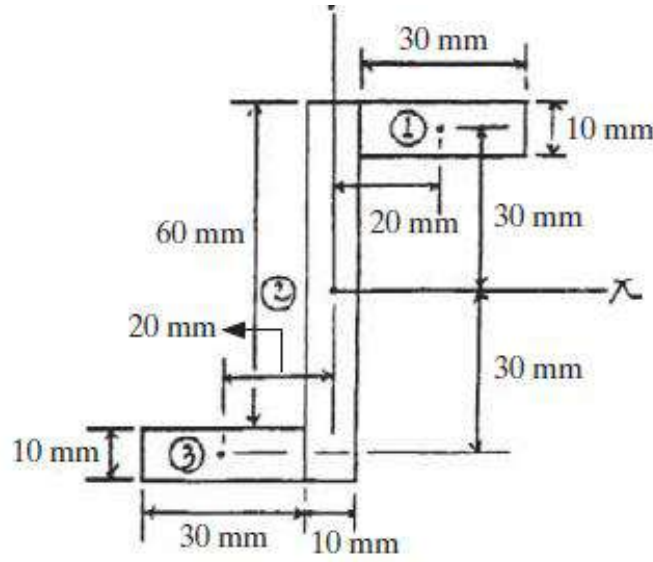
10. Şekilde verilen kompozit alanın merkez noktası olan C'den geçen x ve y eksenine göre çarpım atalet momentini hesaplayınız.



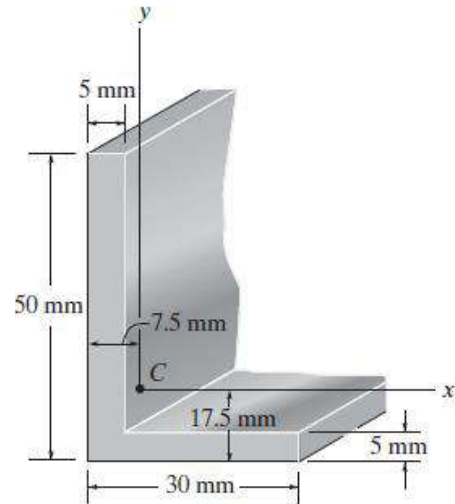
Cözüm

Segment	A_i (mm ²)	$(d_x)_i$ (mm)	$(d_y)_i$ (mm)	$(I_{xy})_i$ (mm ⁴)
1	30(10)	20	30	18.0 (10 ⁴)
2	70(10)	0	0	0
3	30(10)	-20	-30	18.0 (10 ⁴)

$$I_{xy} = \Sigma(I_{xy})_i = 36.0 (10^4) \text{ mm}^4$$



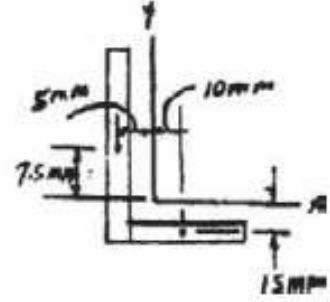
- 11.** Şekilde verilen kompozit alanın merkez noktası olan C'den geçen x ve y eksenine göre çarpım atalet momentini hesaplayınız.



Çözüm



$$I_{xy} = 25(5)(10)(-15) + 50(5)(-5)(7.5) = -28.1(10^3) \text{ mm}^4 \quad \text{Ans}$$



Engineering Mechanics: Statics in SI Units, 12e

10. Sürtünme (Friction)

Bu Bölümde Öğrenilecek Konular

- Kuru sürtünme (dry friction) kavramı
- Takozlar (wedges) üzerindeki sürtünme kuvveti analizi
- Yuvarlanma direnci (rolling resistance) kavramı

10.1 Kuru Sürtünmenin Karakteristikleri

Sürtünme

- Birbirine temas eden ve birbiri üzerinde kayan iki yüzeyin hareketine direnen kuvvete **sürtünme kuvveti** denir.
- Diğer cisme temas eden noktalardaki yüzeylere teğet bir şekilde etki eder.
- Cismin temas noktalarına göre olası veya mevcut hareke yönüne ters yönde etki etmektedir.
- İki tür sürtünme vardır:
 - Akışkan Sürtünmesi (Fluid Friction)
 - Coulomb Sürtünmesi (Coulomb Friction)

10.1 Kuru Sürtünmenin Karakteristikleri (d'm)

- **Akışkan sürtünme**, temas eden yüzey gaz veya sıvı gibi bir akışkan tabakası ile ayrıldığında ortaya çıkar.

Akışkan sürtünme, akışkanın hızına ve kesme kuvvetine direnme yeteneğine bağlıdır.

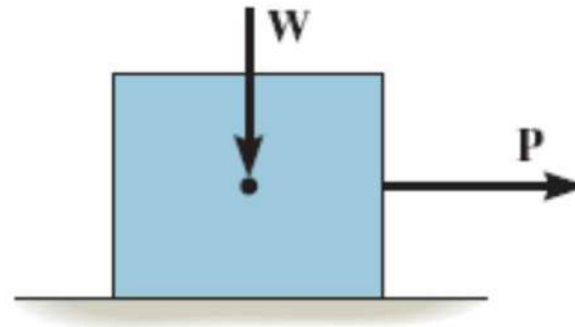
- **Coulomb sürtünmesi**, temas eden yüzeyler arasında yağlanma gibi kaydırıcı bir maddenin yokluğunda ortaya çıkar.



10.1 Kuru Sürtünmenin Karakteristikleri (d'm)

Kuru Sürtünme Teorisi

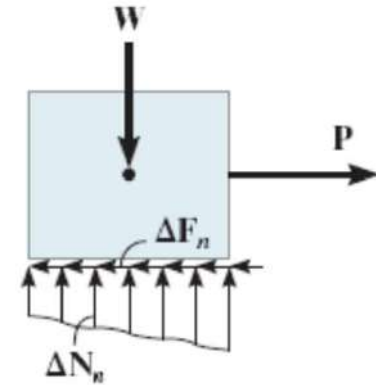
- Sert bir yatay yüzeye oturan bir **W** düzgün yayılı ağırlığı yüzey üzerinde yatay olarak çekmenin neden olduğu etkileri göz önünde bulunduralım.
- Temas yüzeylerini rijit olmayan veya deforme olabilen bir malzemedan bloğun diğer kısımlarını ise rijit bir malzemedan yapılmış olarak düşünelim.



10.1 Kuru Sürtünmenin Karakteristikleri (d'm)

Kuru Sürtünme Teorisi (d'm)

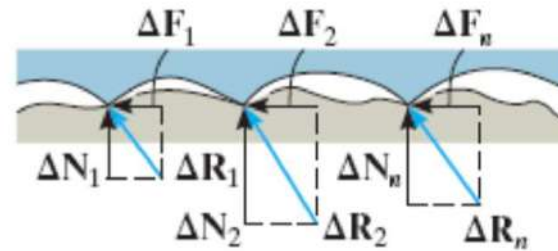
- Normal kuvvet $\Delta \mathbf{N}_n$ ve sürtünme kuvveti $\Delta \mathbf{F}_n$ temas yüzeyi boyunca eder.
- Normal kuvvetler ($\Delta \mathbf{N}_n$), blok ağırlığını ($\mathbf{W}$) dengelemek için yukarı doğru (temas yüzeyine dik) etki etmektedir.
- Bloğu sağa doğru hareket ettirmeye çalışan $\mathbf{P}$ kuvvetini engellemek için sürtünme kuvvetleri ($\Delta \mathbf{F}_n$) sola doğru etki edecektir.



10.1 Kuru Sürtünmenin Karakteristikleri (d'm)

Kuru Sürtünme Teorisi (d'm)

- Blok ve zemin yüzeyi arasında birçok mikroskobik düzensizlikler mevcuttur.
- Her bir çıkıntı veya tümsekte tepki kuvvetleri $\Delta \mathbf{R}_n$ meydana gelecektir.
- Her tepki kuvveti sürtünme kuvveti bileşeni $\Delta \mathbf{F}_n$ ve normal kuvvet bileşeni $\Delta \mathbf{N}_n$ olmak üzere iki bileşenden oluşmaktadır.

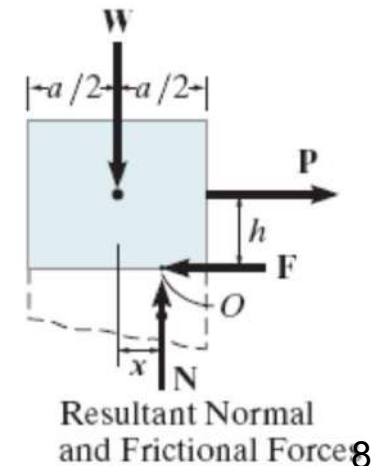


10.1 Kuru Sürtünmenin Karakteristikleri (d'm)

Kuru Sürtünme Teorisi (d'm)

Denge

- Normal ve sürtünme yüklerinin etkisi bileşkeleri olan $\mathbf{N}$ ve $\mathbf{F}$ ile gösterilmektedir.
- $\Delta \mathbf{F}_n$ 'nin dağılımı $\mathbf{F}$ sürtünme kuvvetinin sürtünme yüzeyine teğet ve $\mathbf{P}$ kuvvetinin tersi yönünde etkidiği göstermektedir.
- Normal kuvvet $\mathbf{N}$, $\Delta \mathbf{N}_n$ 'in dağılımından elde edilebilir.



10.1 Kuru Sürtünmenin Karakteristikleri (d'm)

Kuru Sürtünme Teorisi (d'm)

Denge

- **N**, ağırlık **W**'yi dengelemek için yukarı yönlüdür.
- **N**, **W**'nin etkiye çizgisinden **x** mesafesi kadar sağa doğru etki eder.
- Bu konum, **P** 'nin sebep olacağı "kayma etkisini (tipping effect)" dengelemek için ağırlık merkezi ya da yük diyagramının geometrik merkezi ile çakışır.

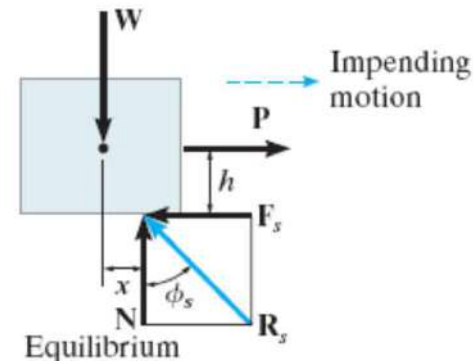
10.1 Kuru Sürtünmenin Karakteristikleri (d'm)

Kuru Sürtünme Teorisi (d'm)

Harekete Başlama Anı (Impending Motion)

- P kuvveti yavaşça arttırıldığında, bağlantılı şekilde belli bir maksimum değere ulaşincaya kadar F de artar, buna statik sürtünme kuvvetinin sınırı değeri denir.
- Statik sürtünme kuvvetinin sınır değeri F_s doğrudan bileşke normal kuvvet N ile doğru orantılıdır.

$$F_s = \mu_s N$$



10.1 Kuru Sürtünmenin Karakteristikleri (d'm)

Kuru Sürtünme Teorisi (d'm)

Harekete Başlama Anı

- Oran katsayısı μ_s statik sürtünme katsayısı (coefficient of static friction) olarak adlandırılmaktadır.
- $\mathbf{R}_s$ ile $\mathbf{N}$ arasındaki ϕ_s açısı statik sürtünme açısı olarak adlandırılır.

$$\phi_s = \tan^{-1}\left(\frac{F_s}{N}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\mu_s N}{N}\right) = \tan^{-1} \mu_s$$

10.1 Kuru Sürtünmenin Karakteristikleri (d'm)

Kuru Sürtünme Teorisi (d'm)

Tipik μ_s Değerleri

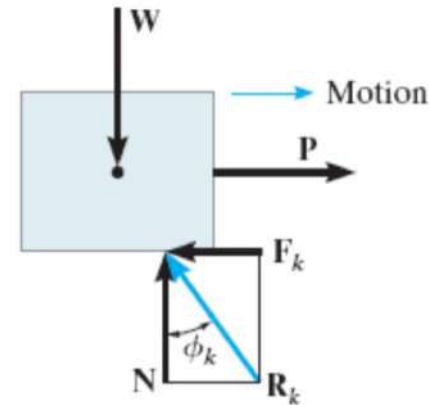
Sürtünen Malzemeler	Statik Sürtünme Katsayısı μ_s
Buz üzerinde Metal	0.03 – 0.05
Ahşap üzerinde Ahşap	0.30 – 0.70
Ahşap üzerinde Deri	0.20 – 0.50
Metal üzerinde Deri	0.30 – 0.60
Alüminyum üzerinde Alüminyum	1.10 – 1.70

10.1 Kuru Sürtünmenin Karakteristikleri (d'm)

Kuru Sürtünme Teorisi (d'm)

Hareket (Motion)

- P , F_s 'den daha büyük ise sürtünme kuvveti F_s , 'den birazcık daha küçük olacaktır. Buna kinetik sürtünme kuvveti (kinetic frictional force) denir ve F_k olarak gösterilir.
- Bu durumda blok dengede kalamayacak ve artan bir hız ile kayacaktır.

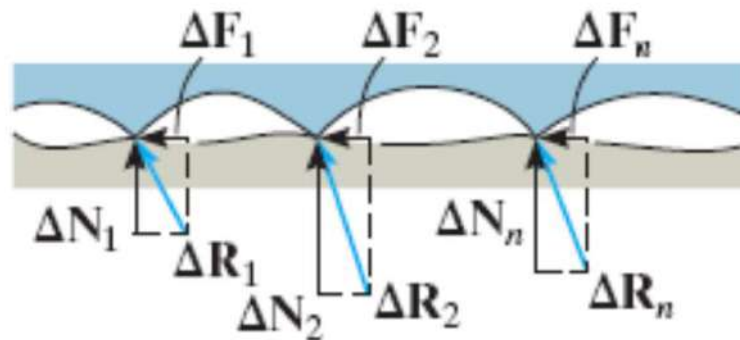


10.1 Kuru Sürtünmenin Karakteristikleri (d'm)

Kuru Sürtünme Teorisi (d'm)

Hareket

- F_s (statik)'den F_k (kinetik)'ye düşme temas yüzeylerinin incelenmesiyle açıklanabilir.
- $P > F_s$ olduğunda, P , temas yüzeylerindeki pikleri (çıkıntı uçlarını) kesebilme kapasitesine sahiptir.



10.1 Kuru Sürtünmenin Karakteristikleri (d'm)

Kuru Sürtünme Teorisi (d'm)

- Bileşke sürtünme kuvveti F_k bileşke normal kuvvet N 'nin büyüklüğü ile doğru orantılıdır.

$$F_k = \mu_k N$$

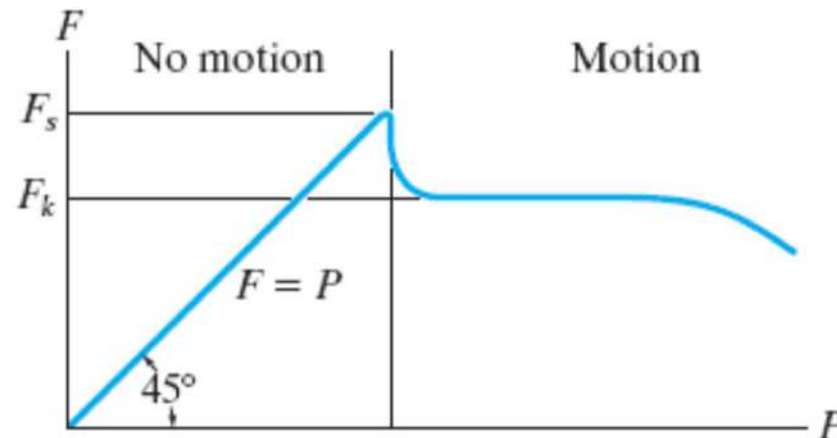
- Orantı sabiti μ_k , kinetik sürtünme katsayısı (coefficient of kinetic friction) olarak adlandırılmaktadır.
- Genellikle μ_k , μ_s 'den %25 daha küçük bir değere sahiptir. $\mu_k = 0.75(\mu_s)$
- Bileşke R_k kinetik sürtünme açısı ϕ_k ile tanımlanan bir etki çizgisine sahiptir.

$$\phi_k = \tan^{-1} \left(\frac{F_k}{N} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{\mu_k N}{N} \right) = \tan^{-1} \mu_k$$

10.1 Kuru Sürtünmenin Karakteristikleri (d'm)

Kuru Sürtünme Teorisi (d'm)

- Eğer denge korunuyorsa F bir *statik sürtünme kuvvetidir*.
- Eğer denge durumunun devamı için gereken kuvvet maksimum değere ulaşırsa F 'nin *statik sürtünme kuvveti sınır değerine sahip olduğu* söylenebilir.
- Eğer temas yüzeyinde kayma meydana geldiyse F *kinetik sürtünme kuvveti* olarak adlandırılır.



10.1 Kuru Sürtünmenin Karakteristikleri (d'm)

Kuru Sürtünme Karakteristikleri

- Sürtünme kuvveti temas eden yüzeylere teğet olarak etki eder.
- Maksimum statik sürtünme kuvveti F_s temas eden alandan bağımsızdır.
- Maksimum statik sürtünme kuvveti kinetik sürtünme kuvvetinden daha büyüktür.
- Kayma sırasında, maksimum statik sürtünme kuvveti ve kinetik sürtünme kuvveti normal kuvvetle orantılıdır.

10.2 Kuru Sürtünmeyi içeren Problemler

Sürtünme ile ilgili problem çeşitleri

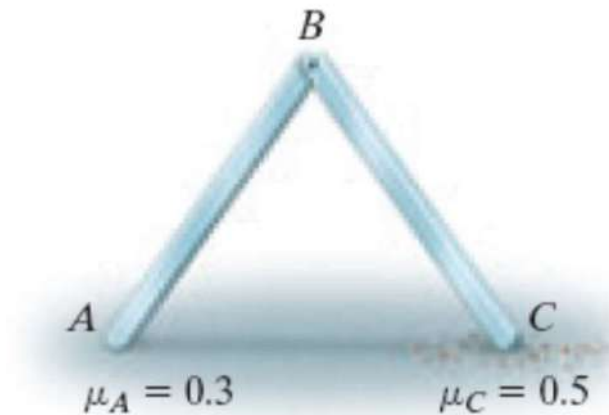
- Tüm durumlarda, geometri ve boyutlar bilinen parametrelerdir.
- Üç çeşit mekanik problemi kuru sürtünmeyi içermektedir.
 - Denge (equilibrium)
 - Tüm noktalarda harekete henüz başlamış olma (impending motion)
 - Bazı noktalarda harekete henüz başlamış olma

10.2 Kuru Sürtünmeyi içeren Problemler (d'm)

Sürtünme İle İlgili Problem Çeşitleri

Denge

- Bilinmeyenlerin sayısı = Denge denklemlerinin sayısı
- Sürtünme kuvvetleri $F \leq \mu_s N$ durumunu sağlamalı; Aksi halde, kayma meydana gelir ve cisim dengede kalamaz.
- Denge durumunu kontrol etmek için **A** ve **C**'deki sürtünme kuvvetlerini belirlemeliyiz.



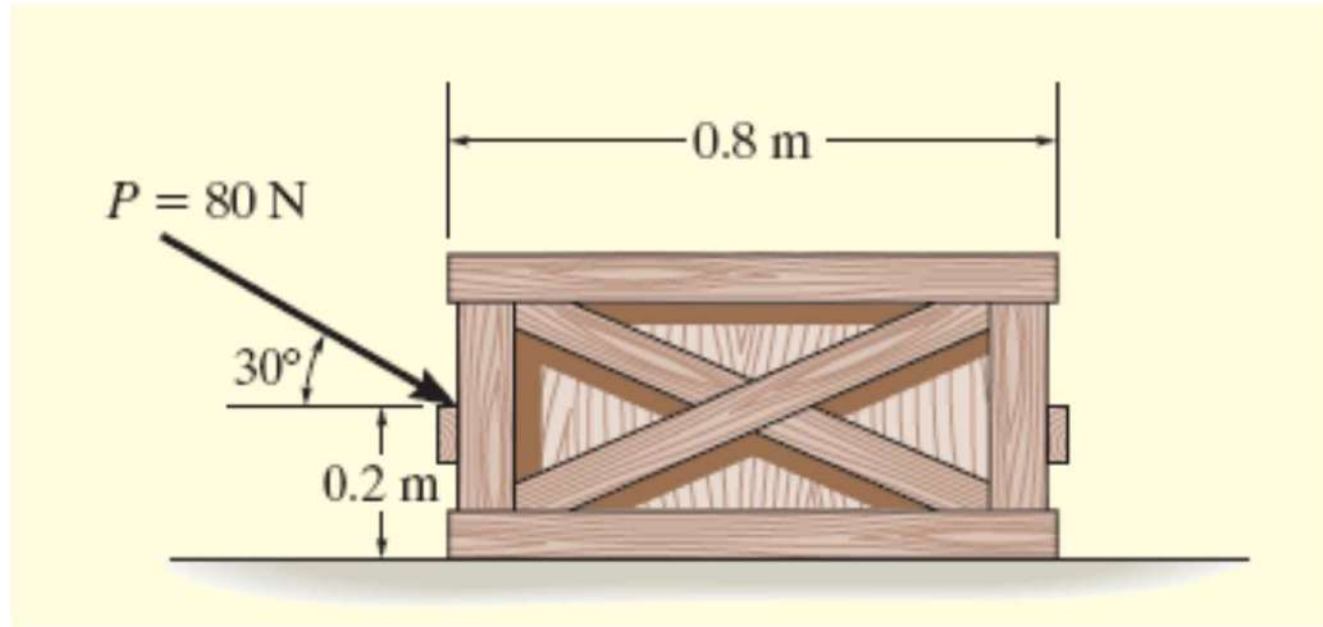
10.2 Kuru Sürtünmeyi içeren Problemler (d'm)

Denge - Sürtünme Denklemleri

- Sürtünme kuvveti her zaman göreceli hareketi engellemek veya cismin temas eden yüzey üzerindeki hareketini engellemek için etki eder.
- sürtünme kuvveti yönünü $\mathbf{F}$ 'nin bir “denge” kuvveti olmasını gerektirecek şekilde olduğunu kabul ediniz.
- Denge denklemlerini çözdükten sonra doğru yön belirlenir.
- Eğer $\mathbf{F}$ negatif bir skaler ise, $\mathbf{F}$ 'nin anlamı varsayılanın tersidir.

Örnek 10.1

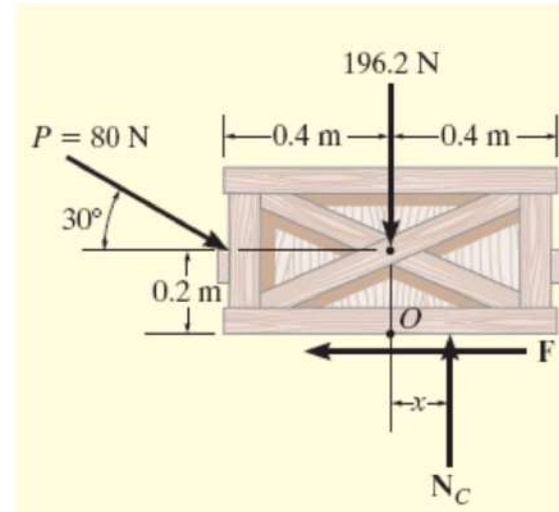
Şekildeki düzgün sandık 20 kg'lık bir kütleye sahiptir. Eğer $P = 80 \text{ N}$ 'luk kuvvet sandığa uygulanırsa, sandığın dengede kalıp kalamayacağını bulunuz. Statik sürtünme katsayısını $\mu = 0.3$ olarak alınız.



Çözüm

P tarafından kaydırılmaya çalışılan sandığın kaymasını engellemeye çalışan bileşke normal kuvvet N_C , sandığın merkez noktasından itibaren x mesafesinde etki eder.

3 denge denklemi ile 3 bilinmeyen elde edilebilir.



Çözüm

$$+ \rightarrow \sum F_x = 0;$$

$$80 \cos 30^\circ - F = 0$$

$$+ \uparrow \sum F_y = 0;$$

$$-80 \sin 30^\circ + N_C - 196.2 = 0$$

$$\sum M_O = 0;$$

$$80 \sin 30^\circ (0.4m) - 80 \cos 30^\circ (0.2m) + N_C(x) = 0$$

$$F = 69.3N, N_C = 236N, \quad x = -0.00908m = -9.08mm$$

Çözüm

✧ x negatif ise, bileşke kuvvet sandığın merkez çizgisinin azıcık solunda etki eder.

✧ $x \leq 0.4$ m ise kayma meydana gelmez (No tipping).

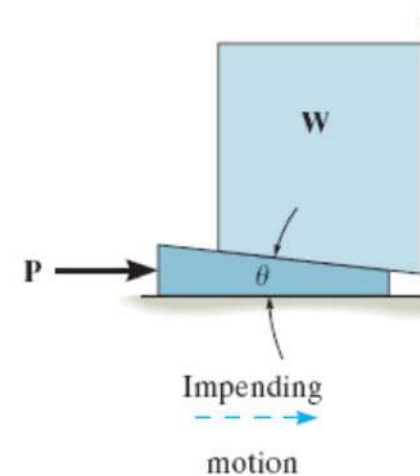
✧ Temas yüzeyinde oluşan maksimum sürtünme kuvveti:

$$F_{\max} = \mu_s N_C = 0.3(236) = 70.8 \text{ N}$$

✧ $F = 69.3 \text{ N} < 70.8 \text{ N}$ olduğundan dolayı, sandık kaymayacak, ancak kaymaya yaklaşmış olacaktır.

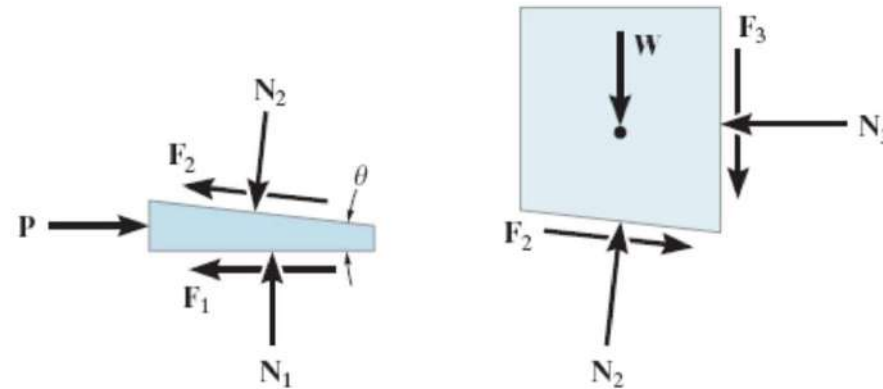
10.3 Takozlar (Wedges)

- Uygulanmış olan kuvveti, uygulanan kuvvete yaklaşık dik açılarla yönlendirilmiş çok daha büyük kuvvetlere dönüştürmek için kullanılan basit sistemlerdir.
- Ağır yüklere küçük yer değiştirmeler veya ayarlamalar yapmak için kullanılır
- **W** ağırlığındaki bir bloğu kaldırmak için kullanılan bir takozu **P** kuvvetini uyguladığımızı düşünelim.



10.3 Takozlar (d'm)

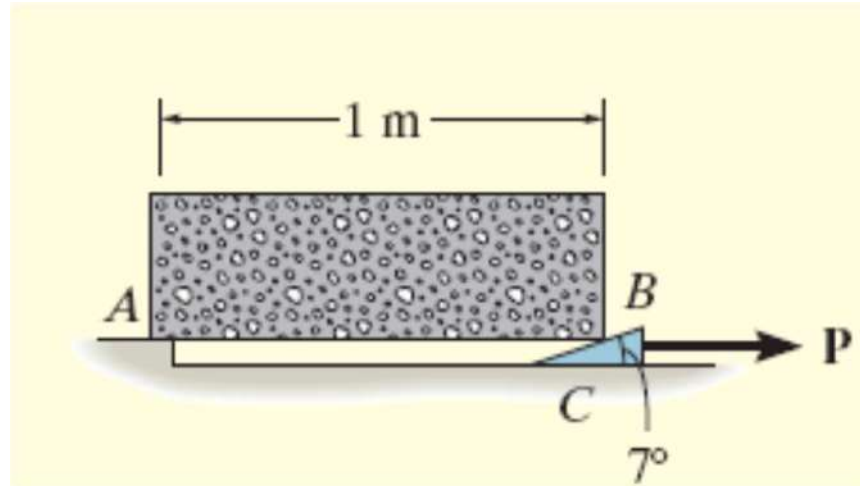
- Takozun ve bloğun SCD'si aşağıdaki gibi olur.



- Takozun ağırlığı bloğun ağırlığı yanında çok küçük olduğu için ihmal edilebilir.

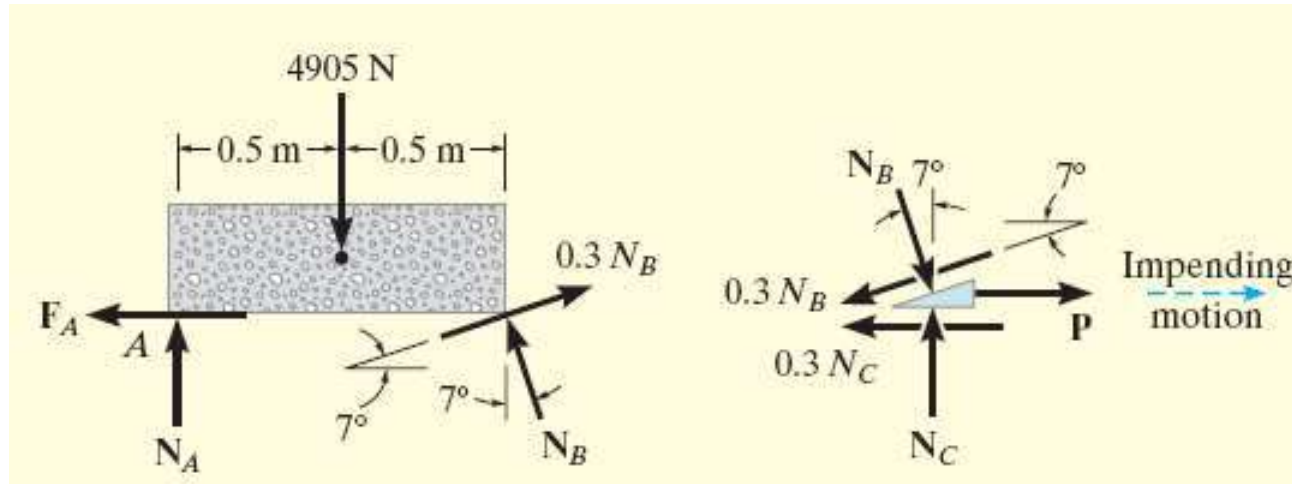
Örnek 10.6

Şekilde görülen düzgün taş **500 kg**'lık bir kütleye sahiptir ve B noktasında bir takoz kullanılarak yatay pozisyonda tutulmaktadır. Eğer temas yüzeylerinde statik sürtünme katsayısı $\mu_s = 0.3$ ise, takozu çıkarmak için gereken minimum **P** kuvveti ne olmalıdır? Kama kendi kendine kilitleniyor mu? Taşın A'da kaymadığını kabul ediniz.



Çözüm

- Minimum P kuvveti takoz ile temas yüzeyinde $F = \mu_s N_A$ sürtünme kuvvetinin oluşmasına neden olur.
- Taşa ve takozu ait SCD aşağıda verilmiştir.
- Takoz üzerinde, sürtünme kuvveti hareketin tersi yönündedir
Taş üzerindeki A noktasında, $F_A \leq \mu_s N_A$ olduğunda kayma oluşmaz.



Çözüm

5 bilinmeyen, taş için 3 ve takoz için 2 denge denklemi.

$$\sum M_A = 0;$$

$$-4905(0.5) + (N_B \cos 7^\circ)(1)$$

$$+ (0.3 N_B \sin 7^\circ)(1) = 0$$

$$N_B = 2383.1 N$$

$$+ \rightarrow \sum F_x = 0;$$

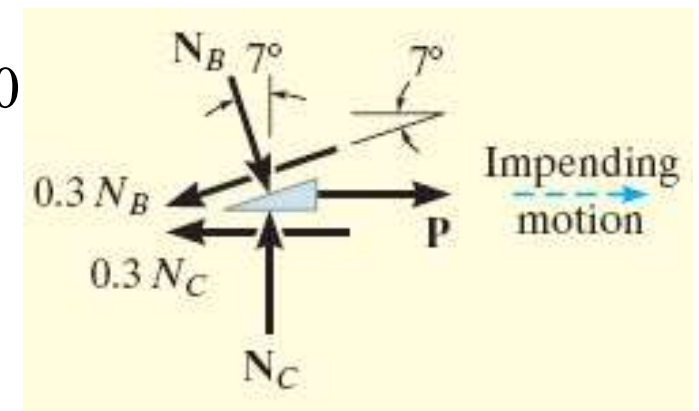
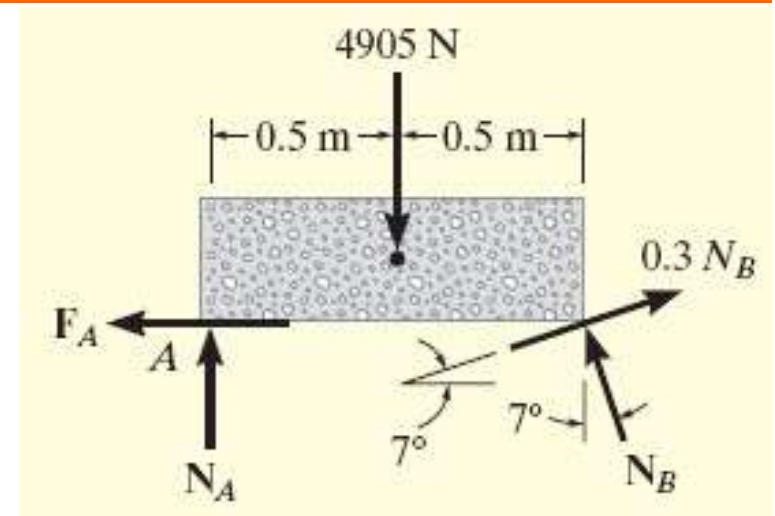
$$2383.1 \sin 7^\circ - 0.3(2383.1 \cos 7^\circ) + P - 0.3 N_C = 0$$

$$+ \uparrow \sum F_y = 0;$$

$$N_C - 2383.1 \cos 7^\circ - 0.3(2383.1 \sin 7^\circ) = 0$$

$$N_C = 2452.5 N$$

$$P = 1154.9 N = 1.15 kN$$



Çözüm

P pozitif olduğundan, takoz çekilmelidir.

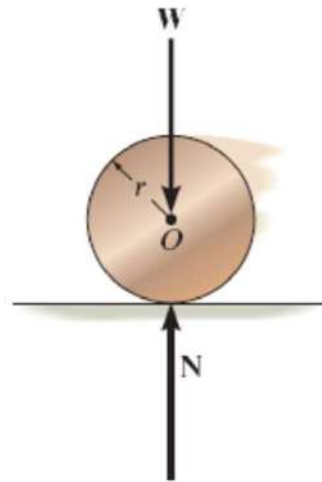
Eğer **P** sıfır olsaydı, takoz yerinde kalacaktı ve kendi kendine kilitlenecekti (self-locking). Ayrıca B ve C'de oluşan sürtünme kuvvetleri aşağıdaki eşitsizlikleri sağlayacaktı:

$$F_B < \mu_s N_B$$

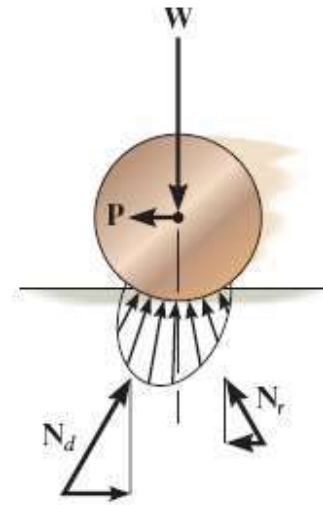
$$F_C < \mu_s N_C$$

10.4 Yuvarlanma Direnci (Rolling Resistance)

- **W** ağırlıklı rijit bir silindir rijit bir yüzey boyunca sabit hızla yuvarlandığında, normal kuvvet temasın teğet noktasındadır.
- Sert malzemeden yapılmış silindir altındaki yumuşak yüzeyi sıkıştıracaktır.



Rijit temas yüzeyi

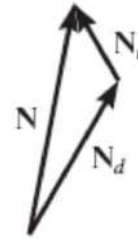


Yumuşak temas yüzeyi

10.4 Yuvarlanma Direnci (d'm)

- Silindire etki eden tüm normal basıncın bileşkesini dikkate alalım.

$$\mathbf{N} = \mathbf{N}_d + \mathbf{N}_r$$



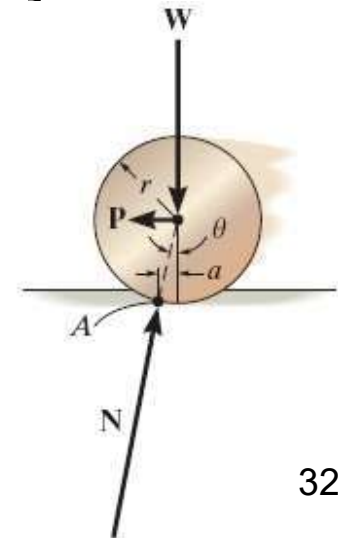
- Silindiri dengede tutmak için, sabit hızla yuvarlanma durumunda $\mathbf{N}$, itici güç $\mathbf{P}$ ve ağırlık $\mathbf{W}$ ile kesişecektir.
- A'ya göre momentlerin toplamı,

$$W(a) = P(r \cos \theta)$$

$$W(a) \approx P(r)$$

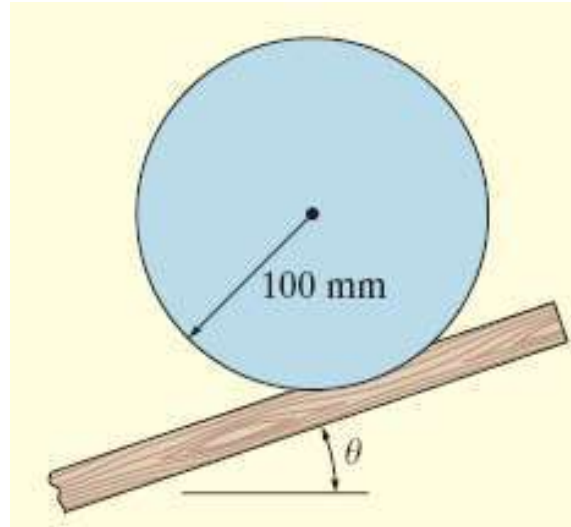
$$P \approx W(a)/(r)$$

- Burada, a yuvarlanma direnci katsayısıdır.



Örnek 10.7

Şekildeki 10 kg'lık çelik tekerlek 100 mm'lik bir yarıçapa sahiptir ve ahşaptan yapılmış eğimli bir yüzey üzerinde durmaktadır. Eğer tekerlek sabit bir hızla yüzeyden aşağıya doğru yuvarlanacak şekilde açı $\theta = 1.2^\circ$ olacak şekilde arttırılırsa, yuvarlanma direnci katsayısını ne olur?



Çözüm

Tekerleğin SCD'si aşağıda görülmektedir.

Tekerlek harekete başlama anında bulunmaktadır.

A noktasında etki eden normal reaksiyon **N** a boyutu ile ifade edilmektedir.

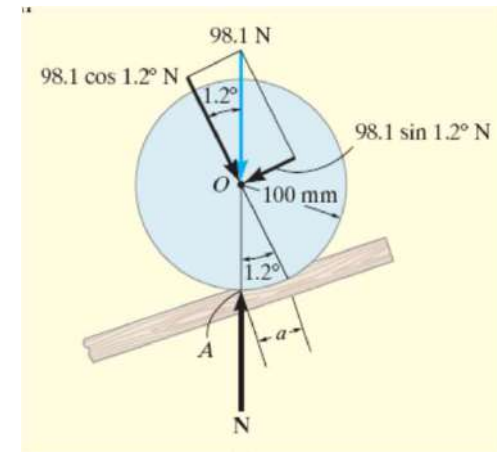
A noktasına göre momentlerin toplamı,

$$\sum M_A = 0;$$

$$98.1 \cos 1.2^\circ (a) - 98.1 \sin 1.2^\circ (100 \text{ mm}) = 0$$

Bu çözüldüğünde a bulunacaktır;

$$a = 2.09 \text{ mm}$$

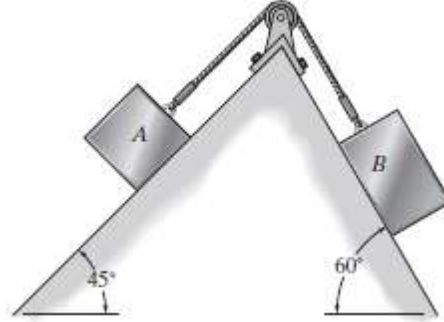


STATİK

BÖLÜM 10. SÜRTÜNME (FRICTION)

ÖRNEK SORU ÇÖZÜMLERİ

1. A bloğunun kütlesi 1.5 kg olduğuna göre, şekilde görülen sistemin hareket etmemesi ve dengede kalabilmesi için B bloğunun kütlesinin alabileceği en büyük değer ne olmalıdır? Eğimli yüzey ile bloklar arasındaki statik sürtünme katsayısı $\mu_s = 0.20$ 'dir.



ÇÖZÜM:

Görüldüğü gibi B bloğu eğimli yüzeyden aşağıya doğru kaymaya meyillidir.

Blok A:

$$+\nearrow \Sigma F_x = 0; \quad T - 0.2 N_A - 1.5(9.81) \sin 45^\circ = 0$$

$$+\searrow \Sigma F_y = 0; \quad N_A - 1.5(9.81) \cos 45^\circ = 0$$

Blok B:

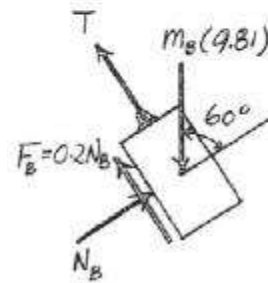
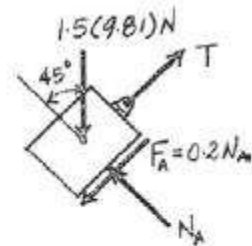
$$+\searrow \Sigma F_x = 0; \quad T + 0.2 N_B - 9.81(m_B) \sin 60^\circ = 0$$

$$+\nearrow \Sigma F_y = 0; \quad N_B - 9.81(m_B) \cos 60^\circ = 0$$

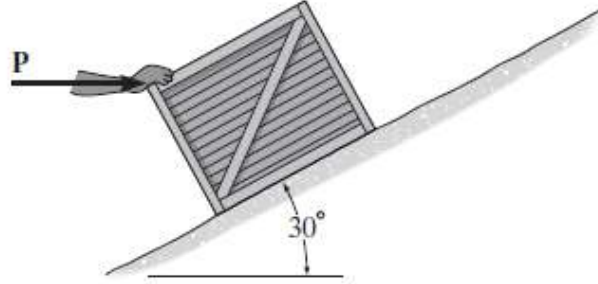
Bunlar çözüldüğünde şu sonuçlar elde edilir.

$$N_A = 10.4 \text{ N}; \quad N_B = 8.15 \text{ N}; \quad T = 12.5 \text{ N};$$

$$m_B = 1.66 \text{ kg} \quad \text{Ans}$$



2. Şekilde görülen sandığın eğik yüzeyden aşağıya doğru kaymaması için gerekli olan en küçük P yatay kuvvetini hesaplayınız. Sandığın kütlesi 50 kg'dır ve eğimli yüzey ile sandık arasındaki statik sürtünme katsayısı $\mu_s = 0.25$ 'dir.



ÇÖZÜM:

Şekil a'da verilen SCD'de görüldüğü gibi, sandık aşağıya doğru kaymaya çalıştığından dolayı F sürtünme kuvveti yukarıya doğru (hareket yönünün tersi yönde) etki edecektir.

$$F = \mu_s N = 0.25 N$$

Denge denklemleri:

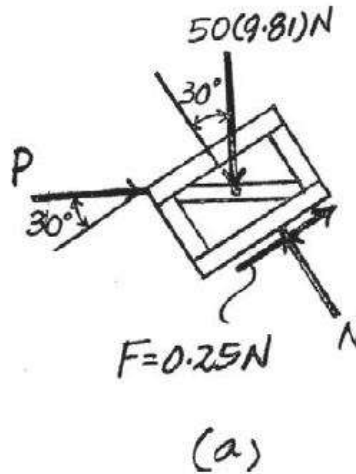
$$\Sigma F_y = 0; \quad N - P \sin 30^\circ - 50(9.81) \cos 30^\circ = 0$$

$$\Sigma F_x = 0; \quad P \cos 30^\circ + 0.25 N - 50(9.81) \sin 30^\circ = 0$$

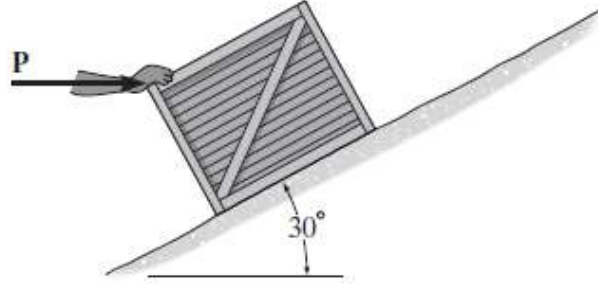
Çözüldüğünde P ve N bulunur.

$$P = 140 \text{ N}$$

$$N = 494.94 \text{ N}$$



3. Şekilde görülen sandığın eğik yüzeyden yukarıya doğru itebilmek için gerekli olan en küçük P yatay kuvvetini hesaplayınız. Sandığın kütlesi 50 kg'dır ve eğimli yüzey ile sandık arasındaki statik sürtünme katsayısı $\mu_s = 0.25$ 'dir.



ÇÖZÜM:

Şekil b'de verilen SCD'de görüldüğü gibi, sandık yukarıya doğru itmeye çalışıldığından dolayı F sürtünme kuvveti aşağıya doğru (hareket yönünün tersi yönde) etki edecektir.

$$F' = \mu_s N' = 0.25 N'.$$

Denge denklemleri:

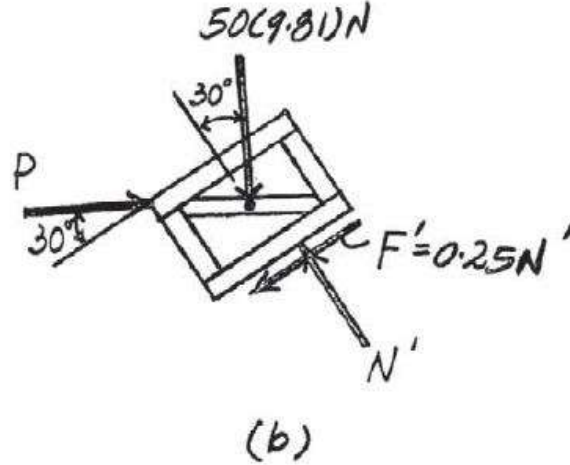
$$\Sigma F_y = 0; \quad N' - P \sin 30^\circ - 50(9.81) \cos 30^\circ = 0$$

$$\Sigma F_x = 0; \quad P \cos 30^\circ - 0.25 N' - 50(9.81) \sin 30^\circ = 0$$

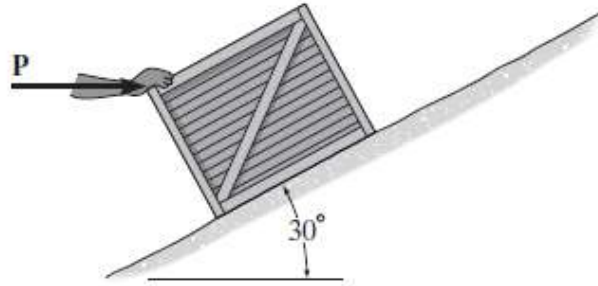
Çözüldüğünde P ve N bulunur.

$$P = 474 \text{ N}$$

$$N' = 661.92 \text{ N}$$



4. Sandığın eğik yüzeyden aşağı kaymasını engellemek için gerekli olan en küçük yatay kuvvet $P=100$ N ve yukarıya doğru itmek için gerekli olan en küçük yatay kuvvet $P=350$ N ise eğimli yüzey ile sandık arasındaki statik sürtünme katsayısını ve sandığın kütlesini bulunuz.



ÇÖZÜM:

$$F = \mu_s N \quad F' = \mu_s N'$$

Denge denklemleri:

$$+\nearrow \Sigma F_y = 0; \quad N - 100 \sin 30^\circ - m(9.81) \cos 30^\circ = 0$$

$$+\nearrow \Sigma F_x = 0; \quad \mu_s N + 100 \cos 30^\circ - m(9.81) \sin 30^\circ = 0$$

$$\mu_s = \frac{4.905 m - 86.603}{8.496 m + 50} \quad (1)$$

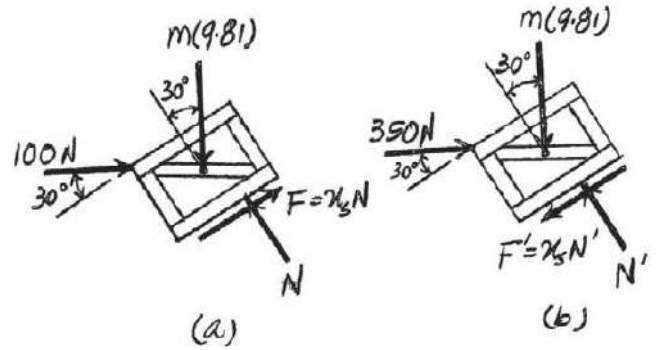
$$+\nearrow \Sigma F_{y'} = 0; \quad N' - m(9.81) \cos 30^\circ - 350 \sin 30^\circ = 0$$

$$+\nearrow \Sigma F_{x'} = 0; \quad 350 \cos 30^\circ - m(9.81) \sin 30^\circ - \mu_s N' = 0$$

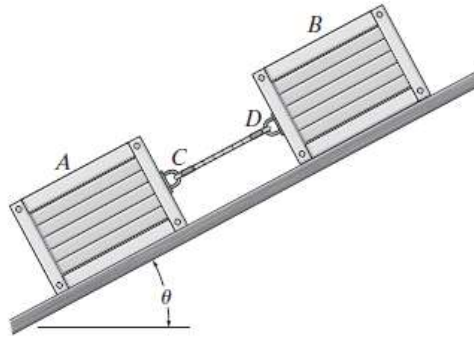
$$\mu_s = \frac{303.11 - 4.905 m}{175 + 8.496 m} \quad (2)$$

$$m = 36.46 \text{ kg}$$

$$\mu_s = 0.256$$



5. Şekilde görülen A sandığı 1000 N ve B sandığı 750 N'luk bir ağırlığına sahiptir. Bu sandıklar birbirine bir kablo ile bağlanmış ve eğik bir yüzeye yerleştirilmiştir. Eğer θ açısı yavaş yavaş arttırılırsa, sandıkların hangi θ açısı değerinde kaymaya başlayacağını ve bu durumda kabloda oluşan çekme kuvvetini hesaplayınız. Eğimli yüzey ile sandıklar arasındaki statik sürtünme katsayıları; $\mu_A = 0.25$ ve $\mu_B = 0.35$ 'dir.



ÇÖZÜM:

Sandıklar aşağıya doğru kayacaklarından F_A ve F_B sürtünme kuvvetleri yukarı yönlü olacaktır.

$$F_A = \mu_A N_A = 0.25 N_A$$

$$F_B = \mu_B N_B = 0.35 N_B$$

Şekil a'daki SCD dikkate alınarak denge denklemleri yazılırsa;

$$\begin{aligned}
 +\curvearrowright \Sigma F_{y'} &= 0; & N_A - 1000 \cos \theta &= 0 & N_A &= 1000 \cos \theta \\
 +\nearrow \Sigma F_{x'} &= 0; & F_{CD} + 0.25 (1000 \cos \theta) - 1000 \sin \theta &= 0 & & (1)
 \end{aligned}$$

Benzer olarak, Şekil a'daki SCD dikkate alınarak denge denklemleri yazılırsa;

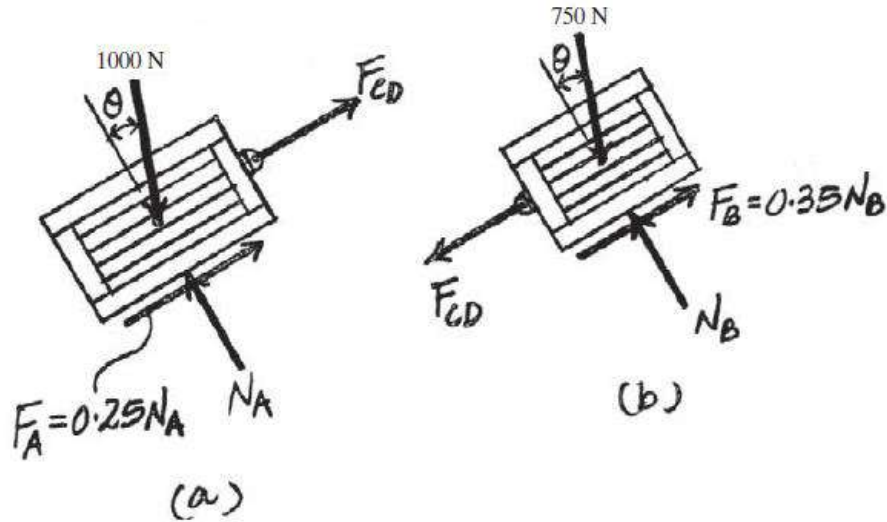
$$\begin{aligned}
 +\curvearrowright \Sigma F_{y'} &= 0; & N_B - 750 \cos \theta &= 0 & N_B &= 750 \cos \theta \\
 +\nearrow \Sigma F_{x'} &= 0; & 0.35 (750 \cos \theta) - F_{CD} - 750 \sin \theta &= 0 & & (2)
 \end{aligned}$$

Denklem 1 ve 2 birlikte çözüldüğünde gerekli olan açı değeri ve kablo kuvveti elde edilir.

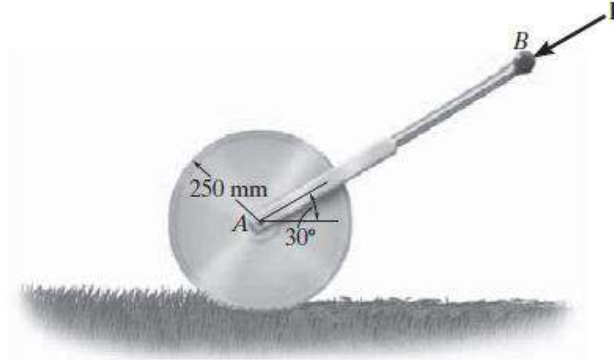
$$\theta = 16.3^\circ$$

Ans

$$F_{CD} = 41.13 \text{ N}$$



6. 80 kg kütleli çim silindirin BA kolu yatayla 30° 'lik açı yapmaktadır ve silindirin yuvarlanma direnci katsayısı 25 mm'dir. Silindiri sabit bir hızla itmek için gerekli olan P kuvvetini bulunuz. A aksında oluşacak sürtünmeyi ihmal ediniz.



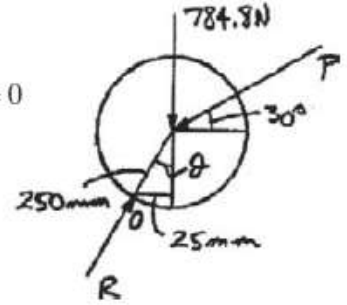
ÇÖZÜM:

$$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{25}{250}\right) = 5.74^\circ$$

$$(+\Sigma M_O = 0; \quad -25(784.8) - P \sin 30^\circ(25) + P \cos 30^\circ(250 \cos 5.74^\circ) = 0$$

Bu denklem çözüldüğünde P kuvveti bulunur.

$$P = 96.7 \text{ N} \quad \text{Ans}$$



Kaynaklar:

1. Engineering Mechanics: Statics, Pearson, R.C. Hibbeler
2. Mühendisler için Mekanik-Statik, Birsen Yayınevi, Mehmet H. Omurtag
3. Mühendisler için Mekanik-Statik-Çözümlü Problemler, Birsen Yayınevi, M.H. Omurtag
4. Mühendislik Mekaniği-Statik, Nobel Yayınevi, John L. Meriam, L. Glenn Kraige