

1 Ölçülebilir Fonksiyonlar

Tanım. (X, \mathcal{F}_1) ve (Y, \mathcal{F}_2) birer ölçülebilir uzay, $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall A \in \mathcal{F}_2$ için $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}_1$ oluyor ise, f ölçülebilir bir fonksiyondur.

Yukarıdaki tanım içerisinde geçen $f^{-1}(A)$, ters görüntüyü belirtmektedir (ters fonksiyonu değil, f nin tersi olmak zorunda da değil).

Teorem 1.1.

(X, \mathcal{F}) bir ölçülebilir uzay ve $f : (X, \mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Aşağıdakiler birbirine denktir:

- (a) f ölçülebilirdir;
- (b) $\{x \in X : f(x) < b\} \in \mathcal{F}, \forall b \in \mathbb{R}$;
- (c) $\{x \in X : f(x) \leq b\} \in \mathcal{F}, \forall b \in \mathbb{R}$;
- (d) $\{x \in X : f(x) > b\} \in \mathcal{F}, \forall b \in \mathbb{R}$;
- (e) $\{x \in X : f(x) \geq b\} \in \mathcal{F}, \forall b \in \mathbb{R}$.

Not !

$\{x : f(x) \in A\} = f^{-1}(A)$ olduğundan Teorem 1.1 maddeleri ters görüntü, yani f^{-1} , kullanarak da belirtebiliriz. Örneğin (b) maddesini düşünecek olursak $\{x \in X : f(x) < b\} = f^{-1}((-\infty, b))$ yazabiliriz. Kimi zaman ters görüntü ile işlem yapmak bize kolaylık sağlayacaktır.

Örnek 1.1. (Ölçülebilir Fonksiyon)

(X, \mathcal{F}) bir ölçülebilir uzay ve $f : (X, \mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = c$ şeklinde tanımlanan sabit bir fonksiyon olsun. O halde f ölçülebilirdir; çünkü $\forall A \subseteq \mathbb{R}$ için $f^{-1}(A) = X$ ($c \in A$ ise) ya da $f^{-1}(A) = \emptyset$ ($c \notin A$ ise) dir. \emptyset ve X ölçülebilir olduğundan f ölçülebilirdir.

Teorem 1.2.

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ise f ölçülebilirdir.

İspat. Sürekli bir f fonksiyonu ve $A \subset \mathbb{R}$ açık kümesi için $f^{-1}(A)$ açık bir küme olduğunu kullanarak

$$\{w \in [a, b] : f(w) < b\} = f^{-1}((-\infty, b))$$

kümesinin açık bir küme olduğu elde edilebilir ($A = (-\infty, b)$ alınarak). Açık kümeler ölçülebilir olduğundan $\{w \in [a, b] : f(w) < b\}$ kümesi ölçülebilirdir, Teorem 1.1 gereğince f fonksiyonu ölçülebilirdir. ■

Teorem 1.3.

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton bir fonksiyon ise f ölçülebilirdir.

Ters Görüntü Özellikleri

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $A, B, \dots \subset \mathbb{R}$ olsun.

1. $f^{-1}(A) = \{w \in \Omega : f(w) \in A\}$

2. $f^{-1}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \bigcup_{j=1}^{\infty} f^{-1}(A_j)$

3. $f^{-1}\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \bigcap_{j=1}^{\infty} f^{-1}(A_j)$

4. $f^{-1}(\overline{A}) = \overline{f^{-1}(A)}$

Ölçülebilir tüm fonksiyonların kümesini \mathcal{L} ile göstereceğiz.

Teorem 1.4.

$f, g \in \mathcal{L}$ ve $k \in \mathbb{R}$ olsun. O halde

- (a) $kf \in \mathcal{L}$;
- (b) $f + g \in \mathcal{L}$;
- (c) $fg \in \mathcal{L}$;
- (d) $f/g \in \mathcal{L}$, ($g \neq 0$).

İspat. (a) $k > 0$ için

$$\{w : kf(w) < b\} = \{w : f(w) < \frac{b}{k}\} \in \mathcal{F}, \forall \frac{b}{k} \in \mathbb{R},$$

$k < 0$ için

$$\{w : kf(w) < b\} = \{w : f(w) > \frac{b}{k}\} \in \mathcal{F}, \forall \frac{b}{k} \in \mathbb{R}.$$

$k = 0$ için ise $0f(x) = 0$ sabit fonksiyonu olacağından Örnek 1.1 gereğince $0f$ ölçülebilirdir.

(b)

$$\begin{aligned} \{w : (f + g)(w) < b\} &= \{w : f(w) + g(w) < b\} \\ &= \bigcup_{q_n \in \mathbb{Q}} \{w : f(w) < q_n, g(w) < b - q_n\} \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

(c) Öncelikle ölçülebilir bir fonksiyonun karesinin, yani f^2 fonksiyonun ölçülebilir olduğunu göstereceğiz. Her $b \geq 0$ için $\{w : f^2(w) < b\} = \{w : -\sqrt{b} < f(w) < \sqrt{b}\}$ olduğundan f^2 fonksiyonu ölçülebilirdir. O halde $fg = \frac{1}{2}[(f + g)^2 - f^2 - g^2]$ olduğundan (a) ve (b) maddeleri gereğince fg ölçülebilirdir.

(d) Eğer $g \neq 0$ ise,

$$\{w : 1/g(w) < b\} = \begin{cases} \{w : 1/b < g(w) < 0\} & , b < 0 \\ \{w : g(w) < 0\} & , b = 0 \\ \{w : g(w) < 0\} \cup \{w : 1/b < g(w)\} & , b > 0 \end{cases}$$

olduğundan $1/g$ ölçülebilirdir. (c) maddesini kullanılarak f/g nin ölçülebilir bir fonksiyon olduğunu elde ederiz. ■

Teorem 1.5.

$f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f \in \mathcal{L}$ olsun. Eğer $\{w : f(w) \neq g(w)\}$ kümesi sıfır küme ise $g \in \mathcal{L}$ dir.

İspat. $h(w) := f(w) - g(w)$ şeklinde yeni bir fonksiyon tanımlayalım. $a \in \mathbb{R}$ için $\{w : h(w) > a\}$; kümesi $a \geq 0$ için bir sıfır küme, $a < 0$ için ise tümleyeni sıfır küme olan bir küme olur; yani her iki durumda da $\{w : h(w) > a\} \in \mathcal{F}$ dir. Teorem 1.1 gereğince $h \in \mathcal{L}$ dir. Buradan da Teorem 1.4 kullanılarak $g(w) = f(w) - h(w) \in \mathcal{L}$ elde edilir. ■

Örnek 1.2. (Ölçülemez bir Fonksiyon)

$S \subset [0, 1]$ olacak şekilde ölçülemeyen bir S kümesinin var olduğunu biliyoruz. $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , x \in S \\ 0 & , x \notin S \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. $\{1\} \subset \mathbb{R}$ sonlu olduğundan ölçülebilir bir kümedir, ancak $f^{-1}(1) = S$ ölçülebilir değildir. Dolayısı ile f ölçülebilir bir fonksiyon değildir. ■

1.1 Supremum Limit ve Infimum Limit

Tanım. (x_n) bir dizi olmak üzere *infimum limit* $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{k \geq n} x_k \right) \text{ ya da } \lim_{n \rightarrow \infty} \inf x_n := \sup_{n \geq 1} \inf_{k \geq n} x_k$$

şeklinde ve *supremum limit* $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ da

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \geq n} x_k \right) \text{ ya da } \lim_{n \rightarrow \infty} \sup x_n := \inf_{n \geq 1} \sup_{k \geq n} x_k$$

şeklinde tanımlanır.

Not !

$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ değeri (x_n) dizisinin limit noktalarının en büyük olanını belirtirken, $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ değeri (x_n) dizisinin limit noktalarının en küçük olanını belirtmektedir.

Şimdi bir örnek ile $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ ve $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ değerlerini inceleyelim.

Örnek 1.3. (İnfimum ve Supremum Limit)

Bir (x_n) dizisi $(x_n) = (3 - \frac{1}{2}, 5 + \frac{1}{3}, 3 - \frac{1}{4}, 5 + \frac{1}{5}, 3 - \frac{1}{6}, 5 + \frac{1}{7}, 3 - \frac{1}{8}, 5 + \frac{1}{9}, \dots)$ şeklinde tanımlanmış olsun.

(x_n) dizisinin limit noktaları 3 ve 5 tir, dizinin tek terimlerinden oluşan alt dizisi 3 e, çift terimlerinden oluşan alt dizisi ise 5 e yakınsar. Dolayısı ile $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = 5$ ve $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = 3$ olur. Şimdi bu lim sup ve lim inf değerlerini tanımı kullanarak görelim.

Dizinin tüm elemanları üzerinden inf alırsak $3 - \frac{1}{2}$ elde ederiz, yani $\inf_{k \geq 1} x_k = 3 - \frac{1}{2}$.

Dizinin üçüncü teriminden itibaren inf alırsak $3 - \frac{1}{4}$ elde ederiz, yani $\inf_{k \geq 3} x_k =$

$3 - \frac{1}{4}$. Dizinin beşinci teriminden itibaren inf alırsak $3 - \frac{1}{6}$ elde ederiz, yani

$\inf_{k \geq 5} x_k = 3 - \frac{1}{6}$. Dizinin yedinci teriminden itibaren inf alırsak $3 - \frac{1}{8}$ elde ederiz,

yani $\inf_{k \geq 7} x_k = 3 - \frac{1}{8}$. Görüleceği üzere bu şekilde devam ettikçe inf değerleri

gittikçe artmaktadır. Eğer bu inf değerlerini, $3 - \frac{1}{2}, 3 - \frac{1}{4}, 3 - \frac{1}{6}, 3 - \frac{1}{8}, \dots$ bir dizi

olarak düşünecek olursak bu dizinin limit değeri 3 olacaktır, yani $\lim_{n \rightarrow \infty} (\inf_{k \geq n} x_k) =$

3. Ya da başka bir deyişle $3 - \frac{1}{2}, 3 - \frac{1}{4}, 3 - \frac{1}{6}, 3 - \frac{1}{8}, \dots$ dizisinin sup değeri 3

olacaktır, bu da $\sup_{n \geq 1} \inf_{k \geq n} x_k = 3$ demektir. $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = 5$ olduğu da benzer şekilde gösterilebilir.

Teorem 1.6.

Her $n \geq 1$, $f_n : (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için $f_n \in \mathcal{L}$ olsun. O halde $\max_{n \leq k} f_n$,

$\min_{n \leq k} f_n, \sup_{n \geq 1} f_n, \inf_{n \geq 1} f_n, \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n, \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \in \mathcal{L}$.

İspat. f_n fonksiyonları için

$$\{w : \max_{n \leq k} f_n(w) < a\} = \bigcap_{n=1}^k \{w : f_n(w) < a\} \in \mathcal{F}, \forall a \in \mathbb{R},$$

yazabiliriz; çünkü sabit bir w için $\max_{n \leq k} f_n(w) < a$ olması demek, her n için $f_n(w) < a$ olması demektir. Başka bir deyişle en az bir tane n için $f_n(w) \geq a$ olması demek $w \notin \{w : \max_{n \leq k} f_n(w) < a\}$ demektir. Her n için $f_n \in \mathcal{L}$ olduğundan $\{w : f_n(w) <$

$a\} \in \mathcal{F}, \forall a \in \mathbb{R}$ olur, sonlu sayıda ölçülebilir kümenin kesişimi de ölçülebilir olduğundan $\bigcap_{n=1}^k \{w : f_n(w) < a\} \in \mathcal{F}, \forall a \in \mathbb{R}$ olur.
Yine f_n fonksiyonları için

$$\{w : \min_{n \leq k} f_n(w) < a\} = \bigcup_{n=1}^k \{w : f_n(w) < a\} \in \mathcal{F}, \forall a \in \mathbb{R},$$

yazabiliriz, çünkü sabit bir w için $\min_{n \leq k} f_n(w) < a$ olması demek en az bir tane n için $f_n(w) < a$ olması demektir. Başka bir deyişle her n için $f_n(w) \geq a$ olması demek $w \notin \{w : \min_{n \leq k} f_n(w) < a\}$ demektir. Her n için $f_n \in \mathcal{L}$ olduğundan $\{w : f_n(w) < a\} \in \mathcal{F}, \forall a \in \mathbb{R}$ olur, sonlu sayıda ölçülebilir kümenin birleşimi de ölçülebilir olduğundan $\bigcup_{n=1}^k \{w : f_n(w) < a\} \in \mathcal{F}, \forall a \in \mathbb{R}$ olur.

sup ve inf için de benzer şekilde

$$\{w : \sup_{n \geq 1} f_n(w) \leq a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{w : f_n(w) \leq a\} \in \mathcal{F}, \forall a \in \mathbb{R},$$

$$\{w : \inf_{n \geq 1} f_n(w) \leq a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{w : f_n(w) \leq a\} \in \mathcal{F}, \forall a \in \mathbb{R},$$

elde edilir. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup f_n(w) = \inf_{n \geq 1} \sup_{k \geq n} f_k(w)$ olduğundan yeni bir $g_n := \sup_{k \geq n} f_k$ fonksiyonu tanımlarsak $g_n \in \mathcal{L}$ olur (yukarıda sup fonksiyonunun ölçülebilir olduğunu gösterdiğimizden). Buradan şunu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup f_n(w) = \inf_{n \geq 1} \sup_{k \geq n} f_k(w) = \inf_{n \geq 1} g_n(w) \in \mathcal{L},$$

elde ederiz (yukarıda inf fonksiyonunun ölçülebilir olduğunu gösterdiğimizden). Benzer şekilde $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf f_n = \sup_{n \geq 1} \inf_{k \geq n} f_k \in \mathcal{L}$ olduğu gösterilebilir. ■

2 Basit Fonksiyonlar

Şimdi ölçü uzayını (Ω, \mathcal{F}, m) üçlüsü ile gösterelim, burada Ω bir kümeyi; \mathcal{F} , Ω nın ölçülebilir alt kümelerinden oluşan kümeyi ve m de ölçü fonksiyonunu temsil etmektedir.

Tanım. $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için görüntü kümesi, $f(\Omega)$, sonlu ve $f \in \mathcal{L}$ ise f fonksiyonuna *basit fonksiyon* denir.

Basit bir f fonksiyonu için görüntü kümesini $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}$ ile gösterelim. Burada $f^{-1}(a_i) := A_i \in \mathcal{F}$ tir.

Not !

A_1, A_2, \dots, A_n kümeleri Ω nın bir parçalanışını oluştururlar.

Ödev. $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{L}$ ve $a \in \mathbb{R}$ olsun. $f^{-1}(a) \in \mathcal{F}$ olduğunu gösteriniz.

Tanım. $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ basit bir fonksiyon ve $\forall w \in \Omega$ için $f(w) \geq 0$ olsun. f nin Ω üzerinden (Lebesgue) *integrali*

$$\int_{\Omega} f dm := \sum_{i=1}^n a_i m(A_i)$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 2.1. (Basit Fonksiyon İntegrali)

$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x \in \mathbb{Q} \\ 1 & , x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. $\int_{[0,1]} f dm$ integralini hesaplayınız.

$f([0, 1]) = \{0, 1\}$ olduğundan $a_1 = 0$ ve $a_2 = 1$ seçebiliriz. Bu durumda $A_1 = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ ve $A_2 = [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ olur. Buradan

$$\int_{[0,1]} f dm = \sum_{i=1}^2 a_i m(A_i) = 0 \cdot m([0, 1] \cap \mathbb{Q}) + 1 \cdot m([0, 1] \setminus \mathbb{Q}) = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$$

bulunur.

Tanım. $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ basit bir fonksiyon ve $\forall w \in \Omega$ için $f(w) \geq 0$ olsun. f nin $A \in \mathcal{F}$ ($A \subseteq \Omega$) üzerinden (Lebesgue) *integrali*

$$\int_A f dm := \sum_{i=1}^n a_i m(A_i \cap A)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.1.

$f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ basit fonksiyonlar ve $A, B \in \mathcal{F}$ olmak üzere

- (a) Her $w \in A$ için $f(w) \leq g(w)$ ise $\int_A f dm \leq \int_A g dm$;
- (b) $A \cap B = \emptyset$ ise $\int_{A \cup B} f dm = \int_A f dm + \int_B f dm$;
- (c) Her $a > 0$ için $\int_A a f dm = a \int_A f dm$.

İspat. f, g basit fonksiyonlar olduğundan $f(\Omega) = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $f^{-1}(a_i) = A_i$ ve $g(\Omega) = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$, $g^{-1}(b_j) = B_j$ yazabiliriz.

(a)

$$\int_A f dm = \sum_{i=1}^n a_i m(A_i \cap A) \text{ ve } \int_A g dm = \sum_{j=1}^k b_j m(B_j \cap A)$$

olur. $C_{ij} := A_i \cap B_j$ olarak tanımlayalım. Buradan $A_i = \bigcup_{j=1}^k C_{ij}$ ve

$$\int_A f dm = \sum_{i=1}^n a_i m(A_i \cap A) = \sum_{i=1}^n a_i m\left(\left(\bigcup_{j=1}^k C_{ij}\right) \cap A\right) = \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^k m(C_{ij} \cap A)$$

elde edilir. Yani

$$\int_A f dm = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq k}} a_i m(C_{ij} \cap A)$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\int_A g dm = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq k}} b_j m(C_{ij} \cap A)$$

elde edilebilir. Herhangi bir $w \in C_{ij}$ elemanı için $a_i = f(w) \leq g(w) = b_j$ olduğundan

$$\int_A f dm = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq k}} a_i m(C_{ij} \cap A) \leq \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq k}} b_j m(C_{ij} \cap A) = \int_A g dm$$

bulunur.

(b)

$$\begin{aligned}\int_{A \cup B} f \, dm &= \sum_{i=1}^n a_i m(A_i \cap (A \cup B)) = \sum_{i=1}^n a_i (m(A_i \cap A) + m(A_i \cap B)) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i m(A_i \cap A) + \sum_{i=1}^n a_i m(A_i \cap B) \\ &= \int_A f \, dm + \int_B f \, dm\end{aligned}$$

bulunur. (Burdaki ikinci eşitlik $A \cap B = \emptyset$ olduğundan elde edildi.)

(c) $h(w) := af(w)$ fonksiyonunu tanımlayalım. Teorem 1.4 (a) gereğince $h \in \mathcal{L}$ dir. Ayrıca $h(\Omega) = \{aa_1, aa_2, \dots, aa_n\}$ ve $h^{-1}(aa_i) = A_i$ olur. Dolayısı ile h basit bir fonksiyondur ve

$$\int_A af \, dm = \int_A h \, dm = \sum_{i=1}^n aa_i m(A_i \cap A) = a \sum_{i=1}^n a_i m(A_i \cap A) = a \int_A f \, dm$$

elde edilir. ■

Tanım. Bir X kümesi ve $A \subseteq X$ için $\mathbb{1}_A : X \rightarrow \{0, 1\}$ fonksiyonu

$$\mathbb{1}_A(x) := \begin{cases} 1 & , x \in A \\ 0 & , x \notin A \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır ve bu $\mathbb{1}_A$ fonksiyonuna A nın *karakteristik fonksiyonu* denir.

Teorem 2.2.

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{L}$ ve her $w \in \Omega$ için $f(w) \geq 0$ olsun. O halde her $n \geq 1$ için $f_{n+1} \geq f_n$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ olacak şekilde $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ basit fonksiyonlar dizisi vardır.

İspat. f nin görüntü kümesini uzunluğu $\frac{1}{2^n}$ olacak şekilde arakesitleri boş parçalara bölerek $A_{k,n} := f^{-1}\left(\left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right]\right)$ kümesini tanımlayalım. Yani herhangi bir w için $w \in A_{k,n}$ olması, $\frac{k}{2^n} < f(w) \leq \frac{k+1}{2^n}$ olması demektir. Bu $A_{k,n}$ kümelerini kullanarak da f_n fonksiyonlarını

$$f_n(w) = \begin{cases} 0 & , f(w) > 2^{2n} \\ \sum_{k=0}^{2^{2n}-1} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{A_{k,n}}(w) & , f(w) \leq 2^{2n} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Yukarıda $w \in A_{k,n}$ olması, $\frac{k}{2^n} < f(w) \leq \frac{k+1}{2^n}$ olması demek olduğunu belirtmiştik. $w \in A_{k,n}$ olması ayrıca $f_n(w) = \frac{k}{2^n}$ olması demektir.

Buradan $f_n(w) \leq f(w)$ olduğu görülebilir. Ayrıca $f(w) \leq 2^{2n}$ olduğu zaman

$$0 \leq f(w) - f_n(w) \leq \frac{k+1}{2^n} - \frac{k}{2^n} = \frac{1}{2^n}$$

elde edebiliriz. $n \rightarrow \infty$ iken $\frac{1}{2^n} \rightarrow 0$ olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ olur, bu ispatın limit kısmını tamamlar.

İspatın monoton artanlık kısmı, yani $f_{n+1} \geq f_n$, için öncelikle

$$\left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right] = \left(\frac{2k}{2^{n+1}}, \frac{2k+1}{2^{n+1}}\right] \cup \left(\frac{2k+1}{2^{n+1}}, \frac{2k+2}{2^{n+1}}\right]$$

eşitliğini düşünelim. Bu eşitlik $A_{k,n} = A_{2k,n+1} \cup A_{2k+1,n+1}$ olduğunu gösterir. Bu da her $w \in A_{k,n}$ için $w \in A_{2k,n+1}$ ya da $w \in A_{2k+1,n+1}$ demektir. Yani $w \in A_{k,n}$ için $f_n(w) = \frac{k}{2^n}$ dir ve ayrıca $w \in A_{2k,n+1}$ olup $f_{n+1}(w) = \frac{2k}{2^{n+1}} = \frac{k}{2^n}$ dir ya da $w \in A_{2k+1,n+1}$ olup $f_{n+1}(w) = \frac{2k+1}{2^{n+1}} > \frac{k}{2^n}$ dir. Kısaca her iki durumda da $f_{n+1}(w) \geq f_n(w)$ olur. ■

Teorem 2.2, bize ölçülebilir olan pozitif değerli fonksiyonların pozitif değerli basit fonksiyonların bir limiti olarak yazılabileceğini gösteriyor. Bu özelliği kullanarak (Lebesgue) integral tanımını pozitif değerli basit fonksiyonlardan pozitif değerli ölçülebilir fonksiyonlara aşağıdaki tanım ile genişletebiliriz.

Tanım. $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ölçülebilir bir fonksiyon ve $\forall w \in \Omega$ için $f(w) \geq 0$ olsun. f nin $A \in \mathcal{F}$ ($A \subseteq \Omega$) üzerinden (Lebesgue) integrali

$$\int_A f dm := \sup \left\{ \int_A g dm : 0 \leq g(w) \leq f(w) \text{ her } w \in \Omega \text{ için ve } g \text{ basit fonksiyon} \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Bu tanımları kullanarak Teorem 2.1 ölçülebilir fonksiyonlar için de belirtilebilir.

Teorem 2.3.

$f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $f, g \in \mathcal{L}$ ve her $w \in \Omega$ için $f(w), g(w) \geq 0$ olsun. $A, B \in \mathcal{F}$ olmak üzere

- (a) Her $w \in A$ için $f(w) \leq g(w)$ ise $\int_A f dm \leq \int_A g dm$;
- (b) $A \cap B = \emptyset$ ise $\int_{A \cup B} f dm = \int_A f dm + \int_B f dm$;
- (c) Her $a > 0$ için $\int_A a f dm = a \int_A f dm$.

İspat. Teorem 2.1 in ispatına benzer şekilde sup kullanılarak yapılabilir. ■

Yine Teorem 2.1 paralelinde aşağıdaki teoremdaki (a) ve (b) maddeleri önce basit fonksiyonlar için ispat edilip daha sonra ölçülebilir fonksiyonlara genişletilebilir.

Teorem 2.4.

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{L}$ ve her $w \in \Omega$ için $f(w) \geq 0$ olsun. $A, B \in \mathcal{F}$ olmak üzere

- (a) A bir sıfır küme ise $\int_A f dm = 0$;
- (b) $A \subseteq B$ ise $\int_A f dm \leq \int_B f dm$;
- (c) Her $a > 0$ için $m(\{w \in A : f(w) > a\}) \leq \frac{1}{a} \int_A f dm$.

İspat. (a) ve (b) ödev. (c) nin ispatını yapalım. Bunun için de $g := a \cdot \mathbb{1}_{\{w \in A : f(w) > a\}}$ fonksiyonu ile f fonksiyonunu karşılaştıralım. Herhangi bir w için $f(w) > a$ olması $g(w) = a$ olmasını gerektirir. Ayrıca $f(w) \leq a$ ise $g(w) = 0$ olur. Yani her durumda $f(w) \geq g(w) = a \cdot \mathbb{1}_{\{w \in A : f(w) > a\}}(w)$ elde edilir. g fonksiyonunun görüntü kümesi $\{0, a\}$ ve ayrıca $g^{-1}(a) = \{w \in A : f(w) > a\}$ dir. Buradan

$$a \cdot m\{w \in A : f(w) > a\} = \int_A a \cdot \mathbb{1}_{\{w \in A : f(w) > a\}} dm = \int_A g dm \leq \int_A f dm$$

bulunur. Bu da

$$m(\{w \in A : f(w) > a\}) \leq \frac{1}{a} \int_A f dm$$

demektir. ((c) maddesindeki bu eşitsizliğe Chebyshev eşitsizliği denir.) ■

Bir sonraki teoreme geçmeden önce aşağıdaki notu anlamak yararlı olacaktır.

Not !

Bir P özelliği hemen hemen her yerde sağlanır demek, P özelliğini sağlamayan elemanların oluşturduğu kümenin bir sıfır küme olması demektir. Örneğin; hemen hemen her yerde $f(w) = 0$ olması, $\{w : f(w) \neq 0\}$ kümesinin bir sıfır küme olması demektir.

Teorem 2.5.

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, her $w \in \Omega$ için $f(w) \geq 0$ ve $f \in \mathcal{L}$ olsun. O halde hemen hemen her yerde $f(w) = 0$ dır ancak ve ancak $\int_{\Omega} f dm = 0$ dır.

İspat. “ \Rightarrow ”: $f(w)$ hemen hemen her yerde $f(w) = 0$ koşulunu sağladığından $N = \{w : f(w) > 0\} \subseteq \Omega$ bir sıfır kümedir. $X = \Omega \setminus N$ olsun. Buradan

$$\int_{\Omega} f dm = \int_X f dm + \int_N f dm = 0 + 0 = 0$$

bulunur.

“ \Leftarrow ”: $A_i = \{w \in \Omega : f(w) > \frac{1}{i}\}$, $i = 1, 2, \dots$ olarak tanımlayalım. Teorem 2.4 (c)

maddesi (Chebyshev eşitsizliği) gereğince $0 \leq m(A_i) \leq i \int_{\Omega} f dm = 0$ elde edilir.

Bu da her $i = 1, 2, \dots$ için $m(A_i) = 0$ demektir. Buradan

$$m(\{w \in \Omega : f(w) > 0\}) = m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i) = 0$$

elde edilir. Yani $\{w \in \Omega : f(w) > 0\}$ kümesi bir sıfır kümedir, dolayısı ile hemen hemen her yerde $f(w) = 0$ dır. ■

2.1 Monoton Yakınsaklık Teoremi ve Fatou Lemma

Bu alt bölümde ölçülebilir fonksiyonların (Lebesgue) integralini hesaplamada bize yardımcı olacak olan monoton yakınsaklık teoremini (Teorem 2.6) ve Fatou Lemma (Teorem 2.8) yı işleyeceğiz.

Monoton yakınsaklık teoremi ile ölçülebilir fonksiyon dizileri için limit ve integral alma sıralarını hangi durumlarda değiştirebileceğimize yani kabaca hangi durumlarda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n dm = \int_A \lim_{n \rightarrow \infty} f_n dm$$

olduğuna bakacağız. Teoreme geçmeden önce aşağıdaki örneği inceleyelim.

Örnek 2.2. ($\lim \int = \int \lim$?)

$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $f_n(w) := \mathbb{1}_{[n, n+1]}(w)$ olarak tanımlansın. Her $w \in \mathbb{R}$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(w) = 0$ dir. Ayrıca her $n = 1, 2, \dots$ için $f_n(\mathbb{R}) = \{0, 1\}$ olduğundan

$\int_{\mathbb{R}} f_n dm = 1 \cdot m([n, n+1]) = 1$ dir. Bunları birleştirir isek

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n dm = \int_{\mathbb{R}} 0 dm = 0 < 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} m([n, n+1]) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n dm,$$

yani

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n dm < \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n dm$$

bulunur. Bu da bu örnek için limit ve integralin yer değiştiremeyeceğini gösterir.

Teorem 2.6.

$f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$ ölçülebilir fonksiyonlar dizisi olsun. Ayrıca her $w \in \Omega$ için $f_{n+1}(w) \geq f_n(w) \geq 0$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ olsun. O halde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n dm = \int_{\Omega} f dm$$

dir.

İspat. f_n fonksiyonlar dizisi mototon artan ve $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ olduğundan her $w \in \Omega$ için $f(w) \geq f_{n+1}(w) \geq f_n(w) \geq 0$ yazabiliriz. Buradan Teorem 2.3 (a) gereği her $n = 1, 2, \dots$ için

$$\int_{\Omega} f_n dm \leq \int_{\Omega} f_{n+1} dm \leq \int_{\Omega} f dm$$

dir. Buradan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n \leq \int_{\Omega} f dm \quad (1)$$

elde edilir. Şimdi yukarıdaki (1) eşitsizliğinin tersini gösterelim.

$$\int_{\Omega} f dm = \sup_{0 \leq g \leq f} \left\{ \int_{\Omega} g dm : g \text{ basit fonksiyon} \right\}$$

olduğundan $g(\Omega) = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ ve $g^{-1}(a_i) = A_i$ olan bir $0 \leq g \leq f$ fonksiyonu için $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n dm \geq \int_{\Omega} g dm = \sum_{i=1}^k a_i m(A_i)$ olduğunu göstermek yeterlidir. A_i kümeleri Ω nın bir parçalanışı yani $i \neq j$ için $A_i \cap A_j = \emptyset$ ve $\bigcup_{i=1}^k A_i = \Omega$ olduğundan Teorem 2.3 (b) gereği

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\bigcup_{i=1}^k A_i} f_n dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \int_{A_i} f_n dm$$

dir. Herhangi bir $w \in A_i$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(w) \geq f(w) \geq g(w) = a_i$ olduğundan ötürü sadece bir A_i kümesi için $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_i} f_n dm \geq \int_{A_i} g dm = a_i \cdot m(A_i)$ olduğunu göstermek yeterlidir.

Herhangi bir $\epsilon > 0$ için $B_n^i := \{w : f_n(w) \geq a_i - \epsilon, w \in A_i\}$ kümelerini tanımlayalım. Buradan her $n = 1, 2, \dots$ için $B_n^i \subseteq A_i$ ve $B_n^i \subseteq B_{n+1}^i$ olduğu görülebilir. Ayrıca $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n^i = A_i$ elde edilir. Şimdi de

$$g_n(w) := \begin{cases} a_i - \epsilon & , w \in B_n^i \\ 0 & , w \notin B_n^i \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Buradan $\int_{A_i} f_n dm \geq \int_{B_n^i} g_n dm = (a_i - \epsilon) \cdot m(B_n^i)$ elde ederiz. Bu da $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n^i = A_i$ eşitliği ile beraber

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_i} f_n dm \geq (a_i - \epsilon) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} m(B_n^i) = (a_i - \epsilon) \cdot m(A_i)$$

sonucunu elde etmemizi sağlar. Her $\epsilon > 0$ için bu eşitsizliğin sağlanması gerektiğinden $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_i} f_n dm \geq a_i \cdot m(A_i)$ eşitsizliğine ulaşırız ve bu da ispatı tamamlar. ■

Şimdi de monoton yakınsaklık teoreminin uygulanışını aşağıdaki örnekte görelim.

Örnek 2.3. (Monoton Yakınsaklık Teoremi Uygulama)

$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{n}{1+n\sqrt{x}} dx$ integralini hesaplayınız.

Öncelikle $f_n(x) = \frac{n}{1+n\sqrt{x}}$ olarak tanımlayalım. Her $x \in [0, 1]$ ve her $n = 1, 2, \dots$ için $f_{n+1}(x) \geq f_n(x) \geq 0$ olduğundan, yani f_n fonksiyonlar dizisinin artan ve pozitif tanımlı olduğundan monoton yakınsaklık teoremi gereği limit ve integral yer değiştirebilir. Doyalsı ile

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{n}{1+n\sqrt{x}} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx \\ &= \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1+n\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{n} + \sqrt{x}} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \Big|_0^1 = 2 \end{aligned}$$

elde edilir.

Monoton yakınsaklık teoremi limitin sonsuz olduğu durumlarda da geçerlidir.

Örnek 2.4. (Monoton Yakınsaklık Teoremi - Sonsuz Limit)

$f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $f_n(w) := \mathbb{1}_{[0, n]}(w)$ olarak tanımlansın. f_n fonksiyonların negatif olmayan ve azalmayan fonksiyonlar olduğu kolayca görülebilir. Her $w \geq 0$ için $w \leq k$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ sayısı olduğundan $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(w) = 1$ dir. Buradan

$$\int_{[0, \infty)} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n dm = \int_{[0, \infty)} 1 \cdot dm = 1 \cdot m([0, \infty)) = \infty$$

bulunur. Ayrıca sabit bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$\int_{[0, \infty)} f_n dm = 0 \cdot m((n, \infty)) + 1 \cdot m([0, n]) = n$$

olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0, \infty)} f_n dm = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$$

olur. Dolayısı ile

$$\int_{[0, \infty)} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0, \infty)} f_n dm$$

elde edilir.

Aşağıdaki teorem negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonların integralini terim

terim alabileceğimizi göstermektedir ve monoton yakınsaklık teoreminin bir sonucudur.

Teorem 2.7.

$f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$ ölçülebilir fonksiyonlar dizisi olsun. Ayrıca her $w \in \Omega$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $f_n(w) \geq 0$ olsun. O halde

$$\int_{\Omega} \sum_{n=1}^{\infty} f_n dm = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega} f_n dm$$

dir.

İspat.

Öncelikle $s_n := f_1 + f_2 + \dots + f_n = \sum_{i=1}^n f_i$ ve

$$f := \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \sum_{i=1}^{\infty} f_i$$

olsun. f_n fonksiyonları negatif olmayan olduklarından s_n fonksiyonları da negatif olmayan ve azalmayan fonksiyonlardır (yani $s_{n+1} \geq s_n \geq 0$). Teorem 2.6 (monoton yakınsaklık teoremi) s_n fonksiyonlarına uygulanırsa

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{\infty} f_i dm &= \int_{\Omega} f dm = \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} s_n dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} s_n dm \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} f_i dm \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\Omega} f_i dm \end{aligned}$$

elde edilir. ■

Teorem 2.6 kullanılarak aşağıdaki teorem (Fatou Lemma) da gösterilebilir.

Teorem 2.8.

$f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$ negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonlar olsun. O halde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf \int_{\Omega} f_n dm \geq \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} \inf f_n dm$$

dir.

İspat.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf f_n(w) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{k \geq n} f_k(w) \right)$ olduğundan $g_n(w) := \inf_{k \geq n} f_k(w)$ olarak

tanımlarsak. $g_{n+1}(w) \geq g_n(w)$ ve $f_n(w) \geq g_n(w)$ olur. Buradan

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n dm &= \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{k \geq n} f_k \right) dm = \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow \infty} g_n dm \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_n dm \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n dm \end{aligned}$$

elde edilir; buradak, üçüncü eşitlik Teorem 2.6 gereği ve en sondaki eşitsizlik de $f_n(w) \geq g_n(w)$ gereğidir. ■

3 İntegrallenebilen Fonksiyonlar

Tanım. Bir $f \in \mathcal{L}$ fonksiyonunun işaret fonksiyonları f^+ ve f^-

$$f^+(w) := \begin{cases} f(w) & , f(w) \geq 0 \\ 0 & , f(w) < 0 \end{cases}$$

ve

$$f^-(w) := \begin{cases} -f(w) & , f(w) < 0 \\ 0 & , f(w) \geq 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Not !

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{L}$ fonksiyonu ve her $w \in \Omega$ için $f^+(w), f^-(w) \geq 0$ dır. Ayrıca $f(w) = f^+(w) - f^-(w)$ eşitliği sağlanır.

Şimdiye kadar integrali önce negatif olmayan basit fonksiyonlar daha sonra ise negatif olmayan ölçülebilir fonksiyonlar için tanımladık. Şimdi herhangi bir ölçülebilir fonksiyon için integral tanımını verebiliriz.

Tanım. $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f \in \mathcal{L}$ olmak üzere Eğer $\int_{\Omega} f^+ dm < \infty$ ve $\int_{\Omega} f^- dm < \infty$ ise f fonksiyonu Ω üzerinde *integrallenebilir* denir ve f nin integrali

$$\int_{\Omega} f dm := \int_{\Omega} f^+ dm - \int_{\Omega} f^- dm$$

şeklinde tanımlanır.

Ω dan \mathbb{R} kümesine tanımlanan integrallenebilen tüm fonksiyonların kümesini \mathcal{L}^1 ile göstereceğiz. Yani

$$\mathcal{L}^1 := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ integrallenebilir}\}$$

dir.

Not !

Bir f fonksiyonu için $|f| = f^+ + f^-$ yazılabilir. Ayrıca $|f|^+ = |f|$ ve $|f|^- = 0$ olduğu görülebilir.

Teorem 3.1.

$f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. O halde $f \in \mathcal{L}^1$ ancak ve ancak $|f| \in \mathcal{L}^1$.
Ayrıca

$$\left| \int_{\Omega} f dm \right| \leq \int_{\Omega} |f| dm$$

dir.

İspat. “ \Rightarrow ”: $f \in \mathcal{L}^1$ olsun. $|f| = f^+ + f^-$ ve $f^+, f^- \geq 0$ olduğundan Teorem 2.7 gereğince

$$\int_{\Omega} |f| dm = \int_{\Omega} f^+ dm + \int_{\Omega} f^- dm < \infty$$

bulunur bu da $|f| \in \mathcal{L}^1$ demektir.

“ \Leftarrow ”: $|f| \in \mathcal{L}^1$ olsun. $0 \leq f^+ \leq |f|$ ve $0 \leq f^- \leq |f|$ olduğundan Teorem 2.3 (a) gereğince

$$\int_{\Omega} f^+ dm \leq \int_{\Omega} |f| dm < \infty \quad \text{ve} \quad \int_{\Omega} f^- dm \leq \int_{\Omega} |f| dm < \infty$$

dir bu da $f \in \mathcal{L}^1$ demektir.

Teoremin ifadesinde geçen eşitsizlik ise

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} f dm \right| &= \left| \int_{\Omega} f^+ dm - \int_{\Omega} f^- dm \right| \leq \left| \int_{\Omega} f^+ dm \right| + \left| \int_{\Omega} f^- dm \right| \\ &= \int_{\Omega} f^+ dm + \int_{\Omega} f^- dm \\ &= \int_{\Omega} |f| dm \end{aligned}$$

şeklinde elde edilebilir (buradaki son eşitlik yukarıda olduğu gibi Teorem 2.7 gereğince).

Teorem 3.2.

$f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere $f, g \in \mathcal{L}^1$ ve $a \in \mathbb{R}$ olsun.

(a) $\int_{\Omega} a f dm = a \int_{\Omega} f dm,$

(b) $\int_{\Omega} (f + g) dm = \int_{\Omega} f dm + \int_{\Omega} g dm,$

(c) Her $w \in \Omega$ için $f(w) \leq g(w)$ ise $\int_{\Omega} f dm \leq \int_{\Omega} g dm,$

(d) $m(\Omega) = 0$ ise $\int_{\Omega} f dm = 0,$

(e) Hemen hemen her yerde $f(w) = g(w)$ ise $\int_{\Omega} f dm = \int_{\Omega} g dm.$

İspat. (a): Eğer $a \geq 0$ ise $(af)^+ = af^+ \geq 0$ ve $(af)^- = af^- \geq 0$ dir. Dolayısı ile Teorem 2.3 (c) maddesi gereği

$$\int_{\Omega} (af)^+ dm = \int_{\Omega} af^+ dm = a \int_{\Omega} f^+ dm$$

ve

$$\int_{\Omega} (af)^- dm = \int_{\Omega} af^- dm = a \int_{\Omega} f^- dm$$

bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} af dm &= \int_{\Omega} (af)^+ dm - \int_{\Omega} (af)^- dm = a \int_{\Omega} f^+ dm - a \int_{\Omega} f^- dm \\ &= a \left(\int_{\Omega} f^+ dm - \int_{\Omega} f^- dm \right) \\ &= a \int_{\Omega} f dm \end{aligned}$$

elde edilir. Eğer $a < 0$ ise $(af)^+ = (-a)f^- \geq 0$ ve $(af)^- = (-a)f^+ \geq 0$ dir. Devamı yukarıdaki şekilde yapılabilir (ödev).

(b): $h(w) := f(w) + g(w)$ olarak tanımlayalım. Teorem 1.4 (b) maddesi gereğince h ölçülebilirdir. $|h| = |f + g| \leq |f| + |g|$ olduğundan ve Teorem 3.1 gereğince $|f|, |g| \in \mathcal{L}^1$ olduğundan

$$\int_{\Omega} |h| dm \leq \int_{\Omega} |f| dm + \int_{\Omega} |g| dm < \infty$$

elde edilir bu da $|h| \in \mathcal{L}^1$ demektir. Teorem 3.1 gereğince $h \in \mathcal{L}^1$ dir. Ayrıca

$$h^+ - h^- = h = f + g = f^+ - f^- + g^+ - g^-$$

eşitliğinden

$$h^+ + f^- + g^- = h^- + f^+ + g^+$$

elde edilebilir. Eşitliğin her iki tarafı da negatif olmayan fonksiyonlar olduğu için terim terim integral alınarak

$$\int_{\Omega} h^+ dm + \int_{\Omega} f^- dm + \int_{\Omega} g^- dm = \int_{\Omega} h^- dm + \int_{\Omega} f^+ dm + \int_{\Omega} g^+ dm$$

eşitliğine sağlanır. Buradan da

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (f + g) dm &= \int_{\Omega} h dm = \int_{\Omega} h^+ dm - \int_{\Omega} h^- dm \\ &= \int_{\Omega} f^+ dm - \int_{\Omega} f^- dm + \int_{\Omega} g^+ dm - \int_{\Omega} g^- dm \\ &= \int_{\Omega} f dm + \int_{\Omega} g dm \end{aligned}$$

elde edilir.

(c): $f \in \mathcal{L}^1$ olduğundan teoremin ispatını yaptığımız (a) maddesi gereğince ($a = -1$ alarak) $-f \in \mathcal{L}^1$ olduğunu daha sonra da (b) maddesini kullanarak $g - f \in \mathcal{L}^1$ olduğunu elde edebilir. Ayrıca $f(w) \leq g(w)$ olduğundan $g(w) - f(w) \geq 0$ elde edilir. Bu da $\int_{\Omega} (g - f) dm \geq 0$ demektir. Bunlar kullanılarak

$$\int_{\Omega} g dm = \int_{\Omega} (f + g - f) dm = \int_{\Omega} f dm + \int_{\Omega} (g - f) dm \geq \int_{\Omega} f dm$$

sonucuna ulaşılır.

(d): $f^+, f^- \geq 0$ olduğundan ve Ω bir sıfır küme olduğundan Teorem 2.4 (a) gereğince ($A = \Omega$ alınarak) $\int_{\Omega} f^+ dm = 0$ ve $\int_{\Omega} f^- dm = 0$ elde edilebilir. Buradan da

$$\int_{\Omega} f dm = \int_{\Omega} f^+ dm - \int_{\Omega} f^- dm = 0 + 0 = 0$$

bulunur.

(e): $h(w) := f(w) - g(w)$ olarak tanımlayalım. $h = h^+ - h^-$ fonksiyonu için hemen hemen her yerde $f = g$ olduğundan hemen hemen her yerde $h^+ = 0$ ve hemen hemen her yerde $h^- = 0$ elde edilir. Teoremin (a) ve (b) maddesi gereğince $h \in \mathcal{L}^1$ dir. Ayrıca $h \in \mathcal{L}^1 \subseteq \mathcal{L}$ ve $h^+, h^- \geq 0$ olduğundan Teorem 2.5 kullanılarak $\int_{\Omega} h^+ dm = 0$ ve $\int_{\Omega} h^- dm = 0$ bulunur. Bu da bize

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f dm - \int_{\Omega} g dm &= \int_{\Omega} (f - g) dm = \int_{\Omega} h dm \\ &= \int_{\Omega} h^+ dm - \int_{\Omega} h^- dm \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğunu yani $\int_{\Omega} f dm = \int_{\Omega} g dm$ eşitliğini verir. ■

3.1 Baskın Yakınsaklık Teoremi

Daha önce Monoton Yakınsaklık Teoremi (Teorem 2.6) ile negatif olmayan ve monoton azalmayan ölçülebilir fonksiyonlar dizisi için integral ve limit alma sırasını değiştirebileceğimizi göstermiştik. Şimdi ise aşağıdaki Baskın Yakınsaklık Teoremi (Teorem 3.3) ile monotonluk ve negatif olmama şartına bağlı kalmadan hangi durumlarda limit ile integrali yer değiştirebileceğimizi inceleyeceğiz.

Teorem 3.3.

$f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$, fonksiyonları hemen hemen her yerde $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(w) = f(w)$ olacak şekilde ölçülebilir fonksiyonlar dizisi olsun. Eğer her $n = 1, 2, \dots$ için hemen hemen her yerde $|f_n| \leq g$ olacak şekilde bir $g \in \mathcal{L}^1$ fonksiyonu varsa

$$\int_{\Omega} f dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n dm$$

dir.

İspat.

$$N := \{w \in \Omega : \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(w) \neq f(w)\} \cup \{w \in \Omega : \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(w) \neq f(w)\} \\ \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{w \in \Omega : f_n(w) > g(w)\}$$

olarak tanımlayalım. Hemen hemen her yerde $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(w) = f(w)$ olduğundan ve $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(w) = f(w)$ olması demek $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(w) = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(w) = f(w)$ demek olduğundan ve ayrıca hemen hemen her yerde $|f_n| \leq g$ olduğundan N kümesi bir sıfır kümedir, yani $m(N) = 0$ dır. Ayrıca her $w \in \Omega \setminus N$ için

$$|f(w)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n(w)| \leq g(w)$$

olur. Dolayısı ile $|f(w)| \geq 0$, her $w \in \Omega \setminus N$ için $g(w) \geq |f(w)| \geq 0$ ve $g \in \mathcal{L}^1$ olduğundan Teorem 2.3 (b) ve Teorem 2.4 (a) gereği

$$\int_{\Omega} |f| dm = \int_{\Omega \setminus N} |f| dm + \int_N |f| dm = \int_{\Omega \setminus N} |f| dm \leq \int_{\Omega \setminus N} g dm \leq \int_{\Omega} g dm < \infty$$

olur; bu da $|f| \in \mathcal{L}^1$ demektir. Teorem 3.1 kullanılarak da $f \in \mathcal{L}^1$ olduğu görülebilir. Benzer şekilde her $n = 1, 2, \dots$ için $f_n \in \mathcal{L}^1$ olduğu da gösterilebilir.

$$g_n(w) := \begin{cases} |f_n(w) - f(w)| & , w \in \Omega \setminus N \\ 0 & , w \in N \end{cases}$$

ve $h := |f| + g$ olarak tanımlayalım. $|f|, g \in \mathcal{L}^1$ olduğundan, Teorem 3.2 (b) gereği $h \in \mathcal{L}^1$ olup her $w \in \Omega \setminus N$ için

$$\begin{aligned} h(w) - g_n(w) &= |f(w)| + g(w) - |f_n(w) - f(w)| \\ &\geq |f(w)| + g(w) - (|f_n(w)| + |f(w)|) \\ &= g(w) - |f_n(w)| \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

olur. Her $w \in \Omega$ için $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(w) = 0$ olduğunu kullanarak ($\lim = \limsup = \liminf$ olduğundan) $\liminf_{n \rightarrow \infty} g_n(w) = \limsup_{n \rightarrow \infty} g_n(w) = 0$ elde ederiz. Fatou Lemma (Teo-

rem 2.8) kullanılarak

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} h dm &= \int_{\Omega} \liminf_{n \rightarrow \infty} (h - g_n) dm \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (h - g_n) dm \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} h dm - \int_{\Omega} g_n dm \right) \\ &= \int_{\Omega} h dm - \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_n dm\end{aligned}$$

yani

$$\int_{\Omega} h dm \leq \int_{\Omega} h dm - \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_n dm$$

elde edilir. $h \in \mathcal{L}^1$ olduğundan yani $\int_{\Omega} h dm < \infty$ olduğundan

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_n dm \leq 0$$

olmalıdır. Bunu $g_n \geq 0$ olması ile birleştirirsek

$$0 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_n dm \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_n dm \leq 0$$

bulunur. Bu da

$$0 = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_n dm = \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_n dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_n dm$$

demektir. Buradan

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_n dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |f_n - f| dm$$

elde edilir. Dolayısı ile Teorem 3.2 (a) ile (b) ve Teorem 3.1 gereğince

$$\left| \int_{\Omega} f_n dm - \int_{\Omega} f dm \right| = \left| \int_{\Omega} (f_n - f) dm \right| \leq \int_{\Omega} |f_n - f| dm \rightarrow 0$$

bulunur, bu da

$$\int_{\Omega} f dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n dm$$

demektir. ■

Örnek 3.1. (Baskın Yakınsaklık Teoremi)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 n x^{-\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{x}{n}\right) dx$$

sonucu kaçtır?

Öncelikle f_n fonksiyonlarını tanımlamamız gerekmektedir.

$$f_n(x) := nx^{-\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{n}{x} \sin\left(\frac{x}{n}\right) x^{-\frac{1}{2}}$$

olarak tanımlayalım. Her $0 \leq x \leq 1$ ve $n = 1, 2, \dots$, için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{x} \sin\left(\frac{x}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n/n}{x/n} \sin\left(\frac{x}{n}\right) = 1$$

olduğundan ($\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ olduğunu kullandık.) her $0 \leq x \leq 1$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = x^{-\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Ayrıca $t \geq 0$ için $|\sin t| \leq t$ olduğundan

$$\left| \frac{n}{x} \sin\left(\frac{x}{n}\right) \right| \leq \left| \frac{n}{x} \frac{x}{n} \right| = 1$$

olur ve dolayısı ile

$$|f_n(x)| = \left| \frac{n}{x} \sin\left(\frac{x}{n}\right) x^{-\frac{1}{2}} \right| \leq x^{-\frac{1}{2}}$$

bulunur. $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ şeklinde tanımlanan fonksiyonu f_n fonksiyonlarını baskılayan fonksiyon olarak kullanabiliriz. Bunun için sadece g nin integrallenebilir olduğunu göstermek kaldı. Bu da

$$\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = 2x^{\frac{1}{2}} \Big|_0^1 = 2 < \infty$$

şeklinde gösterilebilir. Dolayısı ile Teorem 3.3 (Baskın Yakınsaklık Teoremi) kullanılarak

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 nx^{-\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{x}{n}\right) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx \\ &= \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx \\ &= \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= 2 \end{aligned}$$

bulunur.

