

# 1 Güvercin Kafesi İlkesi

Bu bölümün temeli aşağıdaki soru ve onun muhtemel cevabına dayanıyor.

**Soru.** Sekiz adet güvercini ve yedi adet kafesi olan bir kişi güvercinleri kafeslere yerleştiriyor. Bu işlem hakkında ne söyleyebilirsiniz?

Bu soruya verilebilecek en mantıklı cevap “Kafeslerden birine en az iki güvercin yerleştirilmiştir” olmalıdır ve bir ispata da ihtiyaç duyulmamaktadır (zaten gayet açık). Buna genel olarak “güvercin kafesi ilkesi” diyoruz. Aslında bu ilke çok basit gibi görünse de kimi zaman çok zor problemlerin çözümünde kilit rol oynamaktadır. Şimdi bu ilkeyi kullanarak ne tür problemlerin çözebiliriz inceleyelim.

## Örnek 1.1. (Doğum Günü)

367 kişiden oluşan bir grupta en az iki kişinin doğum günü aynı olduğunu gösteriniz.

Toplamda bir yılda 366 gün vardır (29 Şubat dahil). 367 kişiyi bu 366 güne nasıl dağıtırsak dağıtalım bir güne en az iki kişi denk gelmesi gerekmektedir.

## Not !

Güvercin kafesi ilkesini daha genel olarak şu şekilde ifade edebiliriz.  
 $k, m, n \in \mathbb{N}$  ve  $n > km$  olmak üzere  $n$  sayıda nesne  $m$  farklı kutuya yerleştirilirse kutulardan en az birinde en az  $k + 1$  nesne bulunur.

## Örnek 1.2. (Alt Küme Toplamı)

$S = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$  kümesinin altı elemanlı her alt kümesinin toplamları 10 eden iki sayı içerdiğini gösteriniz.

$S$  kümesini  $S = \{1, 9\} \cup \{2, 8\} \cup \{3, 7\} \cup \{4, 6\} \cup \{5\}$  şeklinde beş farklı kümenin birleşimi şeklinde yazabiliriz.  $S$ 'nin altı elemanlı bir alt kümesi yukarıda yazılan iki elemanlı kümelerden birini kapsamak zorundadır, dolayısı ile toplamı 10 eden iki sayı içermek zorundadır.

## Örnek 1.3. (Arkadaş Sayıları)

20 kişilik bir grupta en az iki kişinin bu grupta sahip olduğu arkadaş sayısının eşit olduğunu gösteriniz.

Gruptan herhangi bir kişiyi düşünürsek bu kişinin  $0, 1, 2, \dots, 19$  tane arkadaşı olabilir (20. kişi kendisi). Eğer bu kişinin arkadaş sayısı 0 ise gruptan kimsenin arkadaş sayısı 19 olamaz, ya da bu kişinin arkadaş sayısı 19 ise gruptan kimsenin arkadaş sayısı 0 olamaz. Dolayısı ile 20 farklı kişi en fazla 19 farklı arkadaş sayısına sahip olabilir. Bu da en az iki kişinin arkadaş sayısının aynı olmak zorunda olduğunu belirtir.

#### Örnek 1.4. (Aralarında Asal Elemanlar)

$S = \{1, 2, 3, \dots, 2n\}$  kümesinden  $n + 1$  eleman seçilsin. Seçilen elemanlar içinde kesinlikle aralarında asal olan iki sayı olduğunu gösteriniz.

Ardışık sayıların aralarında asal olduklarını kullanacağız.

$$S = \{1, 2\} \cup \{3, 4\} \cup \dots \cup \{2n - 1, 2n\}$$

yazarsak  $S$  kümesini  $n$  kümenin birleşimi şeklinde yazmış oluruz. Bu  $n$  kümeden toplamda  $n + 1$  eleman seçmek istiyoruz. Dolayısı ile en az bir kümeden iki elemanı birden seçmek zorundayız. Bu iki eleman ardışık olduğu için aralarında asaldır, bu da istediğimiz sonucu verir.

#### Örnek 1.5. (Birbirlerini Bölen Elemanlar)

$S = \{1, 2, 3, \dots, 2n\}$  kümesinden  $n + 1$  eleman seçilsin. Seçilen elemanlar içinde birbirlerinin katı olan (biri diğerini bölen) en az iki sayı olduğunu gösteriniz.

Seçilen her elemanı  $2^k \cdot m$  ( $m$  tek sayı) olacak şekilde yazabiliriz.  $S$  kümesinde  $n$  tane tek sayı olduğundan seçilen  $n + 1$  elemandan en az ikisinde  $m$  çarpanı olmak zorundadır. Yani bu sayılardan biri  $a = 2^k \cdot m$  diğeri  $b = 2^t \cdot m$  olmalıdır.  $k < t$  ise  $a|b$ ,  $k > t$  ise  $b|a$  dır.

## 2 Temel Sayma Problemleri

Bu bölümde, çözüm yollarını sonraki bölümlerde vereceğimiz bazı temel sayma problemlerine değineceğiz.

### 2.1 Küme Permütasyonları

Küme permütasyon problemlerinde belirli bir sayıda elemanı yan yana sıralı bir şekilde yerleştirme yapılır.

**Problem.**  $n$  sayıda nesneyi her birini bir kez kullanmak koşulu ile yan yana kaç farklı şekilde yerleştirebiliriz?

**Örnek.** 5 kişi yan yana kaç farklı şekilde oturabilir?

### 2.2 Çoklu Küme Permütasyonları

Eğer bir kümede elemanların birden fazla kez bulunmasına izin veriliyor ise bu tür kümeye *çoklu küme* denir. Örneğin  $\{a, a, a, b, c\}$  çoklu bir kümedir.

**Problem.**  $k$  tane farklı tür içeren  $n$  sayıda nesne içerdiği  $k$  farklı türün eleman sayıları  $a_1, a_2, \dots, a_k$  olmak üzere kaç farklı şekilde yan yana sıralanabilir?

**Örnek.** ABACCA kelimesinin harfleri kullanılarak anlamlı/anlamsız kaç farklı kelime yazılabilir?

### 2.3 Karakter Tekrarlı Yazılar

Karakter tekrarlı yazı problemlerinde belirli sayıda karakter içeren bir alfabenin karakterlerini kullanarak (karakter tekrarına ve bazı karakterlerin kullanılmamasına izin verilerek) yan yana yerleştirme yapılır.

**Problem.**  $n$  farklı karakterden  $k$  karakter sayılı kaç kelime elde edilebilir?

**Örnek.**  $\{0, 1\}$  kümesindeki elemanlar kullanılarak altı karakterli kaç kelime yazılabilir?

### 2.4 Sonlu İki Küme Arasındaki Fonksiyonlar

$|A| = k$ ,  $|B| = n$  ve  $f : A \rightarrow B$  olsun. Bu şekildeki fonksiyonların sayısı ile ilgili şunları sorabiliriz.

**Örnek.** Bu şekilde yazılan kaç farklı  $f$  fonksiyonu vardır?

**Örnek.** Bu şekilde yazılan kaç farklı birebir  $f$  fonksiyonu vardır?

**Örnek.** Bu şekilde yazılan kaç farklı örten  $f$  fonksiyonu vardır?

**Örnek.** Bu şekilde yazılan kaç farklı birebir ve örten  $f$  fonksiyonu vardır?

### 2.5 Bazı Diophantine (Diyofantus) Denklemlerinin Çözümleri Sayısı

Katsayıları, sabit terimi ve aranan çözümleri tamsayı olan polinom denklemlerine *diophantine denklemi* denir. Örneğin;  $x^2 + y^2 = z^2$ ,  $2x + 3y + z^2 = 10$ .

**Örnek.**  $x + y + z = 4$  denkleminin negatif olmayan tamsayı çözümleri kaç tanedir?

**Örnek.**  $x + y + z = 11$  denkleminin pozitif tamsayı çözümleri kaç tanedir?

### 3 Permütasyon ve Kombinasyon

#### 3.1 Küme Permütasyonları

$S$  kümesi  $n$  elemanlı bir küme ve  $r \in \mathbb{N}$  olsun.  $S$  kümesinin bir  $r$ -permütasyonu  $S$  kümesinin  $n$  elemanından  $r$  tanesinin sıralanması demektir.

##### Örnek 3.1. (Üç Elemanlı Küme)

$S = \{a, b, c\}$  kümesinin 1-, 2-, 3-permütasyonlarını bulunuz.

$S$  nin 1-permütasyonları

$a \quad b \quad c$

$S$  nin 2-permütasyonları

$ab \quad ba \quad ac \quad ca \quad bc \quad cb$

$S$  nin 3-permütasyonları

$abc \quad acb \quad bac \quad bca \quad cab \quad cba$

şeklindedir.

$S$  kümesinin 4-permütasyonu ise dörtten az eleman içerdiği için yoktur.  $n$  elemanlı bir kümenin  $r$ -permütasyonlarının sayısını  $P(n, r)$  ile göstereceğiz.

##### Not !

$n, r \in \mathbb{N}$  ve  $r > n$  için  $P(n, r) = 0$ . Ayrıca  $P(n, 1) = n$  dir.

##### Teorem 3.1.

$n, r \in \mathbb{N}$  ve  $n \geq r$  olmak üzere

$$P(n, r) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-r+1)$$

dir.

**İspat.**  $n$  elemanlı bir kümenin bir  $r$ -permütasyonu oluştururken ilk sıraya yazılacak eleman için  $n$  farklı seçenek, ikinci sıraya yazılacak eleman için  $n-1$  farklı seçenek, ...,  $r$  inci sıraya yazılacak eleman için  $n-r+1$  farklı seçenek vardır. Dolayısı ile  $n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$  farklı  $r$ -permütasyonu bulunur. ■

**Tanım.** Negatif olmayan bir  $n$  tamsayısı için  $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (1)$  sayısına  $n$  faktöriyel denir ve bu sayı  $n!$  ile gösterilir. ( $0! = 1$  kabul edilir.)

##### Not !

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

### Örnek 3.2. (Tekrarsız Kelime)

$a, b, c, d, e$  harfleri ile her harf en fazla bir kez kullanılacak şekilde anlamlı/anlamsız kaç farklı dört hflü kelime yazılabilir.

Yazılabilecek kelimelerin sayısı beş elemanlı bir kümenin 4-permütasyonları sayısı kadardır, yani  $P(5, 4) = \frac{5!}{(5-4)!} = 120$  farklı kelime yazılabilir.

### Örnek 3.3. (Ekstra Seçenek)

Yan yana sıralanmış on altı kutuya  $1, 2, \dots, 15$  sayıları asılacaktır (kutulardan biri numarasız kalacak). Kaç farklı şekilde bu işlem yapılabilir.

16 kutunun permütasyonlarını alıp bu permütasyonda ilk 15 kutu için sırasına karşılık gelen sayıyı üzerine asabiliriz. Dolayısı ile  $P(16, 15) = 16!$  farklı şekilde bu işlem yapılabilir?

### Örnek 3.4. (Yasaklı Permütasyonlar)

Alfabadeki 29 harfi sesli harfler ardışık olmayacak şekilde kaç farklı biçimde sıralayabiliriz?

29 harfin 8 tanesi sesli 21 tanesi sessiz harftir. Sessiz harfler için bir kısıt olmadığından onları rastgele sıralayabiliriz. Sadece sessiz harfler kendi aralarında  $P(21, 21) = 21!$  farklı şekilde sıralanır. Sesli harflerin ardışık olması istenmediğinden sessiz harfler kendi aralarında sıralandıktan sonra sesli harfler için 22 farklı yer kalır. Bu işlemi de  $P(22, 8) = \frac{22!}{14!}$  farklı şekilde yapabiliriz. Dolayısı ile alfabenin tamamını istenen koşullar altında

$$P(21, 21) \cdot P(22, 8) = 21! \frac{22!}{14!}$$

farklı şekilde sıralayabiliriz.

Buraya kadar incelediğimiz permütasyonlara *lineer permütasyon* diyoruz. Buradaki lineerden kasıt nesnelere (elemanları) sıralarken bu işlemi bir doğru üzerinde yapıyormuşuz gibi bir durum olmasıdır. Bir diğer permütasyon çeşidi ise *dairesel permütasyondur*. Bu permütasyonda nesnelere doğru boyunca değil de bir çember üzerinde sıralıyoruz.

### Teorem 3.2.

$n$  elemanlı bir kümenin dairesel  $r$ -permütasyonlarının sayısı

$$\frac{P(n, r)}{r} = \frac{n!}{r \cdot (n-1)!}$$

dir. Özel olarak  $r = n$  için bu sayı  $(n-1)!$  dir.

**İspat.**  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  bir küme ve  $r \leq n$  olmak üzere  $a_1 a_2 \dots a_r$   $A$  kümesindeki  $a_i$ ,  $1 \leq i \leq r$  elemanlarının bir permütasyonu olsun. Bu şekilde sırayı bozmadan bu elemanları bir çember etrafında sıralarsak bu yapılan sıralama aynı zamanda  $a_2 a_3 \dots a_r a_1, a_3 a_4 \dots a_r a_1 a_2, \dots, a_r a_1 a_2 \dots a_{r-1}$  permütasyonlarının çember etrafında sıralanması ile aynı duruma karşılık gelecektir. Yani bir dairesel permütasyona  $r$ -farklı lineer permütasyon karşılık gelmektedir. Dolayısı ile  $\frac{P(n,r)}{r} = \frac{n!}{r \cdot (n-r)!}$  sayısı  $A$  kümesinin dairesel  $r$ -permütasyonların sayısını belirtmektedir. ■

### Örnek 3.5. (Yuvarlak Masa)

Ali ve Mehmet'in de içinde bulunduğu 10 kişi yuvarlak bir masa etrafına oturacaklardır. Yapılacak kaç farklı oturma düzeninde Ali ile Mehmet yan yana bulunmaz?

Tüm permütasyonların sayısından Ali ile Mehmet'in yan yana bulunduğu permütasyonların sayısını çıkararak ilgili sonuca ulaşacağız. Ali ile Mehmet'i bir kişi olarak düşünürsek 9 kişiyi dairesel sıralayacağız. Bu da  $8!$  farklı yolla yapılabilir. Ali ve Mehmet'in kendi aralarında yer değiştirme durumunu da hesaba katarsak Ali ve Mehmet yan yana olmak üzere bu 10 kişi  $2 \cdot 8!$  farklı şekilde oturabilirler. Bizden istenen Ali ve Mehmet'in yan yana olmadığı durumlar olduğu için bu 10 kişinin tüm dairesel permütasyonlardan Ali ile Mehmet'in yan yana olduğu dairesel permütasyonları çıkararak ilgili sonuç  $9! - 2 \cdot 8! = 9 \cdot 8! - 2 \cdot 8! = 7 \cdot 8!$  bulunur.

### Örnek 3.6. (Boncuklar ve Kolye)

Herbiri farklı renkte olan 15 adet boncuk kullanılarak kolye yapılmak isteniyor. Kaç farklı kolye yapılabilir?

15 adet boncuğun dairesel 15-permütasyonların sayısı  $14!$  dir. Ancak aynı kolye ters çevrilip de takılabileceğinden her kolye iki farklı permütasyona karşılık gelmektedir. Dolayısı ile  $\frac{14!}{2}$  farklı kolye yapılabilir.

## 3.2 Küme Kombinasyonları (Alt Kümeleri)

$S$ ,  $n$  elemanlı bir küme olmak üzere  $S$  nin bir  $r$ -kombinasyonu  $S$  den sırası önemsiz olacak şekilde  $r$  eleman seçmek demektir. Bu yapılan işlem bir  $r$  elemanlı alt kümeye karşılık geldiğinden kombinasyon ile alt küme terimleri birbirleri yerine kullanılabilirler.  $n$  elemanlı bir kümenin  $r$ -kombinasyonlarının sayısını yani  $r$  elemanlı alt kümelerinin sayısını  $\binom{n}{r}$  sembolü ile göstereceğiz.

### Teorem 3.3.

$0 \leq r \leq n$  olmak üzere

$$P(n, r) = r! \binom{n}{r}$$

dolayısı ile de

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$$

dir.

**İspat.**  $S$  kümesi  $n$  elemanlı bir küme olsun.  $S$  nin bir  $r$ -permütasyonu şu yol izlenerek elde edilebilir.

(i)  $S$  den  $r$  eleman seç,

(ii) Seçilen  $r$  elemanı sırala.

(i) adımını  $\binom{n}{r}$  farklı yol ile yapabiliriz. (ii) adımını ise  $P(r, r) = r!$  farklı yolla yapabiliriz. Yani  $P(n, r) = r! \binom{n}{r}$ , buradan da  $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$  olduğu kullanılarak  $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$  elde edilir. ■

### Not !

Teorem 3.3 ifadesinde  $r$  yerine  $n - r$  yazarak

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

eşitliğini elde ederiz.

### Örnek 3.7. (Üçgen Oluşturma)

Düzlemde 10 adet nokta herhangi üçü doğrusal olmayacak şekilde işaretleniyor. Bu noktalar kullanılarak kaç farklı üçgen oluşturulabilir?

Seçilen herhangi üç köşe ilgili üçgenin köşesi olabilir, dolayısı ile  $\binom{10}{3} = \frac{10!}{7!3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{6} = 120$  farklı üçgen oluşturulabilir.

### Örnek 3.8. (Sesli Harfler ve Kelime)

Alfabadeki harfler kullanılarak 1 ya da 2 sesli harf içeren anlamlı anlamsız kaç farklı 5 harfli kelime oluşturulabilir?

Öncelikle kullanılan harflerin birden fazla kullanılabileceğine dikkat etmemiz gerekiyor. Soruda bunun olamayacağına dair bir kısıt belirtilmemiş. Bir tane sesli harfin bulunacağı yeri  $\binom{5}{1}$  şekilde seçebiliriz. Dolayısı ile alfabede 8 sesli 21 sessiz harf olduğundan 1 harfi sesli olan  $\binom{5}{1} \cdot 8 \cdot 21^4$  farklı kelime yazılabilir.

Benzer şekilde iki sesli harfin bulunacağı yeri  $\binom{5}{2}$  farklı şekilde seçebiliriz ve dolayısı ile 2 sesli harfi olan  $\binom{5}{2} \cdot 8^2 \cdot 21^3$  farklı kelime yazılabilir. Buradan da istenen tüm kelimelerinin sayısının

$$\binom{5}{1} \cdot 8 \cdot 21^4 + \binom{5}{2} \cdot 8^2 \cdot 21^3$$

olduğu bulunur.

#### Teorem 3.4.

$n, k \in \mathbb{N}$  ve  $1 \leq k \leq n-1$  olmak üzere

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

dir.

**İspat.**  $|A| = n$  ve  $x \in A$  olsun. Teoremin ifadesindeki eşitliğin sol tarafı  $A$  nın  $k$  elemanlı alt kümelerinin sayısını belirtmektedir, sağ taraftaki ilk terim  $A$  nın  $x$  i içermeyen  $k$  elemanlı alt kümelerinin sayısını belirtmektedir, sağ taraftaki ikinci terim ise  $A$  nın  $x$  i içeren ( $x$  zaten seçilmiş kalan  $n-1$  elemandan  $k-1$  ini seçerek) alt kümelerinin sayısını belirtmektedir. İlgili eşitlik bu bilgilerden görülebilir. ■

#### Teorem 3.5.

$n \geq 0$  bir tamsayı olmak üzere

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

dir.

**İspat.**  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  olsun. İfadedeki eşitliğin sol tarafında geçen  $\binom{n}{k}$ ,  $0 \leq k \leq n$ , değer  $A$  nın  $k$  elemanlı alt kümelerinin sayısını vermektedir. Yani eşitliğin sol tarafı  $A$  nın tüm alt kümelerinin sayısını vermektedir.

$A$  nın rastgele bir  $S$  alt kümesi alındığında herhangi bir  $a_i$  için  $a_i \in S$  ya da  $a_i \notin S$  olmak üzere iki ihtimal vardır. Dolayısı ile  $A$  nın tüm alt kümelerinin sayısı  $2^n$  dir.

İfadenin her iki tarafı da  $A$  nın tüm alt kümelerinin sayısını verdiğinden eşitlik sağlanır. ■

Yukarıdaki teoremin ispatında  $A$  kümesinin alt kümelerinin sayısını iki farklı şekilde hesapladık. Kombinatorikte bu yöntem “çifte sayma” denmektedir ve kombinatorikte önemli bir ispat yöntemidir. Şimdi bu “çifte sayma” yöntemini daha öne tümevarım yöntemi ile ispatladığımız bir bağıntıyı elde etmek için kullanalım.

### Örnek 3.9. (Çifte Sayma)

$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$  olduğunu gösteriniz.

$S = 1, 2, \dots, n + 1$  olsun.  $S$  kümesinin iki elemanlı alt kümelerini en büyük elemanlarına göre ayıralım. Yani

$P_1$  - En büyük elemanı 1 olan iki elemanlı alt kümelerin koleksiyonu

$P_2$  - En büyük elemanı 2 olan iki elemanlı alt kümelerin koleksiyonu

...

$P_{n+1}$  - En büyük elemanı  $n + 1$  olan iki elemanlı alt kümelerin koleksiyonu olsun.

$S$  nin iki elemanlı her alt kümesi  $P_i$ ,  $1 \leq i \leq n + 1$ , kümelerinin sadece birinde bulunur. Dolayısı ile  $|P_1| + |P_2| + |P_3| + \dots + |P_{n+1}|$  sayısı  $S$  nin iki elemanlı alt kümelerinin sayısına, yani  $\binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$  ye eşittir.

Herhangi bir  $P_i$  koleksiyonunda  $i - 1$  eleman vardır. Dolayısı ile

$$|P_1| + |P_2| + |P_3| + \dots + |P_{n+1}| = 0 + 1 + 2 + \dots + n$$

bulunur. Bulduğumuz iki eşitliği birleştirirsek

$$0 + 1 + 2 + \dots + n = |P_1| + |P_2| + |P_3| + \dots + |P_{n+1}| = \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

bulunur.

### 3.3 Çoklu Küme Permütasyonları

Bir  $S$  kümesinde bir elemanın birden fazla kez bulunmasına izin veriliyor ise  $S$  kümesine *çoklu küme* dendiğini daha önce belirtmiştik. Örneğin;  $S = \{2 \cdot a, 1 \cdot b, 3 \cdot c\}$  olmak üzere

$$acbc \quad cbbc$$

$S$  nin birer 4-permütasyonudur.

İlk olarak tüm elemanlarının tekrar sayılarının sonsuz olduğu ( $S = \{\infty \cdot a, \infty \cdot b, \infty \cdot c\}$  gibi) kümelerin permütasyonlarını inceleyeceğiz.

#### Teorem 3.6.

$S$  kümesi  $k$  farklı eleman içeren ve içerdiği her farklı elemandan sonsuz kopya bulduran bir küme olsun.  $S$  nin  $r$ -permütasyonlarının sayısı  $k^r$  dir.

**İspat.**  $a_1 a_2 \dots a_r$ ,  $S$  nin bir  $r$ -permütasyonu olmak üzere  $S$ 'de her birinin sonsuz kopyası olan  $k$  farklı eleman olduğundan her  $a_i$ ,  $1 \leq i \leq r$  için  $k$  farklı seçenek vardır. Dolayısı ile  $k^r$  farklı  $r$ -permütasyon yazılabilir. ■

### Örnek 3.10. (Sonsuz Kopya)

4 tabanında kaç farklı 3 basamaklı sayı yazılabilir?

$S = \{\infty \cdot 0, \infty \cdot 1, \infty \cdot 2, \infty \cdot 3\}$  kümesinin 3-permütasyonları sayısı istenilen

cevaptır. Bu şekilde  $4^3 = 64$  farklı sayı yazılabilir.

Aşağıdaki teorem ise kopya sayıları da sonlu olan bir çoklu kümenin permütasyonlarının sayısını vermektedir.

### Teorem 3.7.

$S$  kümesi tekrar sayıları  $n_1, n_2, \dots, n_k$  olan  $k$  farklı elemandan oluşsun ve  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$  olsun.  $S$  kümesinin permütasyonlarının sayısı

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

dir.

**İspat.**  $S$  kümesi tekrar sayıları sırasıyla  $n_1, n_2, \dots, n_k$  olan  $a_1, a_2, \dots, a_k$  elemanlarından oluşsun.  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$  kutuya  $S$  kümesinin elemanlarını yerleştirelim. İlk olarak  $a_1$  elemanlarını ilgili kutulara koyalım.  $n_1$  tane  $a_1$  elemanı olduğundan  $a_1$  elemanlarının geleceği yerleri  $\binom{n}{n_1}$  şekilde seçebiliriz. Kalan kutulardan  $a_2$  elemanlarını içerecek olanları  $\binom{n-n_1}{n_2}$  farklı şekilde seçebiliriz. Bu sayı  $a_3$  elemanları için ise  $\binom{n-n_1-n_2}{n_3}$  olur. Benzer şekilde devam edersek  $S$  kümesinin tüm elemanlarını

$$\binom{n}{n_1} \binom{n-n_1}{n_2} \binom{n-n_1-n_2}{n_3} \dots \binom{n-n_1-n_2-\dots-n_{k-1}}{n_k}$$

farklı şekilde ilgili kutulara yerleştirebiliriz. Bu sayı da

$$\frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \frac{(n-n_1-n_2)!}{n_3!(n-n_1-n_2-n_3)!} \dots \frac{(n-n_1-n_2-\dots-n_{k-1})!}{n_k!(n-n_1-n_2-\dots-n_k)!}$$
$$= \frac{n!}{n_1!n_2! \dots n_k!0!} = \frac{n!}{n_1!n_2! \dots n_k!}$$

sayısına eşittir. ■

### Örnek 3.11. (Tekrarlı Permütasyon)

“BABAANNE” kelimesinin tüm harfleri birer kez kullanılarak anlamlı ya da anlamsız kaç farklı kelime yazılabilir?

$S = \{3 \cdot A, 2 \cdot B, 2 \cdot N, 1 \cdot E\}$  dersek  $S$  kümesinin permütasyonlarının sayısı soruluyor.

Dolayısı ile Teorem 3.7 gereği  $\frac{8!}{3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1!}$  farklı kelime yazılabilir.

**Not !**

Eğer  $S$  kümesi tekrar sayıları  $n_1$  ve  $n_2$  olmak üzere iki farklı türden eleman içeriyorsa  $n = n_1 + n_2$  olmak üzere  $S$  nin permütasyonları sayısı

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2!} = \frac{n!}{n_1!(n - n_1)!} = \binom{n}{n_1}$$

dir.

### 3.4 Çoklu Küme Kombinasyonları

$S$  bir çoklu küme olmak üzere  $S$  kümesinin bir  $r$ -kombinasyonu  $S$  'den sırası önemsiz olacak şekilde  $r$  eleman seçmektir.  $S$  kümesinin eleman sayısı  $n$  ve içerdiği farklı elemanların sayısı  $k$  ise  $S$  nin  $n$ -kombinasyonlarının sayısı 1 olup, 1-kombinasyonlarının sayısı ise  $k$  dir.

**Örnek 3.12. (Çoklu Küme)**

$S = \{1 \cdot a, 2 \cdot b, 3 \cdot c\}$  olmak üzere  $S$  nin tüm 1-, 2- ve 3- kombinasyonlarını yazınız.

$S$  nin 1-kombinasyonları

$$\{1 \cdot a\}, \{1 \cdot b\}, \{1 \cdot c\}$$

2-kombinasyonları

$$\{1 \cdot a, 1 \cdot b\}, \{1 \cdot a, 1 \cdot c\}, \{2 \cdot b\}, \{1 \cdot b, 1 \cdot c\}, \{2 \cdot c\}$$

3 permütasyonları

$$\{1 \cdot a, 2 \cdot b\}, \{1 \cdot a, 1 \cdot b, 1 \cdot c\}, \{1 \cdot a, 2 \cdot c\}, \{2 \cdot b, 1 \cdot c\}, \{1 \cdot b, 2 \cdot c\}, \{3 \cdot c\}$$

şeklinde dir.

**Teorem 3.8.**

$S$  kümesi her birinin tekrar sayısı sonsuz olan  $k$  farklı elemandan oluşan bir çoklu küme olsun.  $S$  nin  $r$ -kombinasyonlarının sayısı

$$\binom{r+k-1}{r} = \binom{r+k-1}{k-1}$$

dir.

**İspat.**  $S = \{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \dots, \infty \cdot a_k\}$  olsun.  $S$  nin bir  $r$ -kombinasyonu  $x_i$  ler negatif olmayın tamsayı ve  $x_1 + x_2 + \dots + x_k = r$  olmak üzere  $\{x_1 \cdot a_1, x_2 \cdot a_2, \dots, x_k \cdot a_k\}$  şeklindedir. Benzer şekilde  $x_i$  ler bilinmeyenler olmak üzere  $x_1 + x_2 + \dots + x_k = r$  denkleminin negatif olmayan tamsayılarıdaki her çözümü  $S$  nin sadece bir  $r$ -kombinasyonuna karşılık gelmektedir. Dolayısı ile  $S$  nin  $r$ -kombinasyonlarının

sayısı

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = r$$

denkleminin negatif olmayan tamsayılarıdaki çözümlerinin sayısına eşittir. İstenen bu çözümlerin sayısının

$$T = \{r \cdot 1, (k-1) \cdot \star\}$$

kümesinin permütasyonlarının sayısına eşit olduğunu göstereceğiz.  $T$  nin herhangi bir permütasyonu düşünüldüğünde  $(k-1)$  tane olan  $\star$  elemanı  $r$  tane olan 1 elemanını  $k$  farklı gruba ayırır.

- $x_1 =$  ilk  $\star$  elemanına kadar olan 1 lerin sayısı,
- $x_2 =$  ilk  $\star$  ile ikinci  $\star$  arasındaki 1 lerin sayısı,
- $x_3 =$  ikinci  $\star$  ile üçüncü  $\star$  arasındaki 1 lerin sayısı,
- ...
- $x_{k-1} =$   $(k-2)$  inci  $\star$  ile  $(k-1)$  inci  $\star$  arasındaki 1 lerin sayısı,
- $x_k =$   $(k-1)$  inci  $\star$  dan sonraki 1 lerin sayısı.

$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = r$  denkleminin negatif olmayan tamsayılar kümesinde herhangi bir çözümleri verildiğinde  $T$  nin buna karşılık gelen permütasyonu da yukarıdaki işlemi tersine işleterek oluşturulabilir. Dolayısı ile  $S$  nin  $r$ -kombinasyonlarının sayısı  $T$  nin permütasyonlarının sayısına eşittir. Bu sayı da Teorem 3.7 gereği

$$\frac{(r+k-1)!}{r!(k-1)!} = \binom{r+k-1}{r} = \binom{r+k-1}{k-1}$$

dir. ■

### Örnek 3.13. (Poğaçça)

8 farklı poğaçça üreten bir fırın 12 şerli olarak bu poğaççaları kutulamaktadır. Kaç farklı kutu oluşturulabilir?

Tekrar sayısı epey fazla olan sekiz farklı poğaçça türünün 12-kombinasyonu isteniyor. Teorem 3.8 gereği bu sayı  $\binom{12+8-1}{12} = \binom{19}{12}$  dir.

### Örnek 3.14. (Azalmayan Dizi)

Terimleri  $1, 2, \dots, k$  sayılarından biri olan  $r$  uzunluğunda azalmayan kaç farklı dizi yazılabilir?

$S = \{\infty \cdot 1, \infty \cdot 2, \dots, \infty \cdot k\}$  olmak üzere ilgili bir diziyi  $S$  nin bir  $r$ -kombinasyonunu alıp daha sonra ilgili sayıları azalmayacak şekilde sıralayarak yapabiliriz. Dolayısı ile Teorem 3.8 gereği  $\binom{r+k-1}{r}$  farklı dizi yazılabilir.

### Örnek 3.15. (Negatif Olmayan Çözümler)

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$  denkleminin negatif olmayan tamsayı çözümleri kaç tanedir?

Teorem 3.8 ispatında bu sayının ( $k = 4$  ve  $r = 15$  alıp)  $\binom{15+4-1}{4} = \binom{18}{4}$  olduğunu gösterdik.

### Örnek 3.16. (Pozitif Çözümler)

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$  denkleminin pozitif tamsayı çözümleri kaç tanedir?

$i = 1, 2, 3, 4$  için  $y_i = x_i - 1$  dersek ilgili denklemler  $y_i$  ler cinsinden

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 11$$

şeklinde yazabiliriz. Bu yazdığımız denklemin negatif olmayan tamsayı çözümleri soruda istenen denklemin pozitif tamsayı çözümlerine karşılık gelmektedir. Bu çözümlerin sayısı da Teorem 3.8 gereği  $\binom{11+4-1}{11} = \binom{14}{11} = \binom{14}{3} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12}{3!} = 364$  dir.

### Örnek 3.17. (Alt Sınır Çözümler)

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$  denkleminin  $x_1 \geq 3$ ,  $x_2 \geq 1$ ,  $x_3 \geq 0$ ,  $x_4 \geq 5$  olmak üzere kaç farklı tamsayı çözümü vardır?

$y_1 = x_1 - 3$ ,  $y_2 = x_2 - 1$ ,  $y_3 = x_3$  ve  $y_4 = x_4 - 5$  dersek istenen çözümler ile

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 11$$

denkleminin negatif olmayan tamsayı çözümleri arasında birebir bir ilişki vardır. Dolayısı ile istenen koşulları sağlayan Teorem 3.8 gereği  $\binom{11+4-1}{11} = \binom{14}{11} = \binom{14}{3} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12}{3!} = 364$  farklı çözüm vardır.

## 4 Pascal Üçgeni ve Binom Teoremi

Bir önceki bölümde  $\binom{n}{k}$  ifadesini negatif olmayan tamsayılar  $n$  ve  $k$  için tanımlamıştık.  $\binom{n}{k}$  sayıları, bu bölümde bahsedeceğimiz binom teoreminde kullanılması sebebiyle *binom katsayıları* olarak da bilinir. Ayrıca  $\binom{n}{0} = 1$  ve  $k > n$  ise  $\binom{n}{k} = 0$  olduğunu belirtmiştik. Aşağıdaki

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \dots \cdot 1} \quad (1)$$

formülünü tekrar hatırlatalım. Yine bir önceki bölümde  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$  olduğundan ve  $0 \leq k \leq n$  için Pascal formülünden yani

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

formülünden bahsetmiştik. Pascal formülünü ve başlangıç değerlerini, yani  $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$  ( $n \geq 0$ ) olduğunu kullanarak (1) ifadesindeki formülü kullanmadan tüm  $\binom{n}{k}$  binom katsayılarını hesaplayabiliriz. İlgili sayılar bu şekilde hesaplandığında genelde sonsuz bir dizi şeklinde yazılır ve buna *Pascal üçgeni* denir.

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

### 4.1 Binom Teoremi

Aşağıdaki teorem  $\binom{n}{k}$  sayılarının binom katsayıları olarak adlandırılmasına neden olmuştur.

#### Teorem 4.1.

$n$  pozitif bir tamsayı olmak üzere her  $x, y$  için

$$(x + y)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \dots + \binom{n}{n-1}x^1y^{n-1} + y^n$$

dir. Toplam sembolü kullanarak

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

şeklinde de yazılabilir.

**İspat.** İlk olarak  $(x + y)^n$  ifadesini

$$\underbrace{(x + y)(x + y) \cdots (x + y)}_{n \text{ tane}}$$

olarak yazalım. Bu çarpımı tamamen açıp ilgili terimleri gruplandıracağız. Her  $(x + y)$  çarpanı için  $x$  ya da  $y$  yi seçebileceğimizden dolayı  $2^n$  terim elde edilir ve bu terimler  $x^{n-k}y^k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$  şeklinde yazılabilir.  $x^{n-k}y^k$  terimi  $n$  çarpanın  $k$  tanesinden  $y$  seçerek elde edilebilir. (Kalan  $n - k$  çarpanından da  $x$  seçilmiş olur.) Dolayısı ile yukarıdaki çarpım tamamen açıldığında bu açılımdaki  $\binom{n}{k}$  terim  $x^{n-k}y^k$  ifadesine karşılık gelir. Bu da

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

olduğunu belirtir. ■

Yukarıdaki teoremin farklı bir ispatı da aşağıdaki şekildedir.

**İspat.** Tümevarım yöntemi ile ilerleyeceğiz.

**Başlangıç adımı:**  $n = 1$ .

$$(x + y)^1 = \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} x^{1-k} y^k = \binom{1}{0} x^1 y^0 + \binom{1}{1} x^0 y^1 = x + y$$

olup ifade doğrudur.

**Tümevarım adımı:**  $n = m$  için ifade doğru yani

$$(x + y)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^{m-k} y^k$$

olsun ve  $n = m + 1$  için ifadenin doğru olması gerektiğini gösterelim.

$$\begin{aligned} (x + y)^{m+1} &= (x + y) \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^{m-k} y^k \\ &= x \left( \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^{m-k} y^k \right) + y \left( \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^{m-k} y^k \right) \\ &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^{m+1-k} y^k + \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} x^{m-k} y^{k+1} \\ &= \binom{m}{0} x^{m+1} + \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} x^{m+1-k} y^k + \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} x^{m-k} y^{k+1} + \binom{m}{m} y^{m+1} \end{aligned}$$

bulunur. Son ifadede  $k$  yerine  $k - 1$  yazarsak

$$\sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} x^{m-k} y^{k+1} = \sum_{k=1}^m \binom{m}{k-1} x^{m+1-k} y^k$$

olup bu da

$$(x + y)^{m+1} = x^{m+1} + \sum_{k=1}^m \left( \binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} \right) x^{m+1-k} y^k + y^{m+1}$$

eşitliğini verir. Pascal formülünü kullanarak

$$(x + y)^{m+1} = x^{m+1} + \sum_{k=1}^m \binom{m+1}{k} x^{m+1-k} y^k + y^{m+1}$$

yazabiliriz. Ayrıca  $\binom{m+1}{0} = \binom{m+1}{m+1} = 1$  olduğunu kullanarak

$$(x + y)^{m+1} = \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} x^{m+1-k} y^k$$

bulunur. Dolayısı ile ilgili ifade  $n = m + 1$  için sağlanır, bu da ispatı tamamlar. ■

Binom teoremi aşağıdaki şekillerde de ifade edilebilir.

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} x^{n-k} y^k,$$

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} x^k y^{n-k},$$

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

$y = 1$  durumu sık karşılaşılan bir durum olduğundan onu ayrıca aşağıdaki şekilde özel olarak ifade edebiliriz.

#### Teorem 4.2.

$n$  pozitif bir tamsayı olsun. Her  $x$  için

$$(1 + x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} x^k$$

dır.

#### Örnek 4.1. (Alt Küme Sayıları)

■  $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$  olduğunu binom teoremini kullanarak gösteriniz.

Binom teoreminde  $x = y = 1$  yazarsak

$$2^n = (x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot 1 \cdot 1 = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}$$

elde edilir.

#### Örnek 4.2. (Tek ve Çift Alt Kümeler)

$S$  kümesi  $n \geq 1$  elemanlı bir küme olmak üzere  $S$  nin tek sayıda eleman içeren alt kümelerinin sayısının  $S$  nin çift sayıda eleman içeren alt kümelerinin sayısına eşit olduğunu gösteriniz.

Binom teoreminde  $x = 1$ ,  $y = -1$  yazarsak

$$0 = (x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n}$$

yani

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

elde edilir. Negatif terimleri karşı tarafa atarsak

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots$$

elde edilir. (Burada  $n$  sayısının tek mi çift mi olduğunu bilmediğimiz için toplamların son terimlerini yazmadık.)  $\binom{n}{k}$  sayısı  $S$  nin  $k$  elemanlı alt kümelerinin sayısını verdiğinden ötürü en son bulduğumuz eşitlik  $S$  nin tek sayıda eleman içeren alt kümelerinin sayısının çift sayıda eleman içeren alt kümelerinin sayısına eşit olduğunu gösterir.

#### Örnek 4.3. (Terim Katsayıları)

$(x + 2y)^8$  açılımında  $x^3y^5$  çarpanını içeren terimin katsayısı kaçtır?

Binom teoremi kullanarak

$$(x + 2y)^8 = \sum_{k=0}^8 \binom{8}{k} x^{8-k} (2y)^k$$

yazabiliriz. Yukarıdaki toplamda  $k = 5$  terimi istenen terimdir ve bu terim  $\binom{8}{5} x^{8-5} (2y)^5 = \binom{8}{3} x^3 (2y)^5 = 56 \cdot 32 x^3 y^5 = 1792 x^3 y^5$  olarak yazılabileceğinden ilgili çarpanı içeren terimin katsayısı 1792 dir.

#### Örnek 4.4. (Türev)

Binom teoremini kullanarak

$$1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \cdots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}$$

olduğunu gösteriniz.

Binom teoreminde  $y = 1$  alırsak

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n$$

elde edilir. Her iki tarafın da türevi alındığında

$$n(1+x)^{n-1} = 1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2}x + \cdots + n\binom{n}{n}x^{n-1}$$

bulunup bu eşitlikte de  $x = 1$  yazarsak

$$1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \cdots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}$$

elde edilir.

#### Örnek 4.5. (Kareler Toplamı)

$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ , ( $n \geq 0$ ) olduğunu gösteriniz.

$S$ ,  $2n$  elemanlı bir küme olsun.  $S$  kümesini her ikisi de  $n$  elemanlı  $A$  ve  $B$  kümelerine parçalayalım.  $S$  nin  $n$  elemanlı alt kümelerini düşünelim. Bu kümelerden herhangi biri  $A$  kümesinden  $k$  eleman  $B$  kümesinden ise  $n - k$  eleman içerir ( $0 \leq k \leq n$ ).  $S$  nin  $n$  elemanlı alt kümelerini

$$C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$$

şeklinde parçalayalım öyle ki  $C_k$  parçasında bulunan kümeler  $A$  dan  $k$ ,  $B$  den  $n - k$  eleman içersin.  $S$  nin  $n$  elemanlı alt kümelerinin sayısı  $\binom{2n}{n}$  olduğundan

$$\binom{2n}{n} = |C_0| + |C_1| + |C_2| + \cdots + |C_n| = \sum_{k=0}^n |C_k|$$

olur. Herhangi bir  $0 \leq k \leq n$  için  $C_k$ 'da bulunacak bir küme  $A$  dan  $k$ ,  $B$  den  $n - k$  eleman seçilerek oluşturulabileceğinden  $|C_k| = \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}^2$  olur. Dolayısı ile

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n |C_k| = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$$

bulunur.

Binom katsayıların  $\binom{n}{k}$  tanımını  $n$  herhangi bir reel sayı ve  $k$  herhangi bir tamsayı olacak şekilde genişletebiliriz.

$$\binom{r}{k} := \begin{cases} \frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!}, & k \geq 1 \\ 1, & k = 0 \\ 0, & k \leq -1 \end{cases}$$

#### Örnek 4.6. (Reel Sayı Binom)

$\binom{3/2}{3}, \binom{-4}{2}, \binom{4.1}{0}, \binom{6}{-2}$  ifadelerinin sayısal değerlerini bulunuz.

$$\begin{aligned} \binom{3/2}{3} &= \frac{(3/2)(1/2)(-1/2)}{3!} = \frac{-3}{48}, \\ \binom{-4}{2} &= \frac{(-4)(-5)}{2} = 20, \\ \binom{4.1}{0} &= 1, \\ \binom{6}{-2} &= 0 \end{aligned}$$

olur.

#### Multinom Teoremi

Binom teoremi  $(x + y)^n$  ifadesinin her  $n$  pozitif tamsayı değeri için bir formül verir. Bu formül genelleştirilerek  $(x_1 + x_2 + \cdots + x_t)^n$  ifadesi için de verilebilir. Bu genel ifadedeki binom katsayılarına karşılık gelen katsayılara *multinom katsayıları* denir ve bu katsayılar

$$\binom{n}{n_1 n_2 \cdots n_t} := \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_t!}$$

olarak tanımlanır. Burada  $n_k, 1 \leq k \leq t$  negatif olmayan tamsayılar olup  $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_t$  dir.

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  binom katsayısını multinom formatta

$$\binom{n}{k n-k}$$

olarak yazabiliriz. Ayrıca bu sayıyı birinin tekrar sayısı  $k$ , diğerininki  $n-k$  olan iki farklı eleman içeren bir çoklu kümenin permütasyonlarının sayısı olarak da düşünebiliriz. Pascal formülünü de bu formatta

$$\binom{n}{k n-k} = \binom{n-1}{k n-k-1} + \binom{n-1}{k-1 n-k}$$

olarak ifade edebiliriz. Multinom katsayıları için Pascal formülü

$$\binom{n}{n_1 n_2 \cdots n_t} = \binom{n-1}{n_1-1 n_2 \cdots n_t} + \binom{n-1}{n_1 n_2-1 \cdots n_t} + \cdots + \binom{n-1}{n_1 n_2 \cdots n_t-1}$$

olarak verilir.

### Teorem 4.3.

$n$  pozitif bir tamsayı olsun. Her  $x_1, x_2, \dots, x_t$  için

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_t)^n = \sum \binom{n}{n_1 \ n_2 \ \dots \ n_t} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_t^{n_t},$$

olup buradaki toplam  $n_1 + n_2 + \dots + n_t = n$  ifadesinin negatif olmayan tüm çözümleri üzerindedir.

**İspat.** Binom teoreminin ispatında yaptığımız gibi  $(x_1 + x_2 + \dots + x_t)^n$  ifadesini  $n$  tane  $(x_1 + x_2 + \dots + x_t)$  nin yan yana çarpımı şeklinde yazıp bu çarpımı tamamen açıyoruz ve benzer terimleri gruplandırıyoruz. Bu  $n$  çarpanın her birinden  $x_1, x_2, \dots, x_t$  den birini seçerek oluşturulan  $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_t^{n_t}$  ifadesini içeren bir terimi düşünelim. Öncelikle burada  $n_1 + n_2 + \dots + n_t = n$  olur. Bu terimi oluşturmak için  $n$  çarpanın  $n_1$  tanesinden  $x_1$ 'i, kalan  $n - n_1$  tanesinin  $n_2$  tanesinden  $x_2$ 'yi, ..., kalan  $n - n_1 - n_2 - \dots - n_{t-1}$  tanesinin  $n_t$  tanesinden  $x_t$ 'yi seçeriz. Dolayısı ile  $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_t^{n_t}$  ifadesi tamamen açtığımız ifadede

$$\binom{n}{n_1} \binom{n-n_1}{n_2} \dots \binom{n-n_1-\dots-n_{t-1}}{n_t} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_t!}$$

kez bulunur. ■

### Örnek 4.7. (Multinom Katsayı)

$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^6$  ifadesinin açılımında  $x_1^2 x_2 x_3^3$  ifadesine karşılık gelen terimin katsayısı kaçtır?

Soruda istenen terime karşılık gelen terimin katsayısı

$$\binom{6}{2 \ 1 \ 3 \ 0} = \frac{6!}{2!1!3!0!} = 60$$

bulunur. ┌

### Örnek 4.8. (Multinom Katsayı)

$(3x_1 - 2x_2 - x_3)^5$  ifadesinin açılımında  $x_1 x_2^3 x_3$  ifadesine karşılık gelen terimin katsayısı kaçtır?

Soruda istenen terime karşılık gelen terimin katsayısı

$$\binom{5}{1 \ 3 \ 1} \cdot 3 \cdot (-2)^3 \cdot (-1) = \frac{5!}{1!3!1!} \cdot 24 = 480$$

bulunur. ┌

#### Örnek 4.9. (Terim Sayısı)

$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^8$  ifadesinin açılımında kaç farklı terim vardır?

Soruda istenen sayı

$$n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 8$$

denkleminin negatif olmayan tamsayı çözümlerinin sayısıdır. Önceki bölümden bu sayıyı

$$\binom{8+4-1}{8} = \binom{11}{8} = \binom{11}{3} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{6} = 11 \cdot 5 \cdot 3 = 165$$

olarak hesaplayabiliriz.

### Newton Binom Teoremi

Isaac Newton 1676 yılında binom teoremini genelleştirerek herhangi bir  $a$  reel sayısı için  $(x + y)^a$  ifadesinin açılımının formülünü vermiştir. Bu genel sonuç sonsuz bir seriye karşılık gelir ve serinin yakınsak olduğu noktalar düşünülmelidir. Bu nedenle ilgili teoremi ispatsız bir şekilde vereceğiz.

#### Teorem 4.4.

$a, x, y \in \mathbb{R}$  ve  $0 \leq |x| < |y|$  olsun. O halde

$$(x + y)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} x^k y^{a-k}$$

dır.

Eğer  $a$  bir pozitif  $n$  tamsayısı ise  $k > n$  olduğu zaman  $\binom{n}{k} = 0$  olacağından yukarıdaki teoremden geçen ifade

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

olur bu da binom teoremine karşılık gelir.

Eğer  $z = x/y$  dersek  $(x + y)^a = y^a(z + 1)^a$  olur. Buradan Teorem 4.4 in ifadesi  $|z| < 1$  olmak üzere

$$(1 + z)^a = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} z^k$$

şeklinde yazılabilir.

Şimdi de  $n$  pozitif bir tamsayı ve  $a = -n$  olsun.

$$\begin{aligned} \binom{a}{k} &= \binom{-n}{k} = \frac{-n(-n-1)\cdots(-n-k+1)}{k!} = (-1)^k \frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!} \\ &= (-1)^k \binom{n+k-1}{k} \end{aligned}$$

olduğundan her  $|z| < 1$  için

$$(1+z)^{-n} = \frac{1}{(1+z)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} z^k$$

olur. Eğer  $z$  yerine de  $-z$  yazarsak

$$(1-z)^{-n} = \frac{1}{(1-z)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} z^k$$

elde edilir. Ayrıca  $n = 1$  alırsak  $\binom{n+k-1}{k} = \binom{k}{k} = 1$  olacağından yukarıdaki ifadeler

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k \quad (|z| < 1)$$

ve

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \quad (|z| < 1)$$

ifadelerine dönüşür.

## 5 İçerme ve Dışlama İlkesi

Önceki bölümlerde bazı örneklerde istenen durum sayısını bulmak için tüm durumların sayısından istenmeyen durumların sayısını çıkardık.

### Örnek 5.1. (Tüm Durumdan Çıkarma)

1'den 1000'e kadar (1000 dahil) olan sayılardan kaç tanesi 8'e tam bölünmez?

8'e bölünen sayılar  $\frac{1000}{8} = 125$  tanedir. Dolayısı ile 1 ile 1000 arasında 8'e bölünmeyen sayılar  $1000 - 125 = 875$  tanedir.

Yukarıdaki soruyu

1'den 1000'e kadar (1000 dahil) olan sayılardan kaç tanesi 5'e ya da 8'e tam bölünmez?

şeklinde sorarsak nasıl bir çözüm yolu izlemeliyiz?

İlgili çözüm yolunu daha genel olarak anlatmak için  $S$  ile sonlu sayıda eleman içeren bir kümeyi ve  $P_1, P_2$  ile de  $S$ 'deki elemanların sahip olduğu ya da olmadığı iki özelliği gösterelim.  $S$  kümesindeki elemanlardan kaç tanesinin  $P_1$  ve  $P_2$  özelliklerinden hiçbirine sahip olmadığını bulmak istiyoruz.  $A_i \subseteq S$  ( $i = 1, 2$ ) ile  $S$  kümesinde bulunan ve  $P_i$  özelliğine sahip olan elemanları gösterelim. Dolayısı ile  $\bar{A}_i = S \setminus A_i$ , ( $i = 1, 2$ ) (yani  $\bar{A}_i$  kümesi  $S$  kümesinde bulunan ve  $P_i$  özelliğine sahip olmayan elemanların kümesi) olmak üzere bulmamız gereken sayı  $|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2|$  dir. Bu sayıyı da

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2| = |S| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2|$$

formülünden bulabiliriz. Şimdi yukarıdaki soruyu bir örnek olarak çözelim.

### Örnek 5.2. (Bölünebilme İki Farklı Sayı)

1'den 1000'e kadar (1000 dahil) olan sayılardan kaç tanesi 5'e ya da 8'e tam bölünmez?

$S = \{1, 2, \dots, 1000\}$ ,  $P_1$  özelliği 5'e tam bölünebilme ve  $P_2$  özelliği ise 8'e tam bölünebilme olsun.  $A_1 \subseteq S$  ile  $S$ 'de olup  $P_1$  özelliğini sağlayan sayıların kümesini, yani  $S$ 'nin 5'e tam bölünen elemanlarının kümesini;  $A_2$  ile de  $S$ 'de olup  $P_2$  özelliğini sağlayan sayıların kümesini, yani  $S$ 'nin 8'e tam bölünen elemanlarının kümesini gösterelim. Dolayısı ile  $A_1 \cap A_2$  kümesi  $S$ 'nin elemanlarından hem 5'e hem de 8'e tam bölünenlerin kümesi olur.  $\text{ekok}(5, 8) = 40$  olduğundan  $A_1 \cap A_2$  kümesi  $S$ 'nin elemanlarından 40'a tam bölünenlerin kümesi olur.  $|A_1| = \frac{1000}{5} = 200$ ,  $|A_2| = \frac{1000}{8} = 125$ ,  $|A_1 \cap A_2| = \frac{1000}{40} = 25$  olduğundan  $S$  kümesinin ne 5'e ne de 8'e bölünebilen elemanlarının kümesinin yani  $\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2$  kümesinin eleman sayısını

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2| = |S| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2| = 1000 - 200 - 125 + 25 = 700$$

olarak buluruz.

Yukarıdaki örnekte iki farklı özellik için yapılanlar içerme-dışlama ilkesinin en basit halidir. Şimdi özellik sayısını artırarak daha genel bir şekilde içerme-dışlama ilkesini ifade edelim.  $P_1, P_2, \dots, P_m$  bir  $S$  kümesinde bulunan elemanların sahip

olduğu ya da olmadığı özellikler olsun. Ayrıca

$$A_i = \{x \in S : x, P_i \text{ özelliğini sağlar}\}, \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

olsun. O halde  $\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_m$  kümesi  $S$ 'nin elemanlarından  $P_1, P_2, \dots, P_m$  özelliklerinden hiçbirini sağlamayanların kümesini verir.

### Teorem 5.1.

Bir  $S$  kümesinde  $P_1, P_2, \dots, P_m$  özelliklerinden hiçbirini sağlamayan elemanların sayısı

$$\begin{aligned} |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_m| = & |S| - \sum |A_i| + \sum |A_i \cap A_j| - \sum |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ & + \dots + (-1)^m |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m| \end{aligned} \quad (2)$$

olup bu ifadedeki ilk toplam  $\{1, 2, \dots, m\}$  kümesinin 1 elemanlı  $\{i\}$  alt kümeleri üzerinden, ikinci toplam 2 elemanlı  $\{i, j\}$  alt kümeleri üzerinden, üçüncü toplam 3 elemanlı  $\{i, j, k\}$  alt kümeleri üzerinden şeklinde son terime kadar devam eder ve son terim yani  $m$  inci terim de  $m$  elemanlı alt kümelerine yani sadece kendisine karşılık gelir.

Teorem 5.1 in ispatını vermeden önce bu teoremin ifadesinde geçen eşitliği inceleyelim.  $m = 3$  için bu eşitlik

$$\begin{aligned} |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3| = & |S| - (|A_1| + |A_2| + |A_3|) \\ & + (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \end{aligned}$$

olup sekiz terim içermektedir.  $m = 3$  için ise

$$\begin{aligned} |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4| = & |S| - (|A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4|) \\ & + (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4| \\ & + |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4|) \\ & - (|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| \\ & + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4|) \\ & + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| \end{aligned}$$

olup on altı terim içermektedir. Genel olarak eşitliğin sağ tarafında

$$\binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \binom{m}{3} + \dots + \binom{m}{m} = 2^m$$

adet terim vardır. Şimdi Teorem 5.1 in ispatını verebiliriz.

**İspat.** Eşitlik (2) yi düşünelim.  $P_1, P_2, \dots, P_m$  özelliklerinden hiçbirine sahip olmayan bir elemanın bu eşitliğin sağ tarafına katkısının 1 olduğunu ve  $P_1, P_2, \dots, P_m$  özelliklerinden en az birine sahip bir elemanın bu eşitliğin sağ tarafına katkısının 0 olduğunu göstereceğiz. İlk olarak  $x \in S$   $P_1, P_2, \dots, P_m$  özelliklerinden hiçbirine sahip olmasın. Eşitlik (2) nin sağ tarafına  $x$ 'in katkısı

$$1 - 0 + 0 - 0 + \dots + (-1)^m \cdot 0 = 1$$

dir. Şimdi ise  $x \in S$  elemanı  $P_1, P_2, \dots, P_m$  özelliklerinden  $1 \leq n \leq m$  tanesini sağlasın.  $x$ 'in  $|S|$ 'ye katkısı  $1 = \binom{n}{0}$ ,  $\sum |A_i|$  ye katkısı  $n = \binom{n}{1}$  dir ( $n$  tane özellik sağladığından  $A_1, A_2, \dots, A_m$  kümelerinden  $n$  tanesinde bulunur).  $x$  in  $\sum |A_i \cap A_j|$  ye katkısı  $\binom{n}{2}$ ,  $\sum |A_i \cap A_j \cap A_k|$  ye katkısı  $\binom{n}{3}$  şeklinde devam eder. Dolayısı ile bu  $x$  elemanının eşitlik (2) in sağ tarafına toplam katkısı

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots + (-1)^m \binom{n}{m}$$

olup  $n \leq m$  olduğundan bu da

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n}$$

olur. Son bulunan ifade 0'a eşit olduğundan (bkz. Örnek 4.2) ispat tamamlanmış olur. ■

Teorem 5.1 kullanılarak aşağıdaki teoremi ispatlayabiliriz.

#### Teorem 5.2.

Bir  $S$  kümesinde  $P_1, P_2, \dots, P_m$  özelliklerinden en az birini sağlayan elemanların sayısı

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m| = \sum |A_i| - \sum |A_i \cap A_j| + \sum |A_i \cap A_j \cap A_k| - \dots + (-1)^{m+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m| \quad (3)$$

olup buradaki toplamlar Teorem 5.1 ifadesindeki gibidir.

**İspat.**  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$  kümesi,  $S$ 'deki elemanlardan  $P_1, P_2, \dots, P_m$  özelliklerinden en az birini sağlayan elemanların kümesidir. Ayrıca

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m| = |S| - |\overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m}|$$

ve De Morgan kuralları gereği

$$\overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_m$$

olduğundan

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m| = |S| - |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_m|$$

yazabiliriz. En son bulduğumuz eşitlik ile Eşitlik (2) birleştirilirse Eşitlik (3) elde edilir. ■

#### Örnek 5.3. (Bölünebilme Üç Farklı Sayı)

1'den 1000'e kadar (1000 dahil) olan sayılardan kaç tanesi 5,6,8 sayılarından hiçbirine bölünmez?

$S = \{1, 2, \dots, 1000\}$  olsun. Ayrıca  $P_1$ , 5'e tam bölünebilme özelliği;  $P_2$ , 6'ya tam

bölünebilme özelliği;  $P_3$  ise 8'e tam bölünebilme özelliği olsun.  $A_i = \{x \in S : x, P_i \text{ özelliğini sağlar}\}$ ,  $i = 1, 2, 3$  olarak tanımlayalım. Aşağıdakileri elde edebiliriz;

- $|A_1| = \lfloor \frac{1000}{5} \rfloor = 200$ ,  $|A_2| = \lfloor \frac{1000}{6} \rfloor = 166$ ,  $|A_3| = \lfloor \frac{1000}{125} \rfloor = 125$ ,
- $\text{ekok}(5, 6) = 30$  olduğundan  $|A_1 \cap A_2| = \lfloor \frac{1000}{30} \rfloor = 33$ ,
- $\text{ekok}(5, 8) = 40$  olduğundan  $|A_1 \cap A_3| = \lfloor \frac{1000}{40} \rfloor = 25$ ,
- $\text{ekok}(6, 8) = 24$  olduğundan  $|A_2 \cap A_3| = \lfloor \frac{1000}{24} \rfloor = 41$ ,
- $\text{ekok}(5, 6, 8) = 120$  olduğundan  $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \lfloor \frac{1000}{120} \rfloor = 8$ .

Bir  $x \in S$  için,  $x$  sayısı 5 sayısına tam bölünemiyor ise  $x \in \bar{A}_1$ , 6 sayısına tam bölünemiyor ise  $x \in \bar{A}_2$  ve 8 sayısına bölünemiyorsa  $x \in \bar{A}_3$  olur. Dolayısı ile  $\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3$  kümesi 5,6,8 sayılarından hiçbirine tam bölünemeyen  $S$  nin elemanlarının kümesidir. Teorem 5.1 gereği bu sayı

$$\begin{aligned} |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3| &= |S| - (|A_1| + |A_2| + |A_3|) \\ &\quad + (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ &= 1000 - (200 + 166 + 125) + (33 + 25 + 41) - 8 \\ &= 600 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

#### Örnek 5.4. (Yasaklı Permütasyon)

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  kümesinin permütasyonlarının kaçında 1234, 56 ve 789 parçaları bulunmaz? (Örneğin; 123496785, 175682493 istenmeyen permütasyonlardır.)

$S$  kümesi  $A$  nın tüm permütasyonlarının kümesi olsun.

- $P_1$  : 1234 parçasını içermeme özelliği,
- $P_2$  : 56 parçasını içermeme özelliği,
- $P_3$  : 789 parçasını içeren içermeme özelliği

ve  $i = 1, 2, 3$  için  $A_i$  kümesi de  $S$ 'de bulunan ve  $P_i$  özelliğini sağlayan permütasyonların kümesi olsun. Dolayısı ile bizden istenen sayı  $\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3$  kümesinin eleman sayısıdır. Öncelikle  $A$  nın tüm permütasyonlarının sayısı  $|S| = 9! = 362880$  dır.  $A_1$  kümesinde bulunan permütasyonlar

$$1234, 5, 6, 7, 8, 9$$

ifadelerinin permütasyonları olarak düşünülebileceğinden  $|A_1| = 6! = 720$  bulunur. Benzer şekilde  $|A_2| = 8! = 40320$  ve  $|A_3| = 7! = 5040$  bulunur.  $A_1 \cap A_2$  kümesinde bulunan permütasyonlar

$$1234, 56, 7, 8, 9$$

ifadelerinin permütasyonları olarak düşünülebileceğinden  $|A_1 \cap A_2| = 5! = 120$  bulunur. Benzer şekilde  $|A_1 \cap A_3| = 4! = 24$  ve  $|A_2 \cap A_3| = 6! = 720$  olur. Son olarak  $A_1 \cap A_2 \cap A_3$  kümesinde bulunan permütasyonlar

$$1234, 56, 789$$

ifadelerinin permütasyonları olarak düşünülebileceğinden  $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3! = 6$  olur. Buradan

$$\begin{aligned} |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3| &= |S| - (|A_1| + |A_2| + |A_3|) \\ &\quad + (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ &= 362880 - (720 + 40320 + 5040) + (120 + 24 + 720) - 6 \\ &= 317658 \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Şimdi  $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}$  kümesinin eleman sayısının sadece  $k$  sayısına bağlı olduğunu düşünelim. Yani

$$\begin{aligned} a_0 &= |S| \\ a_1 &= |A_1| = |A_2| = \dots = |A_m| \\ a_2 &= |A_1 \cap A_2| = \dots = |A_{m-1} \cap A_m| \\ a_3 &= |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \dots = |A_{m-2} \cap A_{m-1} \cap A_m| \\ &\vdots \\ a_m &= |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m| \end{aligned}$$

olsun. Bu durumda Teorem ?? ifadesinde geçen eşitliği

$$\begin{aligned} |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_m| &= a_0 - \binom{m}{1}a_1 + \binom{m}{2}a_2 - \binom{m}{3}a_3 + \dots + \\ &\quad + (-1)^k \binom{m}{k}a_k + \dots + (-1)^m a_m \end{aligned}$$

şeklinde yazabiliriz.

#### Örnek 5.5. (Tamsayı ve Rakamlar)

0 ile 99999 arasında (99999 dahil) 2,5,8 rakamlarının hepsini içeren kaç tamsayı vardır?

$S = \{00000, 00001, 00002, \dots, 99999\}$  yani 0 dan 99999 a kadar olan sayıların 5 rakamla yazılışlarının kümesi olsun. Dolayısı ile  $S$  kümesi aynı zamanda  $\{5 \cdot 0, 5 \cdot 1, 5 \cdot 2, \dots, 5 \cdot 9\}$  çoklu kümesinin 5-permütasyonlarına karşılık gelmektedir.

- $P_1$  : 2 rakamını içermeme özelliği,
- $P_2$  : 5 rakamını içermeme özelliği,
- $P_3$  : 8 rakamını içermeme özelliği,

ve  $i = 1, 2, 3$  için  $A_i$  kümesi de  $S$ 'de bulunan ve  $P_i$  özelliğini sağlayan tamsayıların kümesi olsun. Yukarıda verilen notasyonu kullanacak olursak  $a_0 = 10^5$ ,  $a_1 = 9^5$ ,  $a_2 = 8^5$  ve  $a_3 = 7^5$  bulunur. İstenen sayı  $|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3|$  olduğundan yukarıda verilen eşitlikten

$$|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3| = 10^5 - 3 \cdot 9^5 + 3 \cdot 8^5 - 7^5 = 4350$$

bulunur.

## Çoklu Küme Kombinasyonları

İçerme-Dışlama ilkesini kullanarak çoklu küme kombinasyonlarını hesaplayabileceğimizi bir örnek ile gösterelim.

### Örnek 5.6. (İçerme-Dışlama ve Çoklu Küme)

■  $T = \{3 \cdot a, 4 \cdot b, 5 \cdot c\}$  kümesinin 10-kombinasyonlarının sayısı kaçtır?

İçerme-dışlama ilkesini  $T^* = \{\infty \cdot a, \infty \cdot b, \infty \cdot c\}$  (ya da  $\{10 \cdot a, 10 \cdot b, 10 \cdot c\}$ ) üzerinde uygulayacağız.

•  $P_1$  :  $T^*$  in bir 10-kombinasyonunda üçten fazla  $a$  olması özelliği,  
•  $P_2$  :  $T^*$  in bir 10-kombinasyonunda dörtten fazla  $b$  olması özelliği,  
•  $P_3$  :  $T^*$  in bir 10-kombinasyonunda beşten fazla  $c$  olması özelliği,  
olsun.  $T^*$  kümesinin  $P_1$ ,  $P_2$  ve  $P_3$  özelliklerine sahip olmayan 10-kombinasyonlarının sayısı sorsa istenen sayı olmuş olur.  $S$  kümesi  $T^*$  nin tüm 10-kombinasyonlarının kümesi olsun ve  $i = 1, 2, 3$  için  $A_i$  kümesi  $S$  de bulunan kombinasyonlardan  $P_i$  özelliğini sağlayanların kümesi olsun. Teorem 3.8 gereği  $|S| = \binom{10+3-1}{10} = \binom{12}{2} = 66$  olur.  $A_1$  kümesinde bulunan 10-kombinasyonlarda en az dört tane  $a$  bulunmalıdır. Bu kombinasyonlardaki diğer altı eleman için bir şart yoktur, yani kalan altı eleman  $T^*$  in bir 6-kombinasyonunu olarak düşünülebilir. Tersine  $T^*$  in bir 6-kombinasyonunu alıp dört tane  $a$  elemanı ekleyerek  $A_1$  deki 10-kombinasyonları elde edebiliriz. Yani  $A_1$  in eleman sayısı  $T^*$  in 6-kombinasyonlarının sayısı kadardır, ve bu sayı da  $|A_1| = \binom{6+3-1}{6} = \binom{8}{2} = 28$  dir. Benzer şekilde  $A_2$  nin eleman sayısı  $T^*$  in 5-kombinasyonlarının sayısı kadar ve  $A_3$  ün eleman sayısı  $T^*$  in 4-kombinasyonlarının sayısı kadardır. Bu sayılar da  $|A_2| = \binom{5+3-1}{5} = \binom{7}{2} = 21$

$$|A_3| = \binom{4+3-1}{4} = \binom{6}{2} = 15 \text{ bulunur.}$$

Benzer şekilde  $A_1 \cap A_2$  kümesi  $T^*$  in 10-kombinasyonlarından en az dört  $a$  ve en az beş  $b$  içerenlerin kümesidir. Geriye kalan bir eleman  $T^*$  in herhangi bir elemanı olabilir. Dolayısı ile yukarıdaki açıklamalara benzer şekilde  $A_1 \cap A_2$  kümesinin eleman sayısı  $T^*$  in 1-kombinasyonlarının sayısına eşittir. Bu sayı da  $|A_1 \cap A_2| = \binom{1+3-1}{1} = 3$  olur. Benzer şekilde  $|A_1 \cap A_3| = \binom{0+3-1}{0} = 1$  ve  $|A_2 \cap A_3| = 0$ , dolayısı ile de  $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$  bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3| &= |S| - (|A_1| + |A_2| + |A_3|) \\ &\quad + (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3|) - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ &= 66 - (28 + 21 + 15) + (3 + 1 + 0) - 0 \\ &= 6 \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 5.7. (Üst Sınırlı Tamsayı Çözümleri)

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$$

denkleminin  $1 \leq x_1 \leq 5$ ,  $-2 \leq x_2 \leq 4$ ,  $0 \leq x_3 \leq 5$ ,  $3 \leq x_4 \leq 9$  koşulları altında kaç farklı tamsayı çözümü vardır?

$y_1 = x_1 - 1$ ,  $y_2 = x_2 + 2$ ,  $y_3 = x_3$  ve  $y_4 = x_4 - 3$  dersek soruda verilen denklemin sağlanması ile

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 16$$

denkleminin  $0 \leq y_1 \leq 4$ ,  $0 \leq y_2 \leq 6$ ,  $0 \leq y_3 \leq 5$ ,  $0 \leq y_4 \leq 6$  koşulları altında sağlanması bir birine denktir.  $S$  kümesi bu denklemin negatif olmayan tamsayı çözümlerinin kümesi (üst sınırlar olmayan hali) olsun. Teorem 3.8 gereği  $\binom{16+4-1}{16} = \binom{19}{3} = 969$  bulunabilir.

- $P_1$  :  $S$ 'de bulunan çözümlerden  $y_1 \geq 5$  olanlar,
- $P_2$  :  $S$ 'de bulunan çözümlerden  $y_2 \geq 7$  olanlar,
- $P_3$  :  $S$ 'de bulunan çözümlerden  $y_3 \geq 6$  olanlar,
- $P_4$  :  $S$ 'de bulunan çözümlerden  $y_4 \geq 7$  olanlar,

ve  $i = 1, 2, 3, 4$  için  $A_i$  kümesi  $S$ 'de bulunan çözümlerden  $P_i$  özelliğini sağlayanlar olsun.  $|\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4|$  sayısı soruda istenen sayıdır.  $A_1$  kümesindeki çözümleri düşünelim. Eğer  $z_1 = y_1 - 5$ ,  $z_2 = y_2$ ,  $z_3 = y_3$  ve  $z_4 = y_4$  dersek  $A_1$  kümesinde bulunan çözümlerin sayısı ile

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 11$$

denkleminin negatif olmayan tamsayı çözümlerinin sayısı eşittir ve dolayısı ile  $|A_1| = \binom{11+4-1}{11} = \binom{14}{3} = 364$  olur. Benzer şekilde  $|A_2| = \binom{9+4-1}{9} = \binom{12}{3} = 220$ ,  $|A_3| = \binom{10+4-1}{10} = \binom{13}{3} = 286$  ve  $|A_4| = \binom{9+4-1}{9} = \binom{12}{3} = 220$  bulunur.  $A_1 \cap A_2$  kümesinden alınacak bir çözüm için  $y_1 \geq 5$  ve  $y_2 \geq 7$  dir. Dolayısı ile eğer  $u_1 = y_1 - 5$ ,  $u_2 = y_2 - 7$ ,  $u_3 = y_3$  ve  $u_4 = y_4$  dersek

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 4$$

denkleminin negatif olmayan tamsayı çözümlerinin sayısı  $|A_1 \cap A_2|$  ye eşittir. Yani  $|A_1 \cap A_2| = \binom{4+4-1}{4} = \binom{7}{3} = 35$  tir. Benzer şekilde  $|A_1 \cap A_3| = \binom{5+4-1}{5} = \binom{8}{3} = 56$ ,  $|A_1 \cap A_4| = \binom{4+4-1}{4} = \binom{7}{3} = 35$ ,  $|A_2 \cap A_3| = \binom{3+4-1}{3} = \binom{6}{3} = 20$ ,  $|A_2 \cap A_4| = \binom{2+4-1}{2} = \binom{5}{2} = 10$  ve  $|A_3 \cap A_4| = \binom{3+4-1}{3} = \binom{6}{3} = 20$  bulunur.  $A_1, A_2, A_3, A_4$  kümelerinin herhangi üçünün kesişimi boş küme olduğundan içerme-dışlama ilkesi gereği

$$\begin{aligned} |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \bar{A}_4| &= 969 - (364 + 220 + 286 + 220) \\ &\quad + (35 + 56 + 35 + 20 + 10 + 20) \\ &= 55. \end{aligned}$$

## Düzensiz Permütasyonlar

**Soru:** Hepsinin de şapkası olmak üzere 9 kişi bir yemeğe katılıyor. Girişte şapkalarını resepsiyona bırakan bu kişilere yemek sonunda şapkaları geri verilmek isteniyor. Hiç kimseye kendi şapkası verilmemek üzere kaç farklı şekilde şapkalar geri verilebilir?

$S = \{1, 2, \dots, n\}$  kümesinin bir  $i_1 i_2 \dots i_n$  permütasyonunu alalım. Eğer  $i_1 \neq 1, i_2 \neq 2, \dots, i_n \neq n$  ise bu permütasyona *düzensiz* bir permütasyon denir.  $n$  elemanlı bir kümenin düzensiz permütasyonlarının sayısını  $D_n$  ile göstereceğiz.  $D_1 = 0, D_2 = 1$  (21 permütasyonu),  $D_3 = 2$  (231 ve 312 permütasyonları) dır.  $n = 4$  için düzensiz permütasyonlar

2143	3142	4123
2341	3412	4312
2413	3421	4321

olup dolayısı ile  $D_4 = 9$  dur. İçerme-dışlama ilkesini kullanarak  $D_n$  sayısını hesaplayacağız.

### Teorem 5.3.

$n \geq 1$  için

$$D_n = n! \left( 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right)$$

dir.

**İspat.**  $S$  kümesi  $\{1, 2, \dots, n\}$  kümesinin tüm permütasyonlarının kümesi olsun.  $k = 1, 2, \dots, n$  için  $P_k$  özelliği bir permütasyonda  $k$  inci elemanın  $k$  olması özelliği olsun. Yani bir  $i_1 i_2 \dots i_n$  permütasyonu  $P_k$  özelliğine sahipse  $i_k = k$  dir.  $S$  de bulunan bir permütasyonun düzensiz olması demek  $P_1, P_2, \dots, P_n$  özelliklerinden hiçbirini sağlamaması demektir.  $k = 1, 2, \dots, n$  için  $A_k$  kümesi  $S$  de bulunan permütasyonlardan  $P_k$  özelliğini sağlayanların kümesi olsun. Dolayısı ile  $\{1, 2, \dots, n\}$  kümesinin düzensiz permütasyonları  $\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \dots \cap \bar{A}_n$  kümesinin elemanlarından oluşmaktadır, bu da

$$D_n = |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3 \cap \dots \cap \bar{A}_n|$$

demektir.  $A_1$  kümesinde bulunan permütasyonlar  $1i_2i_3 \dots i_n$  şeklinde olduğundan  $|A_1| = (n-1)!$  dir. Daha genel olarak  $k = 1, 2, \dots, n$  için  $|A_k| = (n-1)!$ . Benzer şekilde  $A_1 \cap A_2$  kümesinde bulunan permütasyonlar  $12i_3i_4 \dots i_n$  şeklinde olduğundan  $|A_1 \cap A_2| = (n-2)!$  olup daha genel olarak  $\{j, k\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$  için  $|A_j \cap A_k| = (n-2)!$  dir. Daha genel olarak  $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$  için

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}| = (n-k)!$$

olur.  $\{1, 2, \dots, n\}$  kümesinin  $k$  elemanlı alt kümelerinin sayısı  $\binom{n}{k}$  olduğundan

içerme-dışlama ilkesi uygulanırsa

$$\begin{aligned} D_n &= |\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_n| = n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \binom{n}{3}(n-3)! \\ &\quad + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} 0! \\ &= n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{n!}{n!} \\ &= n! \left( 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right) \end{aligned}$$

bulunur. ■

### Örnek 5.8. (Yemek-Şapka)

Hepsinin de şapkası olmak üzere 5 kişi bir yemeğe katılıyor. Girişte şapkalarını resepsiyona bırakan bu kişilere yemek sonunda şapkaları geri verilmek isteniyor. Hiç kimseye kendi şapkası verilmemek üzere kaç farklı şekilde şapkalar geri verilebilir?

Kişileri 1, 2, 3, 4, 5 diye numaralandıralım. Benzer şekilde 1. kişiden alınan şapkayı 1, 2. kişiden alınan şapkayı 2 şeklinde numaralandıralım. Numaralandırılan şapkaların bir permütasyonunu düşünelim, örneğin 23415. Bu permütasyon ile şapkaların dağıtımını şöyle ilişkilendirelim 23415 permütasyonunda 2 nolu şapkayı 1 nolu kişiye, 3 nolu şapkayı 2 nolu kişiye, ... şeklinde dağıtılacağını belirtsin. Dolayısı ile  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  kümesinin düzensiz permütasyonları ile soruda istenen şapka dağıtımı yolları arasında birebir bir ilişki vardır. Yani istenen şekilde şapkalar

$$\begin{aligned} D_5 &= 5! \left( 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} \right) \\ &= 120 - 120 + 60 - 20 + 5 - 1 \\ &= 44 \end{aligned}$$

farklı şekilde dağıtılabilir. └