2024

Kastamonu Üniversitesi

Fen Fakültesi

Matematik Bölümü

Olasılık ve İstatistik I

Mustafa Demir

İÇİNDEKİLER

References

Everything in this lecture note are directly taken from ‘Probability and Statististics for Enginering and the Sciences by J. L. Devore 2016’ to use in Turkish Language for no-profit educational lectures.

Bu ders notundaki materyellerin tamamı ‘Probability and Statististics for Enginering and the Sciences by J. L. Devore 2016’ kitabından kar amacı gütmeyen dersler için . Türkçede kullanılmak üzere alınmıştır.

1. İSTATİSTİK NEDİR?

Mühendisler ve bilim adamları profesyonel çalışmalarında yada günlük yaşantılarında sürekli olarak veri (data) yada gerçeklikler kümesi diye ifade ettiğimiz koleksiyonlarla karşılaşmaktadırlar. İstatistik disiplini ise, sahip olduğumuz verinin organize edilmesi, özetlenmesi ve nihai olarak sonuçlandırılmasında kullanılmak üzere bilimsel methodlar sunar ve geliştirir.

Bir araştırma genellikle hakkında bir sonuç yada kanaat elde etmek istediğimiz nesnelerden oluşan iyi tanımlanmış bir kümeye odaklanır ve bu kümeye kısaca **hedef popülasyonu** denir. Popülasyonun elemanlarının tamamı için istenilen, arzu edilen bilgilere sahip olduğumuzda, **popülasyon sayımı** olarak adlandıracağımız olguya sahip olmuş oluruz. Zamana, ekonomik koşullara, ve diğer kıymetli kaynak ve imkanlara bağlı olarak, popülasyon sayımını elde etmek genellikle ya kolay degildir yada imkansızdır. Bunun yerine, kısıtları önceden belirlenmiş şekilde popülasyonun bir alt kümesi seçilir ve bu sayım işlemi **örneklem** olarak adlandıracağımız bu altküme üzerinde yapılır. Bir araştırmada hedef popülasyonu, belirli zaman aralığında üretilen belirli bir türe ait jelatin kapsülleri olurken, bir başka araştırmada hedef popülasyonu, en son akademik yılda mühendislik alanında lisans derecesi kazanmış kişilerin kümesi hedef popülasyonu olabilir. Bu durumda, belirli bir üretimden örneklem oluşturmak için kapsüller alınır ve degerlendirilir, ve nihayetinde elde edilen sonuçlar bu jelatin kapsülleri üreten firmanın aradığı özellikleri sağlanıp sağlanmadığını araştırırken bir baz olarak kullanılır, yada geçen yıl mezun olan mühendislerin oluşturduğu popülasyondan bir örneklem alınır, mühendislik programının kalitesi hakkında bir kanaate varmaya çalışılabilir.

Genellikle, popülasyonun elemanlarının belirli **karakteristik** özellikleriyle ilgilenilir, örneğin herbir kapsülün yüzeyindeki hataların sayısı, herbir kapsülün duvar kalınlığı, mezun olan mühendislerin cinsiyeti, mezun olma yaşı gibi. Bu gibi özelliklere popülasyon karakteristiği denir. Popülasyon karakteristikleri farklı kategorilere ayrılabilir: cinsiyet, üretim türü, yada nümerik degerler gibi. Bu durumda bir popülasyon karakteristiğinin aldığı degerler kız, yetersiz lehim, 23 yaş, 0,5 cm çap olabilir. **Değişken** ise popülasyonun elemanları için sabit bir degere sahip olmayan karakteristiktir. Örneğin, beyaz renkli atletlerden oluşan bir popülasyon için atletlerin rengi bir popülasyon karakteristiğidir ancak popülasyon değişkeni degildir; fakat atletlerin kol uzunluğu bir popülasyon değişkenidir. Değişkenleri genellikle küçük harflerle gösteririz:

$x =$ öğrencilerin sahip oldukları hesap makinelerinin markası,

$y =$ Belirli bir zaman aralığında Kastamonu Universitesi web sayfasını ziyaret eden öğrenci sayısı,

$z =$ Belirli koşullar altında bir otomobilin fren mesafesi.

Data yada veri diye adlandırdığımız bilgiler veyahut gerçekler, popülasyona ait tek bir yada birden fazla değişkene ait gözlemlerdir. **Tektip (univariate)** data popülasyonun bir tek değişkene ait gözlemlerden oluşur. Örneğin, bir galericinin aldığı son 10 otomobilin vitesi türü (O) otomatik yada (M) manüel olduğunu belirlemeye çalışabiliriz. Bu araştırma için data kümemiz

M O O O M O O M O O

Yetişkin acil servisine gelen hastaların nabız degerleri ise nümerik bir data kümesidir:

88 80 71 103 154 132 67 110 60 105.

Sadece iki tane değişken için toplan dataya **ikili data (bivariate) data** denir, örneğin bir basketbol takımındaki oyuncuların boy ve kilo ölçümleri. İkiden fazla değişken için toplanan dataya çoklu data (multivariate data) denir, örneğin bir doktor çalışmasına dahil olan hastaların sistolik, diasistolik kanbasıncı ve serum kolestrol seviyesinin ölçümlerini kullanıyor olabilir. Bir datanın sadece nümerik ya da sadece kategorik değişkenlerden oluşma zorunluluğu yoktur, örneğin *Consumer Reports* yıllık otomobil serisinin paylaşmış olduğu çoklu data elemanları aşağıdaki şekildedir:

(Küçük/ spor/ kompakt/ orta/ büyük), şehir içi yakıt tüketimi, şehirler arası yakıt tüketimi, çekiş özelliği (önden/ arkadan/ 4x4), …

1.1 İstatistiğin Dalları

Betimsel İstatistik

Data toplayan bir araştırmacı, toplamış olduğu datayı özetlemek ve önemli olduğuna inandığı özellikleri belirtmek isteyebilir. Bu durumda araştırmacı betimsel istatistik (descriptive statistics) methodlarını kullanır. Datayı sergilemek için grafik çizebilir, histogram grafiği oluşturabilir, kutu grafiği çizebilir, saçılım grafiği çizebilir. Bunlar başlıca metodlardı. Bunların haricinde nümerik özet ölçümleri (ortalama, medyan, standart sapma, korelasyon katsayıları) yapabilir. Varolan istatistiksel bilgisayar programları bu işi olduğundan çok daha kolay yapmaya olanak sağlar. Başlıca kullanılabilecek yazılım paketleri: Minitab, SAS, JMP, ve R. R yazılımını http://www.r-project.org web sayfasından ücretsiz olarak indirebilirsiniz.

ÖRNEK: ABD bağış organizasyonları büyük çaplı bir iştir. charitynavigator.com websitesi radarına alabildiği 6000 organizasyon hakkında bilgi vermektedir. Bu websitesinden 60 tane yardım kurumuna ait bağış toplama giderlerinin, bütün giderlere göre yüzdesi aşağıda verilmektedir:

6.1	12.6	34.7	1.6	18.8	2.2	3.0	2.2	5.6	3.8
2.2	3.1	1.3	1.1	14.1	4.0	21.0	6.1	1.3	20.4
7.5	3.9	10.1	8.1	19.5	5.2	12.0	15.8	10.4	5.2
6.4	10.8	83.1	3.6	6.2	6.3	16.3	12.7	1.3	0.8
8.8	5.1	3.7	26.3	6.0	48.0	8.2	11.7	7.2	3.9
15.3	16.6	8.8	12.0	4.7	14.7	6.4	17.0	2.5	16.2

Yardım kurumlarının neredeyse tamamı gelirlerinin %20 den daha az bir kısmını bağış toplama organizasyonlarına harcamaktadır.

```
Stem-and-leaf of FundRsng N = 60
Leaf Unit = 1.0
     0 | 0111112222333333344
     0 | 5555666666778888
     1 | 0001222244
     1 | 55666789
     2 | 01
     2 | 6
     3 | 4
     3 |
     4 |
     4 | 8
     5 |
     5 |
     6 |
     6 |
     7 |
     7 |
     8 | 3
```

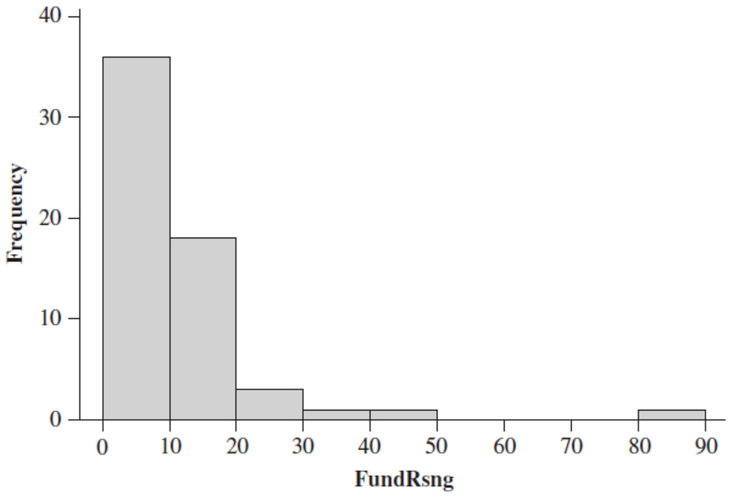


Figure 1.1 A Minitab stem-and-leaf display (tenths digit truncated) and histogram for the charity fundraising percentage data

Tahminsel İstatistik

Bir popülasyondan bir örneklem alarak işe başlayan bir araştırmacı bu örneklem üzerinden elde ettiği bilgilerle popülasyonun tamamı hakkında bir kanaate yada sonuca varmaya çalışabilir.
Bu türden bir çalışmada örneklem sonucun kendisi olmaktan daha çok sonuca ulaştıran bir aracıdır.

Ele alınan bir örneklem üzerinden, popülasyon hakkında sonuçlar çıkaran istatistik disiplinine **tahminsel istatistik (inferential statistics)** denir.

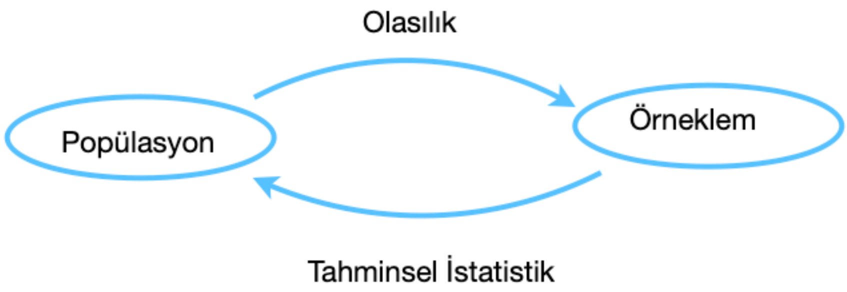
Örnek: Materyallerin dayanıklılığının araştırılması istatistiksel metodların uygulanabileceği zengin bir alandır. "Effects of Aggregates and Microfillers on the Flexural Properties of Concrete" (Magazine of Concrete Research, 1997: 81–98) makalesinde süper plastikleştirici ve belirli bağlayıcıların kullanılmasıyla oluşturulan yüksek performanslı betonların dayanıklılık özeliklerinin ele alındığı bir çalışma yer almaktadır. Böylesi bir betonun basınç dayanıklılık özelliği daha önceden araştırılmış, fakat esneklik özelliği (bükülmeyle oluşabilecek olumsuz durumlara karşı dayanma yetisinin ölçümü) ile ilgili pek fazla bir şey bilinmemektedir. Megapascal cinsiden (Mpa) makalede aşağıdaki data verilmiştir:

5.9 7.2 7.3 6.3 8.1 6.8 7.0 7.6 6.8 6.5 7.0 6.3 7.9 9.0
8.2 8.7 7.8 9.7 7.4 7.7 9.7 7.8 7.7 11.6 11.3 11.8 10.7

Kabul edelimki bu metod kullanılarak yapılmış olan bütün kirişlerin esneklik direncinin ortalamasını tahmin etmek istiyor olalım. Çok yüksek güven değeriyle, popülasyonun esneklik direncinin ortalaması 7.48 MPa ve 8.80 MPa aralığındadır ve bu aralığa güven aralığı yada tahmin aralığı denir. Yine yüksek güven değeriyle söylebilirizki böylesi bir tek kirişin esneklik direnci en az 7.35 MPa olarak tahmin edilir ve bu nümerik değere alt tahmin sınırı denir.

Olasılık ve İstatistik dersinde odak noktamız tahminsel istatistik üzerine olacak ve bu alana ait metodları tanıyacağız ki bilimsel çalışmalarda bu dal çok daha işlevseldir. Tahminsel istatistikde ele alacağımız prosedürler nokta tahmini, hipotez testleri, ve güven aralıklarının belirlenmesi olarak kategorize edilebilir.

Bir olasılık probleminde, üzerinde çalışılan popülasyonun özellikleri biliniyor olduğu varsayılır ve bu popülasyondan alınan bir örneklem üzerinde problem çözülür. Bir istatistik probleminde ise, ele alınan örneklemin özellikleri bilinir ve bu bilgiler kullanılarak örneklemin alındığı popülasyonla ilgili problemler çözülür ve arzu edilen bilgiler elde edilmeye çalışılır. Bu ilişkiyi aşağıdaki şekilde gözlemleyebiliriz.



Data Toplama

İstatistik bilimi sadece verilen datanın düzenlemesi ve analiz edilmesi üzerine çalışmaz ayrıca datanın toplanması üzerine teknikler geliştirir. Eğer data doğru bir şekilde toplanmazsa, araştırmacı kayda deger bir güven derecesiyle, cevabı merak edilen soruları cevaplayamaz. Bu durum genellikle problem üzerinde çalışılacak olan popülasyonla bu popülasyondan seçilen örneklemin uyumsuz olması halinde ortaya çıkar. Bu durumla ilgili Türkiye genelinde Tv izletiyicilerinin tercihleri üzerinde bir çalışma yapılacak olursa ve örneklem seçilirken sadece belirli bir yaş ve cinsiyete sahip kişiler arasından seçim yapılırsa, bu örneklemden elde edilecek sonuçlar popülasyonun tamamına ait sonuçlarla çelişecektir. Peki bunu nasıl yaparız?

- Bir popülasyondan örneklem seçmenin en kolay yolu bu seçimi rasgele bir şekilde yapmaktır. Örneğin, 1 milyon tane nesneden oluşan bir popülasyondan 100 nesneden oluşan bir örneklem seçerken bunu rasgele seçilen 100 nesneyle yaparsak başarabiliriz. Bu tür bir örnekleme **basit rasgele örneklem** denir. Bunu manuel bir sekilde yapabileceğimiz gibi bir yazılım programıylada yapabiliriz.
- Bazende bu seçimi daha pratik bir şekilde yapabilmek için yada popülasyon hakkında ekstra bilgi sahibi olmak yada elde edilecek sonuçların güvenilirliğini artırmak için alternatif yollar üretilmiştir. Bunlardan bir tanesi **katmanlı örneklem** seçimidir. Bu metod, popülasyonun bireylerinin tek bir yerde bulunması şartıyla popülasyonun gruplara ayrılması ve herbir gruptan bir örneklem alınmasıyla uygulanır. Örneğin, hekimlerin the Affordable Care Act (saglık sistemi) hakkındaki görüşleriyle ilgili bir istatistik çalışması yapılacak

olursa, örneklem seçimini cerrahlardan bir örneklem, radyolojistlerden bir örneklem, fizyoterapistlerden bir örneklem, … seçilerek yapılabilir. Bu şekilde herbir birimden elde edilecek sonuçlar sayesinde söz konusu saglık sisteminde göz ardı edilen birim olmayacaktır.

1.1 Betimsel İstatistikte Kullanılan Figürler ve Tablolar

Notasyonlar

- **Örneklem büyüklüğü** bir örneklemdeki gözlem sayısıdır ve genellikle n ile gösterilir. Yani $n = 4$ dört tane gözlemden oluşan bir örneklemi betimler. Bazen birden fazla örneklem üzerinde çalışılabilir bu gibi durumlarda $m = 3$ ve $n = 9$ şeklinde notasyonlar kullanılabileceği gibi uygun olmadığında $n_1 = 3,\ n_2 = 7, \ldots$ şeklinde bir notasyonda kullanılabilir.
- n tane gözlemden oluşan bir örneklemin gözlemlerini $x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n$ şeklinde gösterebiliriz. Burada örneklemler herhangi bir kurala göre sıralanabileceği gibi rasgele bir şekilde de listelenmiş olabilirler. x_i, örneklemdeki i . gözlemi temsil et mektedir.

Dal-Yaprak Grafiği

$x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n$ gözlemlerinden oluşan bir örneklemi ele alalım ve herbir gözleminde en az iki basmaktan oluştuğunu varsayılım. Bu veri kümesi hakkında hızlı bir şekilde bilgilendirici bir görsel sunmanın yollarından bir tanesi dal-yaprak grafiği çizmektir. Bunu yapmak için aşağıdaki adımları takip edebiliriz:

1. Dallar için en büyük basmak degerleri seçeriz (onlar basamağı) ve böylece küçük basamak degerleri (birler basamağı) yaprakları oluşturur,
2. Olası dallar dikey bir şekilde listelenir,
3. Her bir dala ait yapraklar yatay olarak listelenir,
4. Grafiğin uygun bir yerinde dal ve yaprağın neyi temsil ettiği ifade edilir.

Örnegin, bir sınavda öğrencilerin aldığı notlar 0 ile 100 arasında ise, 85 notu için 8 dala 5 ise yaprağa karşılık gelir. Eğer öğrencilerin tamamı 90lı, 80li, 70li notları aldıysa (hocanın hayali !) Bu durumda dal yaprak grafiğinde sadece 3 tane dal var demektir. Belki daha bilgilendirici bir grafik çizmek için böylesi bir durumda her bir dalı ikiye ayırabiliriz; örneğin, 9Y 95 ve daha fazlası notlar için ve 9D ise 94,…,90 notları için kullanabiliriz.

Örnek: Üniversite öğrencileri arasında en yaygın şikayet ihtiyaç duyduklarından çok daha az uyuyabilmeleri olmuştur. Bu hususta "Class Start Times, Sleep, and Academic Performance in College: A Path Analysis" (Chronobiology Intl., 2012: 318–335) makalesi uyku süresine etkisi olan faktörleri araştırmıştır. Aşağıda 253 tane öğrenciye ait iki hafta boyunca günlük uyku saatlerinin ortalaması alınarak toplanmış bir dataya ait dal-yaprak grafiği çizilmiştir.

Bu grafiğin sunduğu bilgileri aşağıdaki gibi listeleyebiliriz:

- Gözlemlerin neye benzediğine dair bilgi,
- Gözlemlerin dağılımı
- Gözlemler arasındaki boşluklar
- Gözlemlerin dağılımındaki simetri
- Tepe noktaları
- Dışlanmış değerler

5L	00
5H	6889
6L	000111123444444
6H	55556778899999
7L	000011111112222223333333344444444
7H	55555555666666666666777777888888888999999999999999
8L	00000000000011111122222222222222222333333333334444444444444
8H	5555555566666666677777788888888899999999999
9L	00001111111222223334
9H	666678999
10L	00
10H	56

Stem: ones digit
Leaf: tenths digit

Figure 1.4 Stem-and-leaf display for average sleep time per day

Alternatif grafik örneği

64	35	64	33	70			
65	26	27	06	83			
66	05	94	14				
67	90	70	00	98	70	45	13
68	90	70	73	50			
69	00	27	36	04			
70	51	05	11	40	50	22	
71	31	69	68	05	13	65	
72	80	09					

Stem: Thousands and hundreds digits
Leaf: Tens and ones digits

Nokta Grafiği

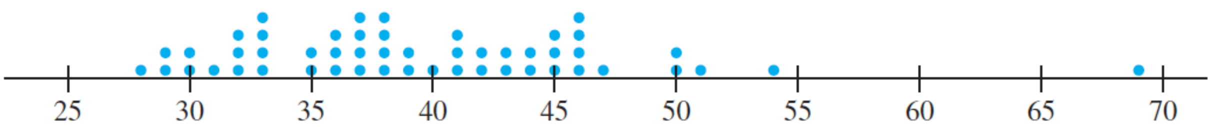
Küçük büyüklükteki nümerik verilerin görsel özetlenmesinde nokta grafiği çok kullanışlıdır. Bununla ilgili bir örneği aşağıda bulabilirsiniz.

Sınıf No	Sınıf Limitleri	Gözlem Sayısı (frekans) f_i

Örnek: Amerikada azalan üniversite mezun sayısı artan bir endişeye dönüşmüştür. Dünya sıralamasında uzun yıllar 1. Sırada yer alırken son yıllarda 16. Sıraya gerilemiştir. 52 eyaletin herbirinde 25-34 yaş aralığında 2010 yılında 2. lisans derecesine sahip kişilerin yüzdesi aşağıda verilmiştir:

31.5	32.9	33.0	28.6	37.9	43.3	45.9	37.2	68.8	36.2	35.5
40.5	37.2	45.3	36.1	45.5	42.3	33.3	30.3	37.2	45.5	54.3
37.2	49.8	32.1	39.3	40.3	44.2	28.4	46.0	47.2	28.7	49.6
37.6	50.8	38.0	30.8	37.6	43.9	42.5	35.2	42.2	32.8	32.2
38.5	44.5	44.6	40.9	29.5	41.3	35.4				

Bu veri kullanılarak çizilen nokta grafiği aşağıdaki gibidir:



Histogram Grafiği

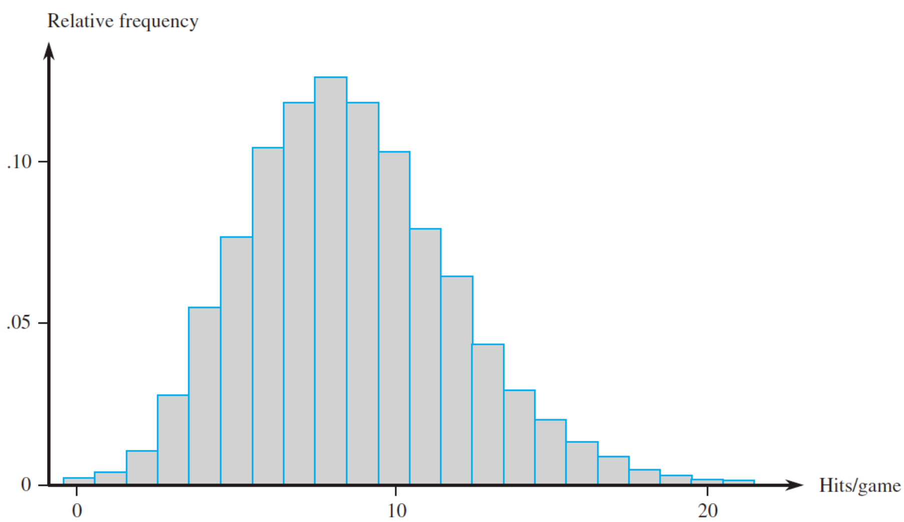
Nokta grafiğinin aksine eğer nümerik değerlerden oluşan data çok büyükse, bu durumda histogram grafiği güzel bir seçenek olacaktır. Bu grafik çizilirken ilk olarak bir frekans tablosu aşağıdaki adımlar takip edilerek çizilir:

1. Gözlemlerin sayısı belirlenir. $n = ?$
2. B en büyük değer, K en küçük değer olmak üzere, gözlemler arasında bu değerler belirlenir ve $R = B - K$ farkı hesaplanır. Bu fark gözlem aralığının uzunluğudur.
3. Gözlemleri $k \geq \sqrt{n}$ (tamsayı) tane sınıfa ayırırız. Örneğin, $n = 73$ ise grup sayısı $\sqrt{73} = 8{,}544 \leq k = 9$ olur. Ancak burada bahsi geçen sınıf sayısı kesin bir deger degildir. Önemli olan datayı anlamlı sayıda sınıfa ayırmaktır.

4. $g = \dfrac{R}{k}$ sınıfların genişliğini temsil eden degerdir. Gözlemler tam sayıdan oluşuyorsa g ninde tam sayı olarak seçilmesi güzel olur.
5. Sınıf limitleri ise en küçük gözlemden başlamak yada en küçük gözlemi bulundurmak üzere seçilen degere sınıf genişliğinin eklenmesiyle bulunur. Örneğin, gözlemlerimiz tamsayılardan oluşsun, 1 en küçük gözlemimiz ve sınıf genişliğimizde 6 olsun. Bu durumda sınıf limitleri 0 ı başlangıç kabul edecek olursak [0,5], [6,11],…
6. Sınıf frekanslarını $f_1, f_2, \ldots, f_k$ ile gösterirsek f_i degeri i . sınıfa sınıf limitleride dahil olmak üzere düşen gözlem sayısıdır.

Bu adımlar takip edilerek elde edilecek degerlerle aşağıda frekans tablosu olarak adlandırılan tablo doldurulur.

Hits/Game	Number of Games	Relative Frequency	Hits/Game	Number of Games	Relative Frequency
0	20	.0010	14	569	.0294
1	72	.0037	15	393	.0203
2	209	.0108	16	253	.0131
3	527	.0272	17	171	.0088
4	1048	.0541	18	97	.0050
5	1457	.0752	19	53	.0027
6	1988	.1026	20	31	.0016
7	2256	.1164	21	19	.0010
8	2403	.1240	22	13	.0007
9	2256	.1164	23	5	.0003
10	1967	.1015	24	1	.0001
11	1509	.0779	25	0	.0000
12	1230	.0635	26	1	.0001
13	834	.0430	27	1	.0001
				19,383	1.0005



Merkezi Eğilim Ölçüleri

$x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n$ gözlemleri verildiğinde,

- **<u>Örneklem ortalaması</u>** $\bar{x}$ ile gösterilir ve n tane gözlemin ait aritmetik ortalamasıdır.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$$

- **<u>Medyan</u>** yada bir diğer adıyla orta deger, gözlemler küçükten büyüğe doğru sıralandığında tam olarak ortadaki gözlem yada değerdir ve M ile gösterilir. Gözlem sayısına bağlı olarak medyan değeri aşağıdaki şekilde bulunur:

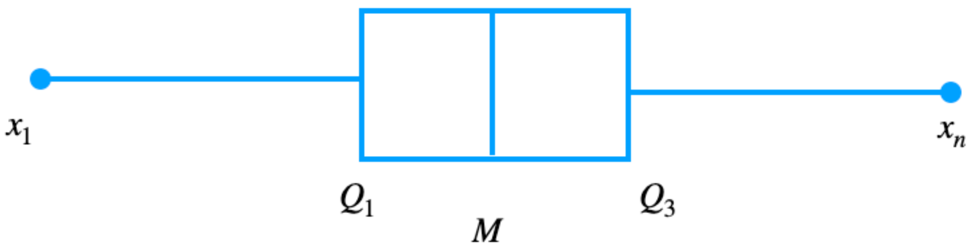
$$\tilde{x} = M = \begin{cases} x_{m+1} & \text{eğer } n = 2m+1 \\ \frac{x_m + x_{m+1}}{2} & \text{eğer } n = 2m+1 \end{cases}$$

- **Çeyrekler Q_1 ve Q_3**

Medyan kullanılarak veri kümesi medyan degerinin solunda ve sağında eşit sayıda gözlem bulunduracak şekilde iki eşit parçaya ayrılır. Q_1 ve Q_3 degerleri sırasıyla veri kümesinin 1. ve 2. yarı parçalarının medyanlarıdır. Yukarıdaki formülden faydalanarak bu degerler rahatlıkla bulunabilir.

- **<u>Kutu Grafiği</u>**

Merkezi eğilim ölçüleri kullanılarak çizilen bir grafiktir. Gözlemlerin nasıl dağıldığıyla ilgili çok net bir görsel sunar.



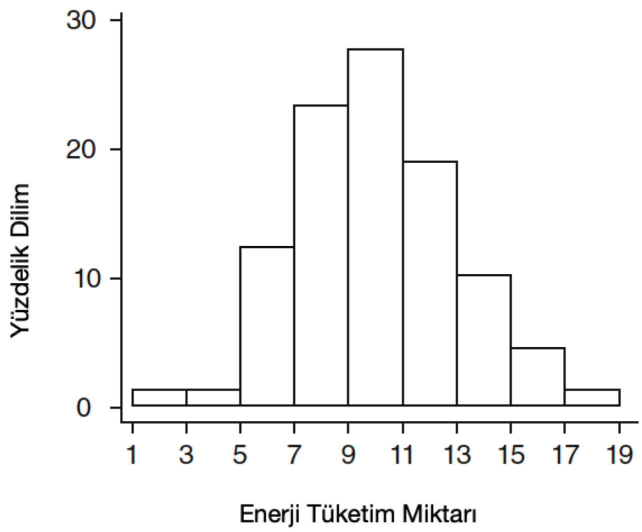
$x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n$ nin küçükten büyüğe doğru sıralandığı gözününe alınırsa, x_1 ve x_n gözlemleri sırasıyla veri kümesindeki en küçük ve en büyük gözlemdir.

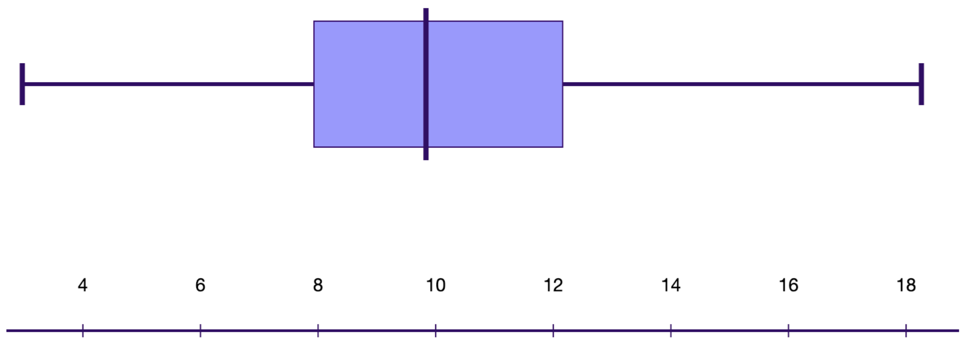
Dal	Yaprak
2	97
4	0,00
5	,20,56,94,98
6	,35,62,72,78,80,85,94
7	,15,16,23,29,62,62,69,73,87,93
8	,00,26,29,37,47,54,58,61,67,69,81
9	,07,27,37,43,52,58,60,76,82,83,83,84,96
10	,04,21,28,28,30,35,36,40,49,50,64,95
11	,09,12,21,29,43,62,70,70
12	,16,19,28,31,62,69,71,91,92
13	,11,38,42,43,47,60,96
14	,24,35
15	,12,24
16	,06,90
18	0,26

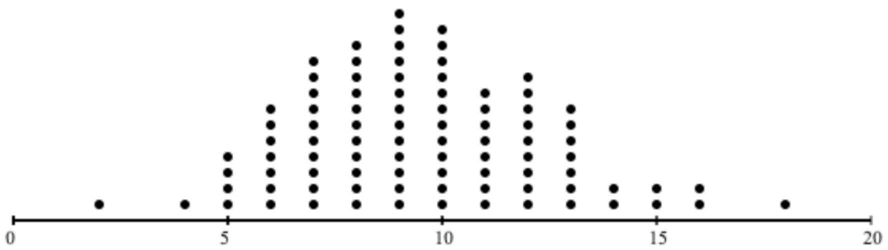
Örnek: Enerji şirketleri müşterilerinin oluşturacağı talebi doğru tahmin etmek için müşterilerinin mevcut enerji tüketimleri hakkında bilgiye ihtiyacı vardır. Wisconsin Power and Light şirketinden bir araştırmacı belirli bir dönemde 90 tane gazla ısınan evin enerji tüketimlerini belirlemiş ve aşağıdaki veri kümesini elde etmiştir. Bu veriyi kullanarak yukarıda tanımlamış olduğumuz grafikleri elde etmeye çalışalım.

2.97	4.00	5.20	5.56	5.94	5.98	6.35	6.62	6.72	6.78
6.80	6.85	6.94	7.15	7.16	7.23	7.29	7.62	7.62	7.69
7.73	7.87	7.93	8.00	8.26	8.29	8.37	8.47	8.54	8.58
8.61	8.67	8.69	8.81	9.07	9.27	9.37	9.43	9.52	9.58
9.60	9.76	9.82	9.83	9.83	9.84	9.96	10.04	10.21	10.28
10.28	10.30	10.35	10.36	10.40	10.49	10.50	10.64	10.95	11.09
11.12	11.21	11.29	11.43	11.62	11.70	11.70	12.16	12.19	12.28
12.31	12.62	12.69	12.71	12.91	12.92	13.11	13.38	13.42	13.43
13.47	13.60	13.96	14.24	14.35	15.12	15.24	16.06	16.90	18.26

Sınıf No	Sınıf Limitleri	Gözlem Sayısı (frekans) f_i	Göreceli Frekans
1	$1 \leq x < 3$	1	0,011
2	$3 \leq x < 5$	1	0,011
3	$5 \leq x < 7$	11	0,122
4	$7 \leq x < 9$	21	0,233
5	$9 \leq x < 11$	25	0,278
6	$11 \leq x < 13$	17	0,189
7	$13 \leq x < 15$	9	0,100
8	$15 \leq x < 17$	4	0,044
9	$17 \leq x < 19$	1	0,011







- Gözlem sayısı $n = 90$,
- Veri küçükten büyüğe doğru sıralanmış,
- Verinin minimum ve maksimum değerleri $K = 2{,}97$ ve $B = 18{,}26$,
- Verinin range $R = 18{,}26 - 2.97 = 15{,}29$
- Verinin kaç tane sınıfa ayrılabileceğini bulalım, $\sqrt{90} = 9{,}49$ olduğundan sınıf sayısını 10 olarak ele alabiliriz.
- Sınıf genişliği $h = \dfrac{R}{k} = \dfrac{15{,}29}{10} = 1{,}529$ olur. Daha güzel bir görsel elde edebilmek için tamsayılar üzerinden yola devam edebiliriz. Bu sebeblede sınıf genişliğini 2 olarak alalım.

ALIŞTIRMALAR 1

1. İşlerin yoğun geçtiği bir sezonda bir otomobil bayisindeki bir satış elemanının 100 gün boyunca günlük ilgilendiği müşteri sayısı için aşağıdaki veri kümesi verilmiştir.

23	16	14	20	27
19	17	17	16	17
26	14	9	11	14
11	17	13	19	17
20	17	20	16	16

11	24	21	27	5
17	20	8	16	17
16	16	14	22	13
14	27	19	16	20
16	15	9	17	8

19	14	8	19	27
22	21	0	9	3
20	14	6	11	12
7	20	9	13	20
10	16	10	19	13

15	15	14	13	25
14	9	16	8	16
7	8	13	5	13
9	16	19	14	29
18	14	18	13	10

Bu veri kümesini kullanarak aşağıdaki sorulara cevap veriniz.

a) Veriyi küçükten büyüğe doğru sıralayınız.
b) Dal-yaprak grafiğini çiziniz.
c) Nokta grafiğini çiziniz.
d) Frekans tablosunu oluşturunuz.
e) Histogram grafiğini çiziniz.
f) Merkezi eğilim ölçülerini bulunuz.
g) Kutu grafiğiniz çiziniz.
h) Çizmiş olduğunuz her bir grafiğin ve tablonun veriyi ve verinin dağılımını ifade etmekte ne kadar etkili olduğunu açıklayınız.

2. Sert iklimlerin yaşandığı bölgelerde, inşaat çeliğindeki çürüme betonarme yapılar için ciddi bir problem teşkil etmektedir. Bu sebebten dolayı araştırmacılar alaşımlı metallerden oluşan yapı malzemelerinin kullanımıyla ilgili araştırmalar yapmaktadır. Cam lifli plastik bir yapı çubuğunun beton içerisinde bükülmesiyle ilgili yapılan bir araştırma yapılmıştır ("Design Recommendations for Bond of GFRP Rebars to Concrete," J. of Structural Engr., 1996: 247–254). Bu çubuğun bükülme direkleri ölçülmüş ve aşağıdaki veri çalışmadan alınmıştır. Yukarıdaki soruyu bu veri için tekrar çözünüz.

11.5	12.1	9.9	9.3	7.8	6.2	6.6	7.0	13.4	17.1	9.3	5.6
5.7	5.4	5.2	5.1	4.9	10.7	15.2	8.5	4.2	4.0	3.9	3.8
3.6	3.4	20.6	25.5	13.8	12.6	13.1	8.9	8.2	10.7	14.2	7.6
5.2	5.5	5.1	5.0	5.2	4.8	4.1	3.8	3.7	3.6	3.6	3.6

2. OLASILIK KURAMINA GİRİŞ

Olasılık kelimesi belirsizliklerin ve rasgeleliğin çalıştığı bilim dalıdır. Herhangi bir sayıda olası sonuçların meydana geldiği durumlar için, olasılık teorisi belirli sonuçların elde etme şansını değerlendirmek için metodlar sunar.

2.1 Örnek Uzay ve Olaylar

Nasıl sonuçlanacağına dair bir belirsizlik olan aktivite yada sürece **deney** denir. Olasılık teorisindeki deney bilinen laboratuvar deneyi değildir, bundan çokta geniş bir kavramdır. Örneğin, laboratuarda yapılan bir deney, bir bozuk paranın bir kez yada daha fazla sefer atılması, desteden bir kartın çekilmesi, bir grup insan içerisinde belirli bir kan grubunun bulunması, çeşitli çelik çubukların dayanıklılıklarının ölçülmesi olasılık teorisinin ilgilendiği deneylerdir.

Örnek Uzay

Örnek uzay bir deneyin bütün olası sonuçlarının listelendiği kümedir ve S ile gösterilir. Örneğin, bir madeni paranın atılması deneyinde olası sadece iki sonuç vardır: Y (yazı) ve T (tura). Bu durumda örnek uzay kümesi $S = \{Y, T\}$ olur. İlk olarak örnek uzayın elemanlarının neye benzediğini ifade etmek, örnek uzayı yazmayı ve saymayı kolay ve mümkün kılar.

Örnek: İki adet madeni paranın atılması deneyi için örnek uzay:$S = \{(Y, Y), (Y, T), (T, Y), (T, T)\}$

$$\boxed{A \text{ ve } B \text{ olayları ayrıktır } \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing}$$

Örnek: Bir madeni paranın ve bir zarın aynı anda atılması deneyi için örnek uzayı yazınız.

Örnek: İki zarın atılması deneyi için örnek uzayı yazınız.

Örnek: iki madeni paranın ve iki zarın atılması deneyi için örnek uzayı yazınız.

Örnek: Bir zarın n kez atılması deneyinde kaç tane sonuç vardır?

Olay

Bir deneyin sonuçlarından oluşan kümeye olay denir. Tek bir sonuçtan oluşan olaya basit olay denir. Olaylar, örnek uzayın bir altkümesi olduğundan, tıpkı kümelerdeki gibi büyük harflerle gösterilir.

Örnek: Özkanlar kavşağında iki tane benzin istasyonu ve her bir istasyonda 6 şar tane pompa vardır. Günün belirli bir anında her iki istasyonda dolu olan popa sayılarının belirlenmesi deneyi için örnek uzayı elemanlarını listeleyelim.

	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
0	(0, 0)	(0, 1)	(0, 2)	(0, 3)	(0, 4)	(0, 5)	(0, 6)
1	(1, 0)	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 0)	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 0)	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 0)	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 0)	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 0)	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Listeleme işlemi sonuclar fazla olduğunda çok zaman alıcı olmakta! Bu sebeble ortak özellik yönetemiyle örnek uzayı yazabiliriz.

$$\mathcal{S} = \left\{(x, y) \,|\, x, y \in \{0,1,\ldots,6\}\right\} \Rightarrow |\mathcal{S}| = 7 \times 7 = 49 \text{ olur.}$$

Peki bu deneyde her iki benzinlikte toplamda dolu olan pompa sayısının 5 olması olayını yazalım.

$$A = \{(5,0), (4,1), (3,2)(2,3), (1,4), (0,5)\} \Rightarrow |A| = 5$$

Yapılan bir deneyde ortak eleman bulundurmayan iki olaya **ayrık olay** denir.

NOT: Gerek örnek uzay ve gereksede olaylar birer küme olduğundan, kümeler teorisindeki bütün kural ve operasyonlar onlar içinde geçerlidir.

ALIŞTIRMALAR 2

1. 3 kişisinden oluşan bir aile, 3 birimden oluşan bir tıbbi kliniğe gidiyorlar (her birimde mutlaka doktor bulunuyor). Belirli bir haftada, her bir aile üyesi kliniği bir kez ziyaret ediyor ve rasgele bir birimde muayene oluyor. Aile fertlerinin ziyaret ettikleri klinik birimlerinin listelenmesi deneyinde

a. Örnek uzayın elemanları neye benzediğini tanımlayınız.
b. Örnek uzayı yazınız.

Olasılık Aksiyomları

i. Her A olayı için, $P(A) \geq 0$.

ii. $P(\mathscr{S}) = 1$

iii. $A_1, A_2, \ldots$ ayrık olayların bir kolleksiyonu olmak üzere

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = \sum_{i=1}^{\infty} p(A_i).$$

c. Örnek uzayın eleman sayısını bulunuz.
d. Her bir aile üyesinin ayni birime gitmiş olması olayını yazınız.
e. Her bir aile üyesinin farklı birimlere gitmiş olması olayını yazınız.

2. Bir üniversite kütüphanesinde belirli bir kitabın beş kopyası rafta ters bir şekilde durmakta. Kitapların iki tanesi ikinci baskı ve diğer üçü ise ilk baskıdır. Rasgele bir şekilde bu kitapları inceleyen bir öğrenci, ikinci baskı bir kitabı bulduğunda aramayı bırakacaktır.

a. Örnek uzayın elemanları neye benzediğini tanımlayınız.
b. Örnek uzayı yazınız.
c. Örnek uzayın eleman sayısını bulunuz.
d. A olayı ilk kitapta ikinci baskının bulunmuş olması olsun. A olayının elemanlarını yazınız.
e. Birici baskı kitaplardan sadece birinin incelenmediği sonuçlar B olayını oluştursun. Bu durumda B olayını yazınız.

3. Herhangi bir deneye ait A ve B olayları için aşağıdaki eşitlikleri ispatlayınız.

a. $(A \cup B)' = A' \cap B'$
b. $(A \cap B)' = A' \cup B'$
c. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

2.2 Olasılık Nedir?

Bir deney ve bu deneyin örnek uzayı $\mathcal{S}$ verildiğinde, olasılığın amacı herbir A olayını bir $P(A)$ sayısıyla eşlemektir, öyleki $P(A)$ sayısı A olayının gerçekleşme şansını kesin ölçümüdür. Bu olasılık eşleşmesinin anlamlı olabilmesi için, aşağıdaki özelliklerin sağlanması gerekir.

Teorem: $\varnothing$ içerisinde hiçbir sonuç buldurmayan olayı göstermek üzere, $P(\varnothing) = 0$

Bu aşamada 3. olasılık aksiyomunun neden sonlu olmadığı sorusu akla gelebilir. Daha kapsayıcı olduğu için o formda verilmiştir.

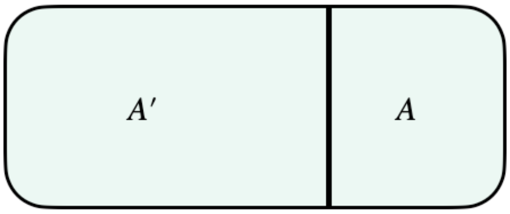
Kabul edelimki $A_1, \ldots, A_n$ ayrık olaylar ve $A_{n+1} = \varnothing, A_{n+2} = \varnothing, \ldots$olsun. Bu durumda listelenen olayların tamamı ayrık olaydır. 3. olasılık aksiyomu gereği

$$
\begin{aligned}
P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) &= P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup A_{n+1} \cup A_{n+2} \cup \ldots) \\
&= P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} p(A_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} p(A_i) + \sum_{i=n+1}^{\infty} p(A_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} p(A_i)\,.
\end{aligned}
$$

Teorem. Herhangi bir A olayı için, $P(A) + P(A') = 1$ olur. Eşdeğer olarak, $P(A') = 1 - P(A)$ olur.
İspat.
$A \ ve \ A'$ olayları ayrık iki olay olup, $\mathcal{S} = A \cup A'$. Bu durumda 2 ve 3 numaralı olasılık aksiyomunlarının bir neticesi olarak, $P(A) + P(A') = P(A \cup A') = P(\mathcal{S}) = 1$ olur.

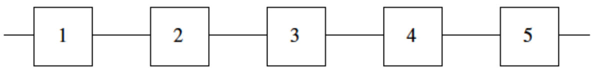
NOT: Bazı durumlarda yapılan deneyin gerek örnek uzayda gereksede bir olay içerisinde yer alan sonuçlarını teker teker yazmak yük degildir yada olasılığın amacı için yersizdir. Bu gibi durumlarda sonuçların neler olduğundan daha çok kaç tane olduklarıyla ilgileniriz, yani $\mathcal{S} \ ve A$ kümesinin elemanlarını sayarız. Bu sayma işlemi çoğunlukla $\mathcal{S}$ için pratik iken bazen A olayı için o denli pratik olmayabilir. Bu gibi durumlarda A olayındaki sonuçların sayısını bulmak için aşağıdaki seçeneklerden birini takip etmemiz gerekir:

İ. $|A|$ yı belirlemek için direk A daki sonuçları sayarız, ya da
İİ. $|A| = |\mathcal{S}| - |A'|$ olduğundan A' deki sonuçları sayarız.



$\mathcal{S}$ örnek uzayı

Örnek: Şekildeki gibi beş özdeş parçanın birleşiminden oluşan bir sistemin çalışabilmesi için bütün bileşenlerin başarılı bir şekilde çalışması gerekmektedir.



A sistemin başarısız olduğu sonuçlardan oluşan bir olay olsun. Bu durumda $|\mathcal{S}| = ? \ ve |A| = ?$

Teorem: Her A olayı için, $0 \leq P(A) \leq 1$.

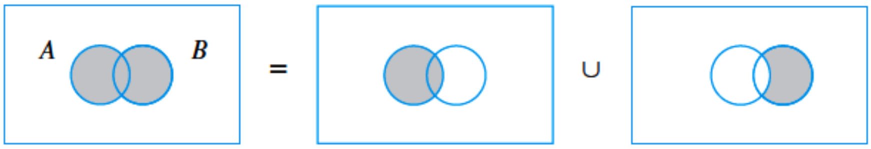
Yani hiçbir olayın olasılığı negatif yada 1 den büyük olamaz.
%150 şansla, %1000 ihtimalle gibi ifadeler olasılık kuramında kullanılması mümkün değildir.

Teorem: Herhangi iki A ve B olayı için,

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).}$$

İspat.

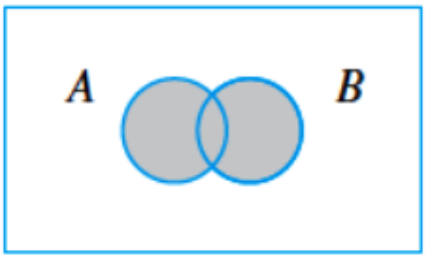
$$\begin{aligned} P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap A') &= P(A) + [P(B) - P(A \cap B)] \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$



Örnek: Belirli bir yerleşim alanındaki hanelerin, %60 ı internet servisi, %80 i kablolu tv servisi, ve %50 side her iki servisi yerel bir firmadan alıyorlar. Seçilen rasgele bir hanenin bu iki hizmetten en az birini alıyor olma ve sadece birini alıyor olma ihtimali nedir?

$A = \{$internet hizmeti alanlar$\}$ ve $B = \{$tv hizmeti alanlar$\}$ olaylarını tanımlayalım.

Örnekte bizden bulmamız istenen olasılıklar sırasıyla $P(A \cup B)$ ve $P((A \cup B) \backslash (A \cap B))$ dir.



$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 0{,}6 + 0{,}8 - 0{,}5 \\ &= 0{,}9 \text{ şimdide diğer olasılığı bulalım} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P((A \cup B) \backslash (A \cap B)) &= P\big((A \backslash (A \cap B)) \cup (B \backslash (A \cap B))\big) \\ &= P(A \backslash (A \cap B)) + P(B \backslash (A \cap B)) \\ &= 0{,}1 + 0{,}3 \\ &= 0{,}4. \end{aligned}$$

Teorem: Herhangi $A, B,$ ve C olayları için,

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) \\ -P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Olasılıkların Sistematik Olarak Belirlenmesi

Sonlu yada sayılabilir sonsuz olacak şekilde bir $\mathcal{S}$ örnek uzayını ve $\mathcal{S}$ deki herbir elemanı temsilen $E_1, E_2, \ldots$ basit olaylarını (tek bir elemandan oluşan olay) ele alalım. Bu deneye ait bir A olayının olasılığını hesaplayacak olursak, 3. olasılık aksiyomundan dolayı

$$P(A) = P\Big(\bigcup_{E_i \subseteq A} E_i\Big) = \sum_{E_i \subseteq A} P(E_i).$$

Eğer yapılan bir deneyde elde edilecek olası her sonuç eşit ihtimalle gerçekleşebiliyorsa, bu deneyin sonuçlarına eşit ihtimalli denir. Yani $P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = \ldots$ olması durumudur. Aksi söylenmediği müddetçe, çalışmalarımızda ele alacağımız deneyler bu türden olacaktır. Peki aksi nedir? Hileli bir madeni parayı ele alalım, öyleki yazı gelme ihtimali her zam %75 olsun. Bu paranın atılması durumunda sadece iki sonuç vardır, yani $\mathcal{S} = \{Y, T\}$ iken yukarıdaki argümana göre $E_1 = \{Y\}$ ve $E_2 = \{T\}$ olur. $P(E_1) = 0{,}75$ iken $P(E_2) = 0{,}25$ dir.

Eşit ihtimalli sonuçlara sahip bir deneyde A olayının gerçekleşme ihtimali nedir?

Bunun için ilk olarak bir basit olayın gerçekleşme ihtimali hesaplayalım. Kabul edelimki $\mathcal{S}$ örnek uzayı eşit ihtimalli N tane sonuçtan oluşsun. Bu durumda

$$1 = P(\mathcal{S}) = \sum_{i=1}^{N} P(E_i) = \sum_{i=1}^{N} p = pN \Rightarrow p = \frac{1}{N} \text{ olur.}$$

$$
\begin{aligned}
P(A) = P\Big(\bigcup_{E_i \subseteq A} E_i\Big) &= \sum_{E_i \subseteq A} P(E_i) \\
&= \sum_{E_i \subseteq A} p \\
&= |A|p = \frac{|A|}{N} \\
&= \frac{|A|}{|\mathcal{S}|} \\
&= \frac{A \textbf{ daki sonuçların sayı}}{\textbf{Bütün sonuçların sayı}}
\end{aligned}
$$

Örnek: Bir iki zarın atılması deneyinde,

a. üst yüze gelen sayıların toplamının tek olma ihtimali nedir?

b. Üst yüze gelen sayıların birinin tek ve diğerinin çift olma ihtimali nedir?

c. Üst yüze gelen sayılardan birinin 5 olma ihtimali nedir?

d. Üst yüze gelen sayıların toplamının en fazla 6 olma ihtimali nedir?

e. Üst yüze gelen sayıların toplamının 2 den büyük olma ihtimali nedir?

Örnek: Büyük bir üniversitede rasgele seçilen bir öğrencinin Visa kart sahibi olması A olayını ve MasterCard sahibi olması ise B olayını tanımlasın. Kabul edelimki $P(A) = 0{,}6$ ve $P(B) = 0{,}4$ olsun.

a. $P(A \cap B) = 0{,}5$?

b. Seçilen öğrencinin bu iki karttan en az birine sahip olma ihtimali nedir?

c. Seçilen öğrencinin bu iki karttan hiçbirine sahip olamama ihtimali nedir?

d. Seçilen öğrencinin Visa kartının olup MasterCard kartının olmama ihtimali nedir?

e. Seçilen öğrencinin bu kartlardan sadece birine sahip olma ihtimali nedir?

Örnek: Bir bilgisayar danışmanlık firması kendisine sunulan üç projeden birine ödül verecektir. Her $i = 1,2,3$ için, $A_i = \{$i. projenin seçilmesi$\}$ olmak üzere, $P(A_1) = .22$, $P(A_2) = .25$, $P(A_3) = .28$, $P(A_1 \cap A_2) = .11$, $P(A_1 \cap A_3) = .05$, $P(A_2 \cap A_3) = .07$, $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = .01$ olasılıkları verilsin. Aşağıdaki olayların neyi ifade ettiğini yazınız ve hesaplayınız.

a. $A_1 \cup A_2$

b. $A_1' \cap A_2'$ [*Hint:* $(A_1 \cup A_2)' = A_1' \cap A_2'$]

c. $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ **d.** $A_1' \cap A_2' \cap A_3'$

e. $A_1' \cap A_2' \cap A_3$ **f.** $(A_1' \cap A_2') \cup A_3$

Örnek: Belirli bir sistem üç farklı hata üretmektedir. Her $i = 1,2,3$ için, $A_i = \{$sistemin i hatasını üretmesi $\}$ olmak üzere aşağıdaki olasılıklar bilinmektedir.

$$
\begin{aligned}
&P(A_1) = .12 \quad P(A_2) = .07 \quad P(A_3) = .05 \\
&P(A_1 \cup A_2) = .13 \quad P(A_1 \cup A_3) = .14 \\
&P(A_2 \cup A_3) = .10 \quad P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = .01
\end{aligned}
$$

a. Sistemin 1 numaralı hatayı vermemiş olma ihtimali nedir?
b. Sistemin 1 ve 2 numaralı hataları vermiş olma ihtimali nedir?
c. Sistemin 1 ve 2 numaralı hatayı üretmiş ama 3 numaralı hatayı üretmemiş olma ihtimali nedir?
d. Sistemin sadece iki hata üretmiş olma ihtimali nedir?

2.3 Sayma İlkeleri

Çarparak Sayma ilkesi

Yapılan iki deneyden ilkinde m tane sonuç ve herbir sonuç için 2.deneyin n tane sonucu mevcutsa, bu iki deneyin ortak yapılması ile gerçekleştirilen deneyin toplamda mn tane sonucu olur.

Örnek: Herbirinin 3 çocuğu olan 10 bayandan oluşan bir topluluk içerisinden yılın annesi ve yılın çocuğu seçilecektir. Bu seçim kaç farklı şekilde yapılabilir?

Genelleştirilmiş Sayma İlkesi

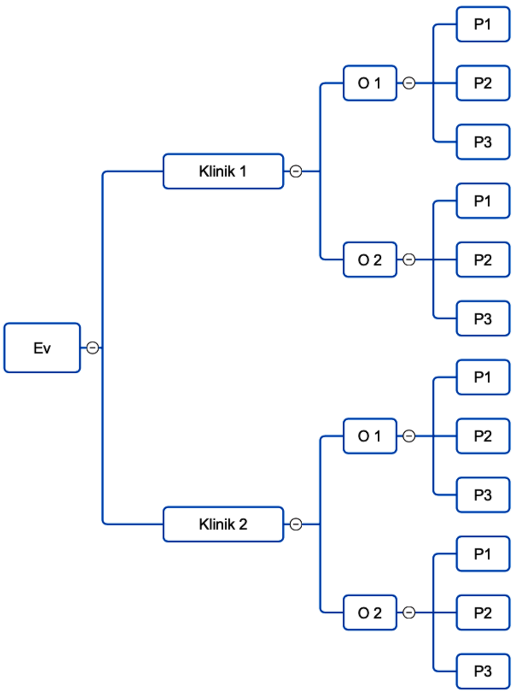
Yapılan r tane deneyde, 1. deneyde n_1 tane sonuç, bu sonuçların herbiri için 2. deneyde n_2 tane sonuç ve bu sonuçların herbiri için 3. deneyde n_3 tane sonuç, … elde ediliyor. Bu durumda r tane deneyin gerçekleşmesiyle yapılan bu deneyin olası bütün sonuçlarının sayısı aşağıdaki gibidir:

$$|\mathcal{S}| = n_1 n_2 \ldots n_r.$$

Burada fark etmemiz gereken bir bakış açısı var şöyleki: mevzu bahis deney bir tek deney ve $|\mathcal{S}| = n_1 n_2 \ldots n_r$ tane sonucu var ancak bu deneyin her bir sonucunun r adımda tamamlanıyor.

Örnek: Yeni bir şehre taşınan bir ailenin obstetrician (kadın doğum uzmanı) ve pediatrician (çocuk) doktoru seçip kayıt olmaları gerekmektedir. Ulaşımı kolay olan iki tane medikal klinik var ve her birinde 2 kadın doğum uzmanı ve 3 çocuk doktoru bulunmakta. Aile doktorları aynı klinikten seçerlerse sahip oldukları sağlık sigortasından indirim kazanabilmektedirler. Bunu kaç farlı şekilde yapabilirler?

$$|\mathcal{S}| = (2)(2)(3) = 12$$



Sonuçları üç adımda elde etmek

Örnek: n elemanlı bir tanım kümesine sahip ve sadece 1 ve 0 değerlerini alan kaç tane noktada tanımlı kaç tane fonksiyon vardır?

Permütasyon

Permütasyon kelimesi dilimize Ingilizceden **permutation** kelimesinden geçmiştir. Köken olarak permutation kelimesi ise **permute (sıralamak, sıraya koymak)** fiilinin isimleşmiş halidir. Dolayısıyla permütasyon dediğimizde sıralama olduğunu düşünmek işleri daha kolay bir hale getirmektedir.

Tanım: $0 \leq k \leq n$ negatif olmayan tam sayıları için, n elemanlı bir kümenin k elemanlı permütasyonlarının (sıralı k-altkümeleri) sayısı $P(n, k)$ ile gösterilir.

¨n elemanlı bir kümenin permütasyonları ¨ ifadesi, n elemanlı bir kümenin elemanlarının tamamının sıralanmasına karşılık gelir. Bu durumda;

$$\begin{aligned} P(n, n) &= (\text{1. pozisyon})\ (\text{2. pozisyon})\ (\text{3. pozisyon})\ldots(\text{(n-2). pozisyon})\ (\text{(n-1). pozisyon})\ (\text{n. pozisyon}) \\ &= (n)\ (n-1)\ (n-2)\ldots(3)\ (2)\ (1) \\ &= n! \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(n, k) &= (\text{1. pozisyon})\ (\text{2. pozisyon})\ (\text{3. pozisyon})\ldots(\text{(k-3). pozisyon})\ (\text{(k-2). pozisyon})\ (\text{k. pozisyon}) \\ &= (n)\ (n-1)\ (n-2)\ldots((k-2))\ ((k-1))\ ((n-(k-1)) \\ &= \end{aligned}$$

$$P(n,0) =$$

Örnek: Olasılık ve İstatistik dersinden 6 erkek ve 4 bayan öğrenci sınava girmiştir ve aynı notu alan iki öğrenci yoktur. Eğer öğrenciler aldıkları notlara göre sıralanancaklarsa,

a. Kaç farklı sıralama mevcuttur?
b. Erkekler ve bayanlar sadece kendi aralarında sıralanmışlarsa kaç farklı sıralama mevcuttur?

Örnek: Birbirlerinden farklı 4 Matematik, 2 Kimya, 3 Fizik ve 1 biyoloji kitabını bir öğrenci yanyana sıralayacaktır.

a. Kaç farklı sıralama vardır?
b. Her tür yanyana olmak üzere kaç farklı sıralama vardır?
c. Eğer aynı tür kitaplar özdeş (birbirinden ayırt edilemez) iseler kaç farlı sıralama var?

Tekrarlı Kümelerin Permütasyonları

Negatif olmayan tamsayıların toplamı $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$ olmak üzere, kabul edelimki $\mathscr{A} = \{n_1 a_1, n_2 a_2, \ldots, n_r a_r\}$ kümesi her $i = 1,2,...,r$ için n_i tane a_i elemanından oluşsun. Bu durumda $\mathscr{A}$ kümesinin permütasyonlarının sayısı aşağıdaki gibidir:

$$P(n; n_1, n_2, \ldots, n_r) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_r!}.$$

Örnek: 10 kişinin katılımıyla gerçekleştirilen bir satranç turnuvasına 3 Amerikalı, 2 İngiliz, 4 Rus ve 1 Türk katılmıştır. Turnuva sonuç listesinde kişiler değil uluslar önemli kriteri göz önüne alınırsa, kaç farklı sonuç listesi olur?

Kombinasyonlar

Bazen n tanen nesnenin yada kişinin kaç farklı şekilde sıralanacağında ziyade, bu n tane nesneden yada kişiden k tanesinin kaç farklı şekilde seçilebileceğine ilgi duyarız. Burda tabikide $0 \leq k \leq n$ olmalıdır.

Bu bakış açısı aslında bize çokta uzak değil. Kümeler teorisinde n elemanlı bir kümenin k elemanlı alt kümelerini listelerkende aynı şeyi yani seçimi yapmıştık. Bu seçme işleminin sonuçlarına artık daha genel bir anlam yüklemek için n\`nin $k$ elemanlı altkümeleri demek yerine **$n$\`nin k\`li kombinasyonları** diyeceğiz ve aşağıdaki notasyonla bu kombinasyonların sayısını ifade edeceğiz:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-(k-1))}{k!}$$

Burada eşitliğin en sağ tarafındaki bölümün elemanları neyi ifade ediyor?

$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ ve her $k < 0$ yada $k > n$ için, $\binom{n}{k} = 0$. Bu ifadeler neyi temsil ediyor söyleyebilir misin?

Örnek: 20 kişilik sınıftan 3 kişi seçilecektir. Bu kişileri nasıl seçeriz?

Kural: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Örnek: 5 bayan ve 7 erkek arasından 2 bayan ve 3 erkek oluşan 5 kişilik bir komite kaç farklı şekilde oluşturulabilir?

Örnek: n tane cihazdan m tanesi bozuktur. Bozuk ve sağlam cihazlar kendi içlerinde özdeştirler. Arka arkaya iki bozuk cihaz gelemeyecek şekilde n tane cihazı kaç farklı şekilde sıralayabiliriz?

m tane bozuk cihaz olduğuna göre $n-m$ tanede sağlam cihaz vardır. İki tane bozuk cihaz yan yana gelmesin diye aralarına muhakkak bir sağlam cihaz konmalıdır. Bu sebeble ilkin sağlamları sıralarız, sonrada sağlam cihazların oluşturdu boşluklarada bozukları koyabiliriz. Yani

$$\_\_\_\_ S_1 \_\_\_\_ S_2 \_\_\_\_ S_3 \_\_\_\_ \cdots \_\_\_\_ S_{n-m} \_\_\_\_$$

m tane bozuk cihazı yerleştirmek için $n-m+1$ pozisyondan m tanesi seçmeliyiz. Dolayısıyla, bu sıralama işlemini $\binom{n-m+1}{m}$ farklı şekilde yaparız. (Burada bozuklar ve sağlamlar kendi içlerinde sıralanmazlar.)

Kombinasyonlarla ilgili içerme dışarma bağıntılarından esinlenerek çok sayıda formül yada kural türetilebilir. Örnek teşkil etmesi için bunlardan sadece bir tanesini aşağıdaki teoremde tecrübe edebilirsiniz.

Teorem: $1 \leq k \leq n$ olmak üzere $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

İspat: n tane nesne içerisinden bir tanesini belirgin kılalım, ve n elemanlı bir kümenin bu elemanı bulunduran ve bulundurmayan k elemanlı alt kümelerini sayalım.

Binom Teoremi: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

İspat:

$(x+y)^n = (x+y)(x+y)\ldots(x+y)$ çarpma işlemi gerçekleştirildiğinde çarpım kaç elemandan oluşur?

Örnek: n elemanlı bir kümenin 2^n tane altkümesi vardır. Neden?

Burada iki farklı argümanla kolaylıkla ispat yapılabilir.

1. Binom teoremi kullanarak: alt kümelerini teker teker sayarız.

2. Kombinatoriyel: Evet yada Hayır.

Multinomial (Çok terimli) Teoremi:

$$(x_1 + \ldots + x_k)^n = \sum_{n_1+\ldots+n_k=n} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k}$$

$n = n_1 + \ldots + n_k$ olmak üzere, n tane nesne kaç farklı şekilde sırasıyla herbiri $n_1, \ldots, n_k$ tane elemandan oluşan k tane gruba bölünebilir?

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\ldots\binom{n-n_1-\ldots-n_{k-1}}{n_k} = \frac{n!}{n_1!\ldots n_k!}.$$

Not: Kendimizi her soruda ya permütasyon yada kombinasyon kullanacağım diye şartlarsak, sayma işlemini yaparken zorlanabiliriz. Pratik düşünmek için aşağıdaki bakış açılarına müracat edebiliriz:

✳ Neyi sayıyorum? Saymak istediğim nesneler, kişiler, yada sistem neye benziyor?
✳ Saymak istediğim sonuçlar yada nesneler tek bir aşamada mı yoksa birden fazla aşamadamı ortaya çıkıyor?
✳ Arzulanan sonuçların sayısını bulmak için hangisini saymak daha kolay: istenen sonuçları mı istenmeyen sonuçları mı?

Örnek: Belirli bir playlist 10 tanesi Beatles şarkısı olmak üzere 100 adet şarkıdan oluşuyor. Karışık çalma özelliği ile playlist kullanılmaya başlansın. İlk Beatles şarkısının altıncı şarkıya kadar çalınmış olma ihtimali nedir?

Odak noktamız playlist teki 5. şarkının ilk Beatles şarkısı olması. Yani ilk dört şarkı Beatles a ait değil.

Deney: 100 şarkı içerisinden 5 tanesi seçip çalmak. $\Rightarrow |\mathcal{S}| = 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96$

Olay: Çalınan ilk 5. şarkıdan sadece birinin Beatles şarkısı olması. $\Rightarrow |\mathcal{A}| = 90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 10$

Bu durumda istenen olasılık $P(\mathcal{A}) = \dfrac{|\mathcal{A}|}{|\mathcal{S}|} = \dfrac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 10}{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96} = 0{,}0679$ olur.

Bu soruda ele aldığımız problem akademik bir çalışmanın parçasıdır “Does Your iPod Really Play Favorites?” (The Amer. Statistician, 2009: 263–268).

Peki alternatif bir yaklaşımla bu soruya farklı bir çözüm sunulabilir mi?

Şarkıların ne olduğuna degildi pozisyonlarına odaklanalım. Aradığımız durum tam olarak şu:

$$\underbrace{*\ \ *\ *\ *\ \ B}_{\text{ilk 5 şarkı}}\Big|\underbrace{*\ \ *\ *\ \ \ldots *}_{\text{son 95 şarkı}}$$

$$P(\mathscr{A}) = \frac{|\mathscr{A}|}{|\mathscr{S}|} = \frac{\binom{95}{9}}{\binom{100}{10}} = \frac{\text{geriye kalan 95 şarkıdan 9 unun Beatles olması}}{\text{100 şarkıdan 10 un Beatles olması}}$$

Ödev: İlk şarkıda yada ilk iki şarkıda yada ilk üç şarkıda ilk Beatles şarkısını dinleme ihtimali nedir?

Örnek: Bir üniversite deposuna 10 tanesi lazer, ve 15 taneside kartuşlu olmak üzere 25 tane yazıcı teslim edilmiştir. Eğer bu yazıcılardan 6 tanesi bir teknisyen tarafından kontrol edilmek için rasgele seçilirse, 3 tanesinin lazer yazıcı olma ihtimali nedir?

$$P(3L,3K) = \frac{\binom{15}{3}\binom{10}{3}}{\binom{25}{6}} = \frac{\frac{15!}{3!12!}\cdot\frac{10!}{3!7!}}{\frac{25!}{6!19!}} = .3083$$

ALIŞTIRMALAR

1. Bir kişinin 8 arkadaşı var ve yapacağı partiye bunlardan 5 tanesini çağıracak olsun. Aşağıdaki durumlarda bir davet listesinin hazırlanma ihtimali nedir?
   a. Bunlardan iki tanesi küs ve partiye birlikte gelemiyorlarsa
   b. Bunlardan ikisi ancak birlikte davet edilirse gelebiliyorlar.

2. 2006 yılı itibariyle, tahminen 50 milyon tane .com web sitesi domain adı alınmıştır (örneğin, yahoo.com).
   a. Sadece iki harften oluşan kaç tane domain adı vardır? (Büyük küçük harf duyarlılığı yok)
   b. Harfler ve rakamlardan oluşan 2 karakterli kaçtan domain adı vardır?
   c. 2006 Nisan ayı itibariyle, 97786 tane 4 karakterli domain adı henüz kullanıma alınmamıştır. Seçilen 4 karakterli bir domain adının daha önceden kullanıma alınmış olma olasılığı nedir?

S :	Kamera	$P(S) = 1$
A :	Kamera + Hafıza Kartı	$P(A) = 0{,}6$
B :	Kamera + Yedek Batarya	$P(B) = 0{,}4$
$A \cap B$	Kamera + Hafıza Kartı +Yedek Batarya	$P(A \cap B) = 0{,}3$

3. Bir arkadaşım en iyi sodayı belirlemek için beni evine davet etti ve farklı firmalara ait 8 şişe vişneli, 10 şişe portakallı ve 12 şişe limonlu soda alıp bana ikram etmek için hazırladı.

a. İkram etme sırası önemli olmak üzere 3 şişe vişneli sodayı ikram etmenin kaç farklı yolu vardır?

b. 30 şişe sodadan 6 tanesi kaç farlı şekilde seçilebilir?

c. 6 tane soda rasgele seçildiğinde herbir türden 2 şer tane seçilmiş olma ihtimali nedir?

d. 6 tane soda rasgele seçilirse, hepsinin aynı türden seçilmiş olma ihtimali nedir?

4. Meşhur bestekar Beethoven 9 tane senfoni, 5 tane piyano konçertosu ve 32 tanede piyano sonatı bestelemiştir.

a. İlk olarak senfoni ve sonra piyano konçertosu çalmanın kaç farklı yolu vardır?

b. Bir radyo istasyonu her akşam sırasıyla ard arda Beethoven senfonisi, sonra piyano konçertosu, ve sonrada piyano sonatı çalmak istiyor. Aynı müzik listesi çalınmadan önce bu program kaç yıl devam eder?

5. Bir üretim bandında gündüz vardiyasında 10 işçi, ikinci vardiyada 8 işçi ve gece vardiyasında da 6 işçi çalıştırılıyor. Bir kalite kontrol danışmanı rasgele 5 işçiyi seçip mülakat yapıyor. İşçilerin seçilme ihtimallerinin eşit olduğunu varsayalım.

a. Seçilen 5 işçininde gündüz vardiyasından olma ihtimali nedir?

b. Seçilen 5 işçininde aynı vardiyadan olma ihtimali nedir?

c. Seçilen 5 işçinin en az iki farklı vardiyadan olma ihtimali nedir?

d. Seçilen 5 işçinin en az bir vardiyayı temsil etmeme ihtimali nedir?

6. Belirli bir bankaya ait bankamatik kartının PIN numarası 0,1,2,…,9 rakamlarının kullanıldığı 4 haneden oluşmaktadır.

a. Kaç farklı PIN oluşturulabilir? (Hiç bir kısıtlama yada kural yokken)

b. Banka oluşturulabilecek PIN numaralarının güvenli olması için aşağıdaki kısıtlamaları belirlemiştir: (i) 4 hanenin hepsi aynı rakam olamaz (~~3333~~), (ii) ardışık olarak artan yada azalan rakamlardan oluşan kombinasyon PIN olamaz (~~3456 yada 8765~~), (iii) 19 la başlayan sayılar PIN olmaz (doğum tarihlerinin önüne geçmek için). Rasgele oluşturulan bir PIN numarasının banka tarafından kabul edilme ihtimali nedir?

c. Bir hırsız bu bankaya ait bir bankamatik kartını çalmış ve PIN numarasının ilk ve son hanesinin 8 ve 1 olduğunu (yani 8 __ __ 1) biliyor olsun. Ayrıca banka üç hatalı PIN girişinden sonra kartı bloke ediyor olsun. Hırsızın hesaba ulaşma ihtimali nedir?

d. (c) deki soruyu PIN in 1 __ __ 1 olması durumu için tekrar ele alın.

Dostça bir uyarı !

Sayma kabiliyetinizin artması ve yeterince tecrübe sahibi olmanız için, buradaki sorulardan <u>çok daha</u> fazlasını çözmeniz gerekmektedir.

2.4 Koşullu Olasılık

Çeşitli olayların olasılıkları deneyin yapıldığı koşullarla ilgili bildiklerimize bağlıdır. Deneyin sonucunun bir kısmı hakkında sahip olduğumuz bilgi sonucun tamamı hakkındaki kanaatimizi etkileyebilir. Bir A olayı için bir $P(A)$ olasılığı atadığımızda bu olasılığa koşulsuz yada düz olasılık diyebiliriz. Ancak bir B olayının gerçekleştiği biliniyorken A nün gerçekleşme ihtimaline ise koşullu olasılık diyeceğiz. Bu koşul altında A olayına atanan olasılık değerini $P(A\,|\,B)$ ile göstereceğiz ve *B biliniyorken A nün gerçekleşme ihtimali* diye okuyacağız.

Örnek: Bir fabrikada A ve A' ile tanımlanan iki adet üretim bandı vardır. A bandı daha eski ekipmanlardan oluştuğundan diğerine göre daha yavaş çalışmakta ve daha fazla hata vermektedir. Günün birinde A bandı 8 adet ürün üretiyor ve bu ürünlerden 2 tanesinin hatalı (B) ve 6 tanesinin hatasız (B') olduğu tespit ediliyor. Aynı gün A' bandı ise 1 hatalı 10 hatasız ürün üretiyor. Aynı gün satış müdürü rasgele bir ürün seçiyor,

a. Bu ürünün A bandında üretilmiş olma ihtimali nedir?

b. Seçilen ürünün arızalı olduğu anlaşılmıştır. Bu durumda ürünün A bandında üretilmiş olması ihtimali nedir?

	B	B'
A	2	6
A'	1	9

$$P(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{8}{18} = 0{,}44$$

$$P(A\,|\,B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{18}}{\frac{3}{18}} = \frac{2}{3}$$

Tanım: Bir deneye ait $P(B) > 0$ olacak şekilde iki A ve B olayları verildiğinde B koşulu altında A nün gerçekleşme ihtimali $P(A\,|\,B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ olarak tanımlanır.

Örnek: Belirli bi model kamerayı alan müşterilerin %60 ı kamerayla birlikte hafıza kartını, %40 kamera ile birlikte yedek batarya ve %30 u her ikisinide alıyor. Rasgele seçilen bir müşterinin yedek batarya aldığı biliniyorken kamera işe birlikte hafıza kartıda almış olma olasılığı nedir?

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{.30}{.40} = .75 \qquad P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{.30}{.60} = .50$$

Örnek: Bir derginin sanat (A), kitap (B), ve sinema (C) adında üç köşesi vardır. Rasgele seçilen bir dergi ouyucusunun okuma alışkanlığına ait olasılıklar aşağıdaki tabloda verilmektedir:

A	B	C	$A \cap B$	$A \cap C$	$B \cap C$	$A \cap B \cap C$
.14	.23	.37	.08	.09	.13	.05

Bu doğrultuda aşağıda istenilen olasılıkları hesaplayalım.

- Kitap köşesini okuduğu biliniyorken sanat köşesinide okuyor olma olasılığı nedir?

- Diğer iki köşenin en az birini okuduğu biliniyorken, sanat köşesinide okuyor olma olasılığı nedir?

- Okuyucunun en az bir köşe okuduğu biliniyorken sanat köşesinide okuyor olma olasılığı nedir?

- Sinema köşesini okuduğu biliniyorken, diğer iki köşeden en az birini daha okuyor olma ihtimali nedir?

Çarpım Kuralı

$$P(A \cap B) = P(A \mid B)P(B)$$

Örnek: Dört kişi kan bağışında bulunmaya karar vermişler ancak hiçbiri kan grubunu bilmiyor. Kan bankasının ise sadece O+ kan grubuna ihtiyacı var ve aslında bu dört kişiden sadece bir tanesi bu kan grubuna sahip olsun.Olası bağışçılar rasgele bir şekilde seçilip isimleri bir listeye yazıldığında, listeye en az üç kişinin isminin yazılmış olma olasılığı nedir? Tam olarak üçüncü bağışçının O+ kan grubuna sahip olması ihtimali nedir?

Örnek: Bir elektronik mağazası üç farklı marka mikser satıyor. Satışlarının %50 si M_1 marka (en ucuzu), %30 u M_2 marka ve %20 side M_3 marka. Her markanın 1 yıllık garanti süresi vardır. M_1, M_2 ve M_3 marka mikserlerin sırasıyla %25, %20 ve %10 u garantiye gönderilmektedir.

a. Rasgele seçilen bir kişinin garantiye gidecek M_1 marka bir mikser almış olma ihtimali nedir?

b. Rasgele seçilen bir kişinin garantiye gidecek bir mikser almış olma ihtimali nedir?

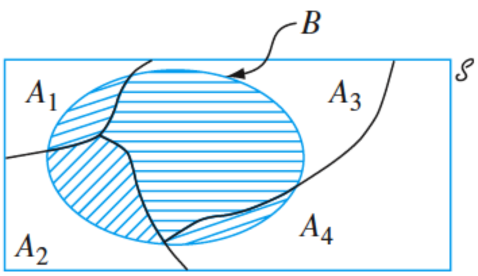
c. Rasgele seçilen bir kişinin aldığı mikseri garantiye göndermek için mağazaya gittiğinde mikserin M_i (i=1,2,3) marka olma ihtimali nedir?

Bayes Teoremi

Şu aşamaya kadar farklı olasılık notasyonları gördük.

- $P(M_i)$: Basit olasılık
- $P(M_i \mid B)$: Koşullu olasılık
- $P(B \mid M_i)$: Sonuç olasılığı (posterior probability)

Basit olasılıkların ve koşullu olasılıkların kullanılarak sonuç olasılığının belirlenmesi olasılık teorisinde önemli bir yere sahiptir.



Total Olasılık Kanunu

Kabul edelimki $A_1, \ldots, A_k$ olayları ikişer ikişer ayrık ve $\mathcal{S} = A_1 \cup \ldots \cup A_k$ olsun. Bu durumda herhangi bir B olayı için,

$$P(B) = P(B \mid A_1)P(A_1) + \ldots + P(B \mid A_k)P(A_k) = \sum_{i=1}^{k} P(B \mid A_i)P(A_i).$$

Bayes` Teoremi

Kabul edelimki $A_1, \ldots, A_k$ olayları ikişer ikişer ayrık ve $\mathcal{S} = A_1 \cup \ldots \cup A_k$ olsun. Bu durumda $P(B) > 0$ olacak şekilde herhangi bir B olayı için, B nin gerçekleştiği biliniyorken A_j nin gerçekleşmiş olma ihtimali

$$P(A_j \mid B) = \frac{P(A_j \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B \mid A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^{k} P(B \mid A_i)P(A_i)}$$

olur.

Örnek: Bir kişinin 3 farklı email hesabı var ve emaillerinin %70 i E_1' e, %20 si E_2 ye ve %10 u E_3 e gelmektedir. $E_1, E_2\ ve\ E_3$ gelen emaillerin sırasıyla %1, %2 ve %5 i spamdır.

a. Rasgele seçilen bir mesajın spam olma ihtimali nedir?

b. Rasgele seçilen bir mesajın %20 ihtimalle spam olduğu biliniyorken bu mesajın E_2 ye gelmiş olma ihtimali nedir?

$B = \{spam\ mesajlar\}$

(a)
$$\begin{aligned} P(B) &= P(B\,|\,E_1)(E_1) + P(B\,|\,E_2)(E_2) + P(B\,|\,E_3)(E_3) \\ &= (0{,}01)(0{,}7) + (0{,}02)(0{,}2) + (0{,}05)(0{,}1) \\ &= 0{,}016 \end{aligned}$$

(b)
$$P(E_2\,|\,B) = \frac{P(E_2 \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B\,|\,E_2)P(E_2)}{P(B)} = \frac{(0{,}02)(0{,}2)}{0{,}2} = 0{,}02$$

Örnek: Sadece 1000 yetişkinden 1 inde görülen nadir bir hastalık için bir tür teşhis testi geliştirilmiştir. Bir kişi gerçekten hastayken bu test %99 ihtimalle + (pozitif) teşhis ve hasta degilkende %2 ihtimalle + (pozitif) teşhis koyuyor. Rasgele bir kişi seçilip test uygulandığında + (pozitif) teşhis konuluyorsa, bu kişinin gerçekten hasta olma ihtimali kaçtır?

$H = \{Hasta\}\quad H' = \{Hasta\ Degil\}$ olmak üzere verilen olasılık degerlerini ve soruda istenen olasılığı notasyonel olarak yazalım.

$P(+\,|\,H) = 0{,}99 \qquad P(+\,|\,H') = 0{,}02 \qquad P(H) = 0{,}001 \qquad P(H') = 0{,}999$ iken

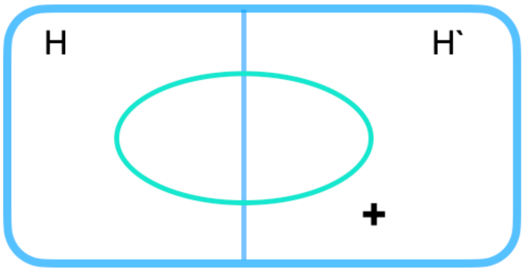
$P(H\,|\,+) = ?$

Beden	Düz	Baskılı	Çizgili
S	0,04	0,02	0,05
M	0,08	0,07	0,12
L	0,03	0,07	0,08

Kısa Kollu Tshirtler

Beden	Düz	Baskılı	Çizgili
S	0,03	0,02	0,03
M	0,1	0,05	0,07
L	0,04	0,02	0,08

Uzun Kollu Tshirtler



$$
\begin{aligned}
P(H\,|\,+) &= \frac{P(H\cap +)}{P(+)} \\
&= \frac{P(+\,|\,H)P(H)}{P(+)} \\
&= \frac{P(+\,|\,H)P(H)}{P(+\,|\,H)P(H)+P(+\,|\,H')P(H')} \\
&= \frac{(0{,}001)(0{,}99)}{(0{,}99)(0{,}001)+(0{,}02)(0{,}999)} \\
&= \frac{0{,}00099}{0{,}02097} = 0{,}04721
\end{aligned}
$$

ALIŞTIRMALAR

1. Belirli bir ülkenin popülasyonu üç etnik gruptan oluşmaktadır. Bu ülkedeki bireylerin herbiri O, A, B ve AB kan gruplarından birine sahiptir. Aşağıdaki tabloda popülasyonun etnik gruplara ve kan gruplarına göre oransal dağılımı verilmektedir

Etnik Gruplar	Kan Grubu			
	O	**A**	**B**	**AB**
1	.082	.106	.008	.004
2	.135	.141	.018	.006
3	.215	.200	.065	.020

Bu ülkede, rasgele bir kişinin seçilmesi deneyinde $A = \{A\ kan\ grubuna\ sahip\ olmak\}$, $B = \{B\ kan\ grubuna\ sahip\ olmak\}$ ve $C = \{3.\ etnik\ gruba\ ait\ olmak\}$ olayları verilsin.

a. A, B ve C olaylarının olasılıklarını bulunuz.

b. $P(A|C)\ ve\ P(C|A)$ olasılıklarını hesaplayınız. Ayrıca bu olasılıkların neyi ifade ettiğiniz söyleyiniz.

c. Seçilen kişinin kan grubunun B olmadığı biliniyorsa, bu kişinin 1. etnik gruptan olması olasılığını bulunuz?

2. Bir mağazada **S, M** ve **L** bedenlerinde kısa ve uzun kollu olmak üzere düz renkli, baskılı ve çizgili tshirtler satılmaktadır. Aşağıdaki tablolarda bu tshirtlerin satışlarına ait oranları gösteren tablolar veriliyor

a. Sıradaki satılacak tshirtün baskılı uzun kollu M beden olma ihtimali nedir?
b. Sıradaki satılacak tshirtün baskılı M beden olma ihtimali nedir?
c. Sıradaki satılacak tshirtün uzun kollu olma ihtimali nedir?
d. Sıradaki satılacak tshirtün kısa kollu olma ihtimali nedir?
e. Sıradaki satılacak tshirtün M beden olma ihtimali nedir?
f. Sıradaki satılacak tshirtün baskılı olma ihtimali nedir?
g. Sıradaki satılacak tshirtün düz uzun kollu olduğu biliniyorken M beden olma ihtimali nedir?

h. Sıradaki satılacak tshirtün düz M beden olduğu biliniyorken uzun kollu olma ihtimali nedir?

3. Bir tahliye sistemi iki tane özdeş pompadan oluşmaktadır, p1 ve p2. Eğer pompalardan sadece biri bozulursa sistem çalışmaya devam etmektedir. Ancak böylesi bir durumda biriken atıklardan dolayı diğer pompanın bozulma ihtimali ilk duruma göre artmaktadır. Yani,

$$P(p_2\ bozuk \mid p_1\ bozuk) > P(p_2\ bozuk).$$

Eğer üretilen pompa sistemlerinin sadece %7 si ömrü boyunca en az bir pompada arıza çıkarıyor ve %1 i her iki pompadada arıza çıkarıyorsa, alınan bir pompa sisteminin ömür süresinde p_1 pompasının bozulma ihtimali nedir?

4. Bir deney için verilen $A, B,\ ve\ C$ olayları için aşağıdaki ifadeyi ispatlayınız:

$$P(C) > 0 \Rightarrow P(A \cup B \mid C) = P(A \mid C) + P(B \mid C) + P(A \cap B \mid C).$$

5. Belirli bir mağazadan buzdolabı alan müşteriler için, A={Buz dolabı Türkiyede üretilmiştir}, B={Buzluk var} ve C={ek garanti alınmış} olayları tanımlanıyor ve bu olaylar için yandaki olasılıklar veriliyor.

$$P(A) = .75 \quad P(B|A) = .9 \quad P(B|A') = .8$$
$$P(C|A \cap B) = .8 \quad P(C|A \cap B') = .6$$
$$P(C|A' \cap B) = .7 \quad P(C|A' \cap B') = .3$$

a. Müşterinin karar aşamalarını gösteren bir ağaç diagramı çiziniz.

b. $P(A \cap B \cap C)$ olasılığı neyi ifade ediyor söyleyiniz ve yazınız.

c. $P(B \cap C) = ?$

d. $P(C) = ?$

e. $P(A \mid B \cap C)$ olasılığı neyi ifade ediyor söyleyiniz ve hesaplayınız.

6. Bir üretim bandındaki ürünlerin %3 ü kusurlu çıkmaktadır. Bir ürünün kusurlu olup olmadığını söyleyen bir test hatalı bir ürüne uygulandığında %90 ihtimalle ürünün hatalı olduğunu ve sağlam bir ürüne uygulandığında ise %20 ihtimalle hatalı olduğunu söylüyor. Bir kutuda 3 tane ürün var ve test üçününde sağlam olduğunu söylüyor. Bu üç ürününde gerçekten sağlam olma ihtimali nedir?

2.5 Bağımsız Olaylar

Koşullu olasılık kavramıyla birlikte $P(A)$ olasılığına yeni bir anlam yüklemiş olduk: A dan farklı bir B olayının gerçekleşmiş olduğu biliniyorken A olayının yeni olasılığını $P(A|B)$ olarak hesapladık. Şimdiye kadar çözmüş olduğumuz örnek sorularda A olayına ait $P(A|B)$ olasılığının $P(A)$ olasılığından farklı olduğunu gördük. Peki bu farklılık ortaya çıkmazsa, yani her ikiside eşit olursa ne olur?

A ve B olayları bağımsızdır $\Leftrightarrow^{1}$ $P(A|B) = P(A) \Leftrightarrow^{2} P(B|A) = P(B)$.

Tanım: Aynı deneye ait A ve B olaylarından birinin gerçekleşmesi diğerinin gerçekleşmesini etkilemiyorsa bu iki olaya **bağımsızdır** deriz. Yani

Bağımsız olayların tanımı simetrik değilmiş gibi görünebilir ancak koşullu olasılık ve çarpım kuralı kullanacak olursak,

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$$

Eşitliğin sağ tarafı $P(B)$ ancak ve ancak tanımdaki 1 numaralı önerme doğruysa.gerçekleşiyorsa. Dolayısıyla (1) varsa kesinlikle (2) de vardır.

Ayrıca A ve B olayları bağımsız olaylarsa A' ile B, A ile B' ve A' ile B' ikililerinin herbiride bağımsızdırlar.

Ödev: Yukarıdaki bağımsızlıkları ispatlayınız.

Örnek: Bir gaz istasyonunda 1 den 6 ya kadar numaralandırılmış altı adet pompa var olsun. Her $i = 1,...,6$ için, E_i i. pompanın kullanımda olduğunu tasvir eden basit olay olsun. $P(E_1) = P(E_6) = 0{,}1$; $P(E_2) = P(E_5) = 0{,}15$; $P(E_3) = P(E_4) = 0{,}25$ olmak üzere. $A = \{2,4,6\}$, $B = \{1,2,3\}$ ve $C = \{2,3,4,5\}$ olaylarının ikişer ikişer bağımsızlıklarını test ediniz.

(A,B), (A,C) ve (B,C) ikililerinin bağımsızlıklarını test etmek yeterli olacaktır.

$P(A) = 0{,}5$ iken $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0{,}15}{(0{,}1) + (0{,}15) + (0{,}25)} = 0{,}3$ olduğundan A ve B olayları bağımlıdır. Peki $P(B)$ yi hesaplarken paydada neden toplama işlemi yaptık? Diğer ikisinide siz yapınız.

Örnek: $P(A) > 0$ olmak üzere A ve B olayları ayrık iki olay olsun. Mesela, rasgele bir arabanın seçilmesi deneyinde $A = \{$4 silindirli bir motorun olması$\}$ ve $B = \{$6 silindirli bir motorun olması$\}$ olsun. Bu iki olay ayrık olaylardır çünkü ortak bir elemanları yoktur. Ayrıca B nin gerçekleşmesi durumunda A nün gerçekleşmeyeceğini bildiğimiz için (yani birbirini etkiliyorlar) bağımsız değildirler.

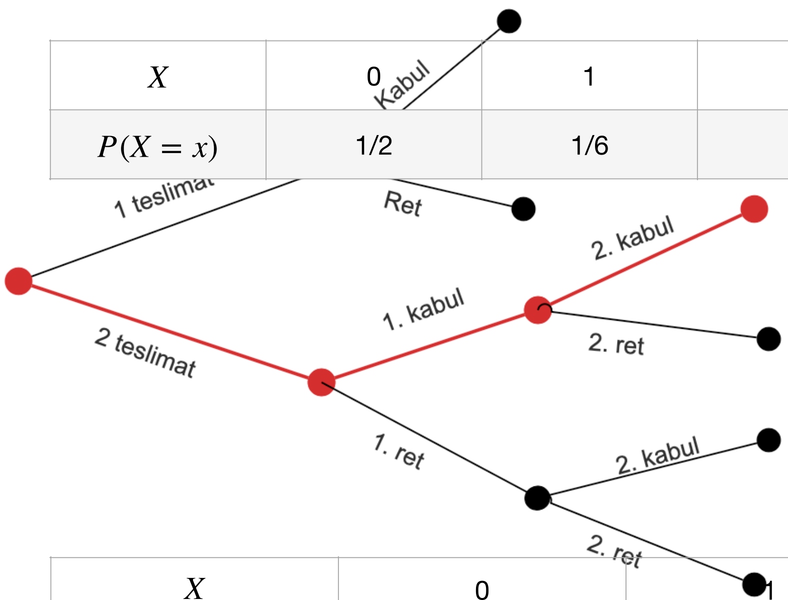
NOT: Ayrık olaylar bağımsız degillerdir.

Teorem:

A ve B olayları bağımsızdır $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Örnek: Belirli bir firmaya ait mal kabul birimine, hafta içi her gün 1 numaralı tedarikçiden siparişler gelmekteyken haftada iki sefer olcak şekilde 2 numaralı tedarikçiden siparişler gelmektedir. 1 numaralı tedarikçinin her teslimatı %80 ihtimalle, 2 numaralı tedarikçinin her teslimatı %90 ihtimalle kontrolleri geçip kabul edilmektedir. Rasgele seçilen bir günde her iki teslimatında kontrolleri geçip kabul edilme ihtimali nedir?

X	0	1	2
$P(X = x)$	1/2	1/6	1/3



X	0	1
$P(X = x)$	0,8	0,2

Bu soruda bizden istenen seçilen günde iki teslimatın yapılmış olması ve ikisininde kabul edilmiş olması ihtimalidiri. Yukarıdaki ağaç diagramında kırmızı renkli yol bunu göstermekte. İlk olarak ağacın dallarına olasılıklarını yazalım.

1 numaralı tedarikçi sadece hafta içi teslimat yaptığından, 5 günün sadece 2 sinde iki teslimat alınabilir. Bu durumda iki teslimat alınabilme ihtimali 2/5 olur. Soruda istenen olasılık

$$\begin{aligned} P(iki\ kabul) &= P(iki\ teslimat\ ve\ iki\ kabul) \\ &= P(iki\ kabul \mid iki\ teslimat) P(iki\ teslimat) \\ &= [(0{,}8)(0{,}9)](0{,}4) \\ &= 0{,}288 \end{aligned}$$

İkiden Fazla Olayın Bağımsızlığı

$A_1, \ldots, A_n$ olayları ikişer ikişer bağımsızdır denir eğer her $k = 2,3,\ldots,n$ ve $i_1, \ldots, i_k$ alt indeks kümesi için, $P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \ldots P(A_{i_k})$ oluyorsa.

ALIŞTIRMALAR

1. Bir ülkedeki insanlara ait kan gruplarının dağılım oranları aşağıdaki tabloda verilmektedir. Rasgele seçilen iki kişinin kan gruplarının birbirinden bağımsız olduğu varsayımı altında seçilen iki kişininde kan grubunun O olma ihtimali nedir? Seçilen kişilerin kan gruplarının aynı olma ihtimali nedir?

A	B	AB	O
.40	.11	.04	.45

2. Bir petrol arama şirketinin biri Asyada ve diğeri Avrupada olmak üzere şu anda aktif iki projesi varolsun. A olayı Asyadaki projenin başarılı olması ve B olayıda Avrupadaki projenin başarılı olması olsun. A ve B olayları sırasıyla 0,4 ve 0,7 olasılıklarına sahip iki bağımsız olay olsun.

a. Eğer şirket Asyadaki projesinde başarısız olduysa, Avrupadaki projesindede başarısız olma ihtimali nedir? Neden?

b. İki Projeden en az birinin başarılı olma olasılığı nedir?

c. İki projeden en az birinin başarılı olduğu ilan edildiğinde, başarılı projenin Asyadaki proje olma ihtimali nedir?

3. Rasgele Değişkenler ve Olasılık Dağılımları

Yapılan bir deneyin sonuçları ister niteliksel isterse sayısal olsun, istatistiksel analiz metodları veriye ait belirli nümerik degerlere odaklanmamızı gerektirir, örneğin örneklem oranı x/n, ortalama $\bar{x}$, oda standart sapma s. Rasgele değişken kavramı deney sonuçlarının nümerik bir fonksiyonunu elde etmemize yardımcı olur. Temel olarak iki farklı rasgele değişken türü vardır: kesikli rasgele değişken (krd) ve sürekli rasgele değişken (srd). Bu kısımda rasgele değişken kavramına ve temel özelliklerine odaklanacağız.

3.1 Rasgele Değişkenler

Bir deneyde gözlemlenebilen yada ölçülebilen çok sayıda karakteristik özellik varılabilir ama genellikle deneyi yapan araştırmacı belirli bir niteliğe yada örnekleme odaklanır. Örneğin, bir metropoldeki kişilerin işe gidiş gelişlerine dair yapılan bir çalışmada, örneklemdeki her kişiye kat ettikleri mesafe, kullandıkları vasıtadaki insan sayısı sorulabilirken IQ, gelir, aile büyüklüğü ve başka karakteristik özellikler sorulmayabilir. Alternatif olarak, bir araştırmacı bir makinenin bileşenlerini oluşturan parçaları test eder ve 1000 sat içerisinde makinenin kaç kez bozulduğunu kayıt ederken bireysel arızaları kayıt etmez.

Genel olarak, bir deneyin her bir sonucu bir sayıyla belirli bir kurala göre eşleştirilebilir. Böylesi bir eşleşmede kullanılan kurala **rasgele değişken (rd)** denir. Bu tanımda değişken kelimesini kullanmamızın sebebi farklı nümerik değerlerin söz konusu olabilmesinden ve rasgele kelimesini kullanmamızın sebebi ise atanan nümerik değerin deneyin olası sonuçlarına bağlı olabilmesinden dolayıdır.

Matematiksel olarak rasgele değişken, tanım kümesi örnek uzay $\mathcal{S}$ olan nümerik değerler alan bir fonksiyondur ve X ve Y gibi büyük harflerle gösterilir. Örneğin,

$X(\omega) = x$ ifadesi, X rasgele değişkeninin örnek uzaydaki ω sonucunu x reel sayısı ile eşleştirdiği anlamına gelir.

Örnek: Bir üniversitede, öğrenci işlerini arayan bir öğrencinin kısa sürede birisiyle konuşması başarı (B) yada beklemeye alınması başarısızlık olup (F) iki sonuç ortaya koysun. Bu deneyin örnek uzayı $S = \{B, F\}$. Bu örnek uzay üzerinde bir rasgele değişken $X : \{B, F\} \rightarrow \{0,1\}$ öyleki $X(B) = 1$ ve $X(F) = 0$ şeklinde tanımlanabilir.

Örnek: Belirli bir alan koduna sahip numaraların aranması deneyini ele alalım. Aranan numaralarla ilgili aşağıdaki rasgele değişken tanımlanabilir:

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{aranan numara tanımlı} \\ 0, & \text{aranan numara tanımsız} . \end{cases}$$

Tanım: Bir rasgele değişken sadece 0 ve 1 değerlerini alıyorsa **Bernoulli rasgele değişkeni** olarak adlandırılır. Yukarıda örneklerini gördük.

Örnek: 6 şar tane pompa bulunduran iki akaryakıt istasyonunda kullanılan pompaların sayısı deneyi deneyi için aşağıdaki rd ler tanımlanabilir:

- X : iki istasyonda kullanılmakta olan toplam pompa sayısı
- Y : iki istasyonda kullanılmakta olan pompa sayılarının farkı
- Z : iki istasyonda kullanılan pompaların maksimum sayısı

Bu deneyin örnek uzayını $S = \{(i, j) \,|\, 1 \leq i \leq j \leq 6\}$ olarak ifade edebiliriz.

- $X : S \longrightarrow \{0,1,2,...,12\} \ ve \ X((i, j)) = i + j$
- $Y : S \longrightarrow \{0,1,2,3,4,5,6\} \ ve \ Y((i, j)) = |i - j|$
- $Z : S \longrightarrow \{0,1,2,3,4,5,6\} \ ve \ Z((i, j)) = maks\{i, j\}$

Örnek: 9 voltluk bataryaların kabul edilebilir bir voltaj degeri elde edilene kadar test edilmesi deneyi için örnek uzay $S = \{B, bB, bbB, bbbB, \ldots\}$ olur (B başarı b başarısızlık). X rasgele değişkeni deney tamamlanıncaya kadar test edilen batarya sayısı olsun. Bu durumda X in alacağı degerler 1,2,3,… şeklinde listelenebilir çünkü $X(B) = 1, X(bB) = 2, X(bbB) = 3,\ldots$

Tanım: Bir X rasgele değişkenine **ayrık rasgele değişken (ard)** denir eğer X in olası değerlerinin kümesi

X	0	1	2
$P(X = x)$	1/2	1/6	1/3

sonlu yada sayılabilir sonsuzsa. Bir Y rasgele değişkenine **sürekli rasgele değişken (srd)** denir eğer aşağıdaki iki koşulda sağlanıyorsa:

(i) Olası değerlerin oluşturduğu küme sayı doğrusu üzerinde bir aralık yada aralıkların birleşimidir, örneğin $Y[S] = (-\infty, \infty) \ yada \ (2,3) \cup (5,7]$ aralıkları gibi

(ii) Rasgele değişkenin olası değerlerinin hiçbiri pozitif bir olasılığa sahip değildir. Yani her $c \in Y[S]$ için $P(Y = c) = 0$.

Şimdiye kadar ele aldığımız rasgele değişkenlerin tamamı birer krd idi.

Örnek: Yerküre üzerinde rasgele Türkiye üzerinde seçilen bir yerin rakımı Y rasgele değişkenini tanımlasın.

Y	1	2	4	8	16
$P(Y = y)$	0,05	0,1	0,35	0,4	0,1
$F(y)$					

Örneğin seçilen yer $(39^o 50' K, 98^o 35' B)$ ise $Y(39^o 50' K, 98^o 35' B) = 532{,}87$metre. $Y[S] = [0, \ 5166]$

Peki $P(Y = m) = ?$

3.2 Kesikli Rasgele Değişkenler İçin Olasılık Dağılımı

Bir X krd nin **olasılık dağılımı,** $P(S) = 1$ olasılığının X in aldığı değerlere dağılımıdır. Bu dağılımı yapan fonksiyona ise X in **olasılık kitle fonksiyonu (okf)** denir.

Her $x \in X$ için $p(x) = P(X = x) = P(\{\omega \in S : X(\omega) = x\})$ şeklinde tanımlan $p : X[S] \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonunun bir okf olabilmesi için aşağıdaki koşulları sağlıyor olması gerekir:

(i) $P(X = x) \geq 0$ her $x \in X(\mathscr{S})$ için,

(ii) $\sum_{x \in X(\mathscr{S})} P(X = x) = 1.$

Örnek: Bir tedarikçinin teslim edilemeye hazır 6 kutu ürünü vardır. Kutularla ilgili aşağıdaki tablo veriliyor:

Kutu	1	2	3	4	5	6
Bozuk Ürün Sayısı	0	2	0	1	2	0

Bir müşteriye teslim edilmek üzere bir kutu rasgele seçiliyor. X seçilen kutudaki bozuk ürün sayısı olsun. Bu durumda X in alabileceği degerleri belirleyip olasılık kitle fonksiyonunu yazınız.

X in alabileceği değerler 0, 1 ve 2 dir. Eşit ihtimalli 6 sonuçtan, 3 tanesinde 0, 1 tanesinde 1 ve 2 tanesinde 2 sonucu elde edilir. Bu durumda,

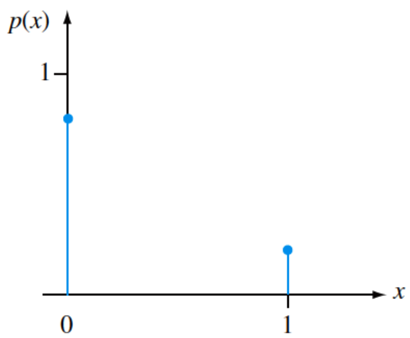
Burada X in olasılık dağılımını tanımladık. Peki gerçekten P bir olasılık kitle fonksiyonu mudur?

Örnek: Belirli bir elektronik mağazasında satılacak bir sonraki bilgisayarın laptop yada desktop olması deneyi için

$$X = \begin{cases} 1, & \text{eğer desktop satılırsa} \\ 0, & \text{eğer labtop satılırsa} \end{cases}$$

Eğer o hafta müşterilerin %20 si bir desktop seçiyorsa, X in olasılık dağılımı aşağıdaki gibidir.

Bu dağılıma ait doğru grafiği aşağıdaki gibidir.



Soru: Bu olasılık dağılımının adını söyleyebilir misiniz?

Örnek: Cal Poly Üniversitesi İstatistik bölümü 6 tane bilgisayardan oluşan istatistik bölümü öğrencilerine ayrılmış bir laboratuvara sahiptir. Günün herhangi bir anında kullanımda olan bilgisayar sayısı X rasgele değişkenini tanımlasın. Kabul edelimki X in olasılık dağılımı aşağıda verilen tablodaki gibi olsun.

x	0	1	2	3	4	5	6
$p(x)$	.05	.10	.15	.25	.20	.15	.10

a. X ne tür bir rasgele değişkendir?

b. p nin gerçekten bir olasılık kitle fonksiyonu olup olmadığını test ediniz.

c. $P(X \leq 2) = ?$

d. $P(2 \leq X \leq 5) = ?$

e. $P(2 < X < 5) = ?$

Örnek: Potansiyel beş kan bağışı yapacak— a, b, c, d ve e— arasında sadece a ve b O+ kan grubuna sahiptir. Her bir kişiden birer adet olmak üzere beş adet kan örneği tüpünün üstüne rasgele bir şekilde O+ olan kişi bulunana kadar isim etiketleri yapıştırılıyor. Y, O+ kan grubunu belirleyene kadar yapıştırılması gereken etiket sayısı olsun. Bu durumda Y nin olasılık yogunluk fonksiyonu,

$$p(1) = P(Y = 1) = P(a \text{ yada } b) = \frac{2}{5} = 0{,}4$$

$$\begin{aligned} p(2) &= P(Y = 2) = P(\text{ ilk olarak } c, d, e \text{ den biri ve sonra } a \text{ yada } b) \\ &= P(\text{ ilk olarak } c, d, e) P(\text{ sonrakinin } a \text{ yada } b \mid \text{ ilk olarak } c, d, e) \\ &= \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = 0{,}3 \end{aligned}$$

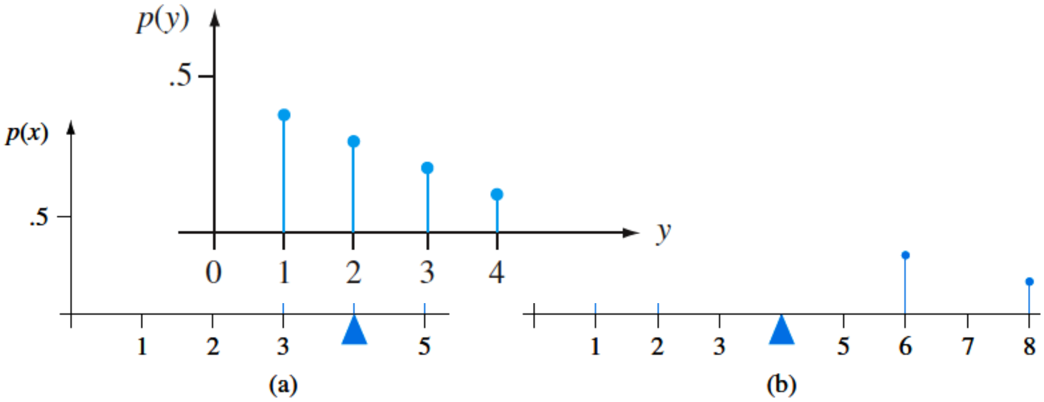
$$\begin{aligned} p(3) &= P(Y = 3) = P(\text{ ilk ve ikinci olarak } c, d, e \text{ den biri ve sonra } a \text{ yada } b) \\ &= \\ &\vdots \\ &= \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = 0{,}2 \end{aligned}$$

$$p(4) = P(Y = 4) = P(\text{ ilk olarak } c, d, e \text{ hepsi ve sonra } a \text{ yada } b) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} = 0{,}1 \text{ olur.}$$

Bu durumda, Y nin olasılık kitle fonksiyonu aşağıdaki gibi olur.

y	1	2	3	4
$p(y)$	.4	.3	.2	.1

Bu fonksiyona ait çizgi grafiği ise sağdaki gibidir.



Ortalaması $\mu = 4$ olan iki farklı olasılık dağılımı

Örnek: Belirli bir bölgede rasgele bir hanenin seçilmesi deneyini ele alalım. Bu deney için X hanedeki kişi sayısı olsun ve aşağıdaki tabloda X in olasılık dağılımı verilsin.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(x)$	.140	.175	.220	.260	.155	.025	.015	.005	.004	.001

Bu dağılım Taylandın kırsal kesimlerindeki influenza bulaşmasını modelleyen "The Probability of Containment for Multitype Branching Process Models forEmerging Epidemics" (J. of Applied Probability, 2011: 173–188), çalışmasındaki hane büyüklüğü dağılımına çok yakındır.

Kabul edelimki 1000000 hane üzerinde bu deney yapılsın. Buradaki modeli iki farklı şekilde ele alabiliriz. 1 milyon tane hane vardır ve herbiri kendi X değerine sahiptir yada 1 milyon haneninin herbirini tek başına düşünmek yerine %14 ü 1 bir bireyden, %17,5 i 2 bireyden,… ve %0,1 i 10 bireyden oluşuyor şeklinde düşünebiliriz.

Olasılık Dağılımlarının Parametreleri

Olasılık kitle fonksiyonu X in aldığı degerler $p(x)$ olasılıklarına dağıtılırken bu dağılım bir tür degere bağlı olarak değişiyorsa bu degere olasılık kitle fonksiyonun **parametresi** denir. Parametrenin farklı degerleri için elde edilen olasılık dağılımlarının koleksiyonuna ise olasılık dağılımının bir ailesi denir.

Laptop desktop örnegindeki Bernoulli dağılımında olasılık kitle fonksiyonu $p(0) = 0{,}8$ ve $p(1) = 0{,}2$ olarak verilmişti. Bu degerlerse X Bernoulli rasgele değişkeninin bir tek dağılımına karşılık gelmektedir. Bunu genelleyecek olursak,

$$P(X = x; \alpha) = \begin{cases} 1 - \alpha & \text{eğer } x = 0, \\ \alpha & \text{eğer } x = 1, \\ 0 & \text{dd. (diğer bütün durumlarda)} \end{cases}$$

Burada olasılık kitle fonksiyonun α parametresine bağlı olduğunu görülmektedir ve α nün farklı değerleri için Bernoulli dağılımlarının bir ailesi elde edilir.

Örnek: Belirli bir andan sonra, belirli bir hastanede doğan çocukaların cinsiyetlerine ilk erkek çocuk doğuncaya kadar bakıyoruz. Kabul edelimki bir erkek çocuğun doğma olasılığı p olsun ve bir doğumun bir başka doğuma etkisi olmasın. X rasgele değişkeni gözlemlenen doğumların sayısı olarak tanımlansın. Bu durumda

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= P(E) = p \\ P(X = 2) &= P(KE) = P(K)P(E) = (1 - p)p \\ P(X = 3) &= P(KKE) = P(K)P(K)P(E) = (1 - p)^2 p \\ &\vdots \\ P(X = x) &= \\ &\vdots \end{aligned}$$

Burada p parametresi $0 \leq p \leq 1$ olmak zorundadır. Her bir gözlem bağımsız bir Bernoulli deneyidir, yani deneyin siyah—beyaz, doğru—yanlış, 0—1 gibi sadece iki ana sonucu vardır. Bu Bernoulli deneyinin tekrarları ilk erkek çocuğunun doğumuyla birlikte neticelenmektedir. Bu örnekte açıklandığı gibi bir Bernoulli deneyinin ilk başarı elde edilinceye kadar tekrarlanmasıyla gerçekleştirilen deneye **Geometrik Deney** denir ve bu deneyin olasılık dağılımına ise **geometrik olasılık dağılımı** denir. Bir geometrik dağılımda başarının n . denemede elde edilmesi ihtimali $P(X = n) = (1 - p)^{n-1} p$ olur.

Örneğe geri dönelim. Erkek çocuk doğma ihtimalini $p = 0{,}51$ seçmek mantıklı olabilir ancak ilk çocuğa Rh+ kan testi yapılırsa, $p = 0{,}85$ bile olabilmektedir.

Kümülatif Dağılım Fonksiyonu (KDF)

X ayrık rasgele değişkeni için **kümülatif dağılım fonksiyonu (kdf)** $F(x)$, $X = x$ e kadarki dağıtılmış olan olasılık miktarıdır. Yani $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{y \leq x} P(X = y)$.

Örnek: Bir mağazada 1GB, 2GB, 4GB, 8GB ve 16 GB hafıza kartları satılmaktadır. Y r.d alınan bir karttaki hafıza kapasitesi olsun.

a. $F(2{,}7) =$

b. $F(7{,}999) = F(4)$?

c. Y kesikli rasgele değişkeni için kümülatif dağılım fonksiyonunu parçalı bir fonksiyon formunda yazınız.

Herhangi $a \leq b$ reel sayıları için, a', X in a dan küçük olmak üzere aldığı en büyük değer olmak üzere $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a')$ olur. Eğer $a, b \in \mathbb{Z}$ ise,

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &= P(X = a, X = a + 1, \ldots, \text{ ya da } X = b) \\ &= P(X \leq b) - P(X \leq a - 1) \\ &= F(b) - F(a - 1)\,. \end{aligned}$$

Örnek: Belirli bir yılda büyük bir şirkette rasgele seçilen bir çalışanın rapor aldığı günlerin sayısı X r.d. ile tanımlansın. Bu şirket maksimum 14 gün rapor almaya izin veriyorsa, $X = 0,1,2,\ldots,14$ olur. Eğer $F(0) = 0{,}58;\ F(1) = 0{,}72;\ F(2) = 0{,}76;\ F(3) = 0{,}81;\ F(4) = 0{,}88;\ F(5) = 0{,}94$ ise

$P(2 \leq X \leq 5)$ ve $P(X = 3)$ olasılıklarını bulunuz.

3.3 Beklenen Değer

X in **ortalama degeri** yada **beklenen degeri** $E(X)$, μ_X yada herhangi bir şekilde karışıklık olmayacaksa sadece μ ile gösterilir ve $E(X) = \mu_X = \mu = \sum_{x \in X(\mathcal{S})} xP(X = x)$ şeklinde tanımlanan X aldığı degerlerin ağırlıklı ortalamasıdır (ağırlık degerlere atanan olasılıktır).

Örnek: Doğumdan hemen sonra, her yeni doğan bebeğin renk, kas yapısı, solunumu, nabzı ve reflekslerine bakılarak 0,1,…,10 olarak puan verilmektedir, bu puanlamaya Apgar puanlaması denir. Belirli bir hastanede gelecek yıl dünyaya gelecek bebeklerin arasından rasgele bir bebeğin seçilmesi deneyinde X rasgele değişkeni seçilen bebeğe verilen Apgar puanı olsun ve X e ait olasılık kitle fonksiyonu aşağıdaki şekilde verilsin.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(x)$	.002	.001	.002	.005	.02	.04	.18	.37	.25	.12	.01

Bu durumda X` in beklenen degeri aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\begin{aligned} E(X) = \mu &= 0(.002) + 1(.001) + 2(.002) \\ &\quad + \cdots + 8(.25) + 9(.12) + 10(.01) \\ &= 7.15 \end{aligned}$$

Ödev: Bernoulli dağılımı ve geometrik dağılım için beklenen değere ait formüller geliştiriniz.

Bir fonksiyonun beklenen değeri

Örnek: Bir kitapçı belirli bir kitabın 10 kopyasını tanesi 6$ dan alıp 12$ dan satacak ve 3 ayın sonunda satılmayan her bir kitabın tanesini 2$ dan satacak olsun. Bu kitapçının yapacağı bu ticareten elde edeceği ortalama net kazancı ifade eden formülü yazınız.

Örnek: Belirli bir arıza testinin maliyeti aracın motorundaki silindir sayısına bağlıdır. Kabul edelimki X rasgele değişkeni bu teste tabi tutulacak araçlardaki silindir sayıları olsun; 4, 6 ve 8. Kabul edelimki maliyet fonksiyonu $h(X) = 20 + 3X + 0{,}5X^2$ olsun. Bu durumda maliyet, silindir sayısısı X e bağlı yeni bir fonksiyon, yani rasgele değişken, Y olur.

x	4	6	8
$p(x)$	.5	.3	.2

$\Rightarrow$

y	40	56	76
$p(y)$	.5	.3	.2

Bu durumda bu testin ortalama maliyetini hesaplayınız.

Beklenen değere ait bazı özellikleri aşağıdaki gibi listeleye biliriz:

- $E(X) = \sum_{x \in X(\mathcal{S})} xP(X=x) \Longrightarrow .E(h(X)) = \sum_{x \in X(\mathcal{S})} h(x)P(X=x)$ (h X` in bir fonksiyonu)
- $E(aX+b) = aE(X)+b$ (her $a, b \in \mathbb{R}$)
- Beklenen değer olasılık dağılımının ağırlık merkezini ifade eder.

Yukarıdaki figürde 4 ortalamalı iki farklı olasılık dağılımı için ne söylenebilir? Ortalamaları aynı olduğu için her ikiside aynı mıdır?

Tanım: Kabul edelimki X, μ ortalamalı ve $p(x)$ olasılık kitle fonksiyonuna sahip bir rasgele değişken olsun. X in **varyansı** $V(X)$, σ_X^2 yada sadece σ^2 ile gösterilir ve aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$V(X) = \sigma_X^2 = \sum_{x \in X(\mathcal{S})} (x-\mu)^2 \cdot p(x) = E[(X-\mu)^2].$$

X in standart sapması ise $\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$ olarak tanımlanır. Ayrıca aşağıda alternatif bir varyans formülü yer almaktadır.

$$\boxed{V(X) = \sigma^2 = \left[\sum_D x^2 \cdot p(x)\right] - \mu^2 = E(X^2) - [E(X)]^2}$$

σ^2 büyüdükçe olasılık dağılımı μ den uzaklaşıp etrafa yayılırken, σ^2 küçüldükçede dağılımın μ nün etrafında yığılıp kaldığını görürüz.

Örnek: X rasgele değişkeni için olası dağılımı aşağıdaki gibi verilmektedir.

x	1	2	3	4	5	6
$p(x)$	.30	.25	.15	.05	.10	.15

X in beklenen degerini, varyansını, standart sapmasını bulunuz.

Varyansa ait iki özellik aşağıda verilmektedir. Her $a, b \in \mathbb{R}$ için,

(1) $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$ (2) $\sigma_{aX+b} = \sqrt{a^2 Var(X)} = |a| \sigma_X,$

ALIŞTIRMALAR

1. Aşağıda tanımlanan herbir rasgele değişkenin olası değerlerinin kümesini yazınız ve kesikli olup olmadığına karar veriniz.

d. Rasgele seçilen standart bir yumurta kutusundaki kırık olmayan yumurtaların sayısı X olsun.

e. Belirli bir sınıftaki öğrencilerden ilk derste yok yazılanların sayısı Y olsun.

f. Rasgele seçilen bir toprak örneğinin pH değeri Z olsun.

g. Rasgele seçilen bir kişinin boy uzunluğu T olsun.

2. Havayolu şirketleri bazen uçuşları için ekstra bilet satarlar. Kabul edelimki 50 koltuklu bir uçak için 55 bilet satılmış olsun. Bileti olupta uçuş için hava alanına gelen yolcuların sayısı Y rasgele değişkeni olsun. Y `nin olasılık kitle fonksiyonu aşağıdaki tabloda verilmektedir.

y	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55
$p(y)$	.05	.10	.12	.14	.25	.17	.06	.05	.03	.02	.01

a. Gelen bilet sahibi her yolcunun uçağa binmiş olma ihtimali nedir?

b. Bileti olupta hava alanına gelen yolculardan en az birinin uçağa alınmamış olma ihtimali nedir?

c. Eğer bekleme listesindeki ilk yolcu sensen (bütün biletli yolcular check-in yapıldıktan sonra eğer uçakta boş koltuk kalırsa ilk sen bineceksin), uçağa binme ihtimalin nedir? Eğer bekleme listesindeki üçüncü kişi isen bu ihtimal nedir?

3. Bir firma sahip olduğu altı adet telefon ile müşterilerine hizmet vermektedir. X rasgele değişkeni belirli bir anda kullanımda olan telefon hatlarının sayısı olsun. X `in olasılık kitle fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

x	0	1	2	3	4	5	6
$p(x)$	.10	.15	.20	.25	.20	.06	.04

Aşağıdaki olaylara ait olasılık degerlerini bulunuz.

a. En fazla üç hattın meşgul olma ihtimali
b. Üç hattan daha az hattın meşgul olma ihtimali.
c. En az üç hattın meşgul olma ihtimali.
d. En az dört hattın kullanımda olmama ihtimali.

4. Belirli bir firmadan trafik sigortası alan kişiler arasından rasgele bir şekilde bir kişi seçiliyor. Y rasgele değişkeni seçilen kişinin son 3 yıl içerisindeki aldığı trafik cezalarının sayısı olsun. Y için olasılık kitle fonksiyonu aşağıdaki gibi verilmektedir.

y	0	1	2	3
$p(y)$	.60	.25	.10	.05

a. Y nin beklenen değerini hesaplayınız.

b. Eğer Y kez trafik ihlali yapan bir kişiye $\$100Y^2$ ceza kesilecek olursa, bu kişinin ödeyeceği ortalama ceza nedir?

c. $Var(Y) = ?$

d. $\sigma_Y = ?$

5. Herhangi bir c sabiti için $E(X - c)$ için bir kural yazınız. Eğer $c = \mu$ olsaydı sonuç ne olurdu?

3.4 Binom Olasılık Dağılımı

İstatistiksel deneylerin pek çoğu aşağıdaki gerek koşulların tamamını ya da yaklaşık olarak tamamını saglamaktadır:

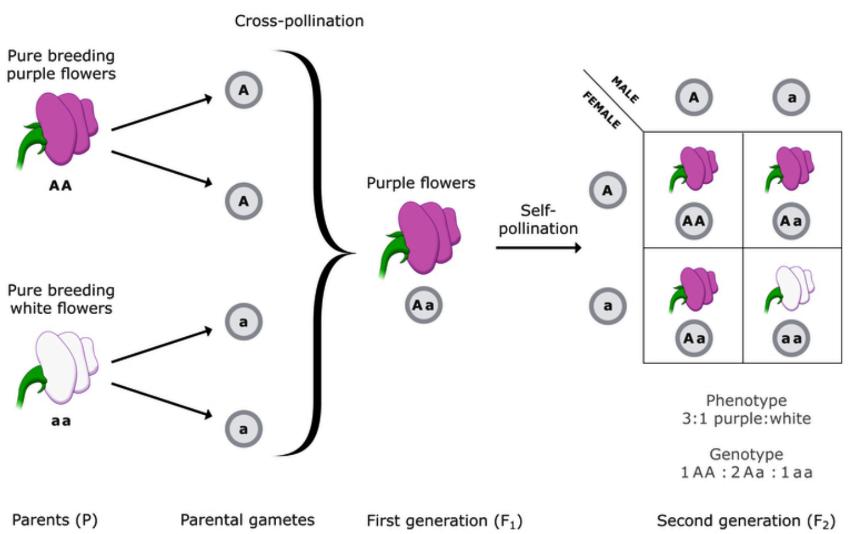
1. n sayısı deney yapılmadan önce belirlenmiş olmak üzere, deney adına deneme diyeceğimiz daha küçük bir deneyin n kez tekrar edilmesiyle gerçekleşir.
2. Her bir deneme her zaman aynı olan sadece iki sonuçtan biri ile neticelenir. Genellikle bu sonuçlar başarı (S) ve başarısızlık (F) olarak isimlendirilir ve her seferinde hangi sonucun ortaya çıkacağı rasgeledir.
3. Denemeler bağımsızdır. Yani herhangi bir denemenin sonucu asla bir başka denemenin sonucuna etki etmez.
4. Her bir deneme için başarı olasılığı $P(S) = p$ sabittir ve denmeden denemeye farklılık göstermez.

Tanım: Yukarıdaki 2 ve 4 koşullarını sağlayan denemelere **Bernoulli deneyi** denir. Bu koşulların tamamını sağlayan, yani bağımsız n tane Bernoulli deneyi tekrarı olarak tanımlanan bir deneye **Binom deneyi** denir.
Örneğin:

- n tane arabanın egzoz emisyon testine tutulması tabi tutulması deneyi,
- Bir paranın n atılması deneyi,
- Bir üretim bandından çıkan n örünün test edilemesi deneyi,
- 300 sayfalık bir kitabın bir sayfasında 3 den fazla yazım hatasının var olması o sayfanın düzeltilmesini gerektirsin ve 3 az hata çıkma ihtimali p olsun. Bu durumda bu kitabın düzeltilecek sayfalarının belirlenmesi deneyi bir Binom deneyidir.

Bazı deneyler ikiden fazla olası sonuca sahip deneylerin tekrarından oluşabilir. Böylesi bir deneye binom diyebilmek için denemelerdeki sonuçları başarı ve başarısız olarak ikiye ayırabiliriz.

Örnek: Bir bezelye tohumunun rengi tek bir genetik pozisyonla belirlenir. Bu pozisyondaki ikili eğer AA yada Aa ise tohum sarı, eğer aa ise tohum yeşil renkli olur.



Kabul edelimki 20 adet Aa genotipinde bezelye tohumunu eşliyoruz ve bu 10 eşlemeden yeni genotip oldu etmeyi amaçlıyoruz. Bu tohum çaprazlamasında aa genotipini başarı ve diğer genotiplerin elde edilmesinide başarısızlık olarak kabul edersek yapılan deney başarı olasılığı 0,25 olan 10 tekrardan oluşan bir binom deneyi olur.

$$\boxed{p = P(aa\ genotipi) = P(a)P(a) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}}$$

Örnek: Bir jüri adayı havuzunda 50 kişi vardır ve bu kişilerin 35 tanesi aktif olarak bir işte çalışıyor olsun. Bir mahkemeye jüri seçmek için rasgele 6 kişi birer birer seçiliyor. Seçilen i. kişinin işinin olmasını başarı ve olmamasınıda başarısızlık olarak tanımlayalım.

$$P(1.denemede\ S) = \frac{35}{50} = 0{,}7$$

$$\begin{aligned} P(2.denemede\ S) &= P(SS) + P(FS) \\ &= P(2.de\ S \mid 1.de\ S)P(S) + P(2.de\ S \mid 1.de\ F)P(F) \\ &\frac{34}{49}\frac{35}{50} + \frac{35}{49}\frac{15}{50} \\ &= \frac{35}{50} = 0{,}7 \end{aligned}$$

Benzer hesaplamalar yapılmaya devam edildiğinde $i = 0,1,2,3,4,5,6$ için, $P(i\,.denemede\ S) = 0{,}7$ olur. Bu durumda sadece bu eşitlikten dolayı bu deneye Binom deneyi diyebilir miyiz? Cevabınızı aşağıdaki iki olasılığa baktıktan sonra lütfen tekrar değerlendiriniz.

$$\boxed{P(6.denemde\ S \mid SSSSS) = \frac{30}{45} \quad \text{vs} \quad P(6.denemde\ S \mid FFFFF) = \frac{35}{45}}$$

Bu iki olasılığın farklılığı, 6 denemeden oluşan deneydeki bazı deneme sonuçları bir başka denemenin sonucunu etkilemekte olduğunu gösterir. Yani denemeler bağımsız değillerdir ve bu sebeble bu deney bir Binom dendi değildir.

Binom Rasgele Değişkeni ve Dağılımı

p başarı olasılığı ve n tane deneme sayısı ile tanımlanan bir binom deneyinde, X rasgele değişkeni n tanede denemede elde edilen başarıların sayısı olsun. X rasgele değişkenine Binom rasgele değişkeni denir ve X in binom dağılımına sahip olduğu $X \sim Bin(n, p)$ ile gösterilir. X in alabileceği değerler 0,1,…,n olur.

Her $x \in \{0,1,...,n\}$ için, X in olasılık kitle fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\boxed{b(x;n,p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}.}$$

Örnek: Rasgele seçilen 6 tane kişinin herbirine bir birinden ayırt edilemeyen ama birinin altında S digerinin altında F yazan iki bardak kola veriliyor. Kişilerin bardaklardan birini diğerine karşı seçme eğilimi olmadığını varsayalım. Bu durumda bir kişinin altında S yazan kolayı tercih etme ihtimali her kişi için sabittir ve 1/2 dir. Eğer X rasgele değişkeni 6 kişiden altında S yazan kolayı tercih edenlerin sayısı olarak tanımlanırsa, $X \sim Bin(n = 6, \ \ p = 0{,}5)$ binom dağılımı vardır deriz.

(a) Tam olarak 3 kişinin altında S yazan kolayı seçme ihtimali nedir?

(b) En az 1 kişinin altında S yazan kolayı tercih etme ihtimali nedir?

Table A.1 Cumulative Binomial Probabilities *(cont.)*

$$B(x; n, p) = \sum_{y=0}^{x} b(y; n, p)$$

e. $n = 25$

x \ p	0.01	0.05	0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.75	0.80	0.90	0.95	0.99
0	.778	.277	.072	.004	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
1	.974	.642	.271	.027	.007	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
2	.998	.873	.537	.098	.032	.009	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
3	1.000	.966	.764	.234	.096	.033	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
4	1.000	.993	.902	.421	.214	.090	.009	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
5	1.000	.999	.967	.617	.378	.193	.029	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
6	1.000	1.000	.991	.780	.561	.341	.074	.007	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
7	1.000	1.000	.998	.891	.727	.512	.154	.022	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000
8	1.000	1.000	1.000	.953	.851	.677	.274	.054	.004	.000	.000	.000	.000	.000	.000
9	1.000	1.000	1.000	.983	.929	.811	.425	.115	.013	.000	.000	.000	.000	.000	.000
10	1.000	1.000	1.000	.994	.970	.902	.586	.212	.034	.002	.000	.000	.000	.000	.000
11	1.000	1.000	1.000	.998	.980	.956	.732	.345	.078	.006	.001	.000	.000	.000	.000
12	1.000	1.000	1.000	1.000	.997	.983	.846	.500	.154	.017	.003	.000	.000	.000	.000
13	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.994	.922	.655	.268	.044	.020	.002	.000	.000	.000
14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.966	.788	.414	.098	.030	.006	.000	.000	.000
15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.987	.885	.575	.189	.071	.017	.000	.000	.000
16	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.996	.946	.726	.323	.149	.047	.000	.000	.000
17	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.978	.846	.488	.273	.109	.002	.000	.000
18	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.993	.926	.659	.439	.220	.009	.000	.000
19	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.971	.807	.622	.383	.033	.001	.000
20	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.991	.910	.786	.579	.098	.007	.000
21	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.967	.904	.766	.236	.034	.000
22	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.991	.968	.902	.463	.127	.002
23	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.993	.973	.729	.358	.026
24	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.996	.928	.723	.222

Table A.1 Cumulative Binomial Probabilities

$$B(x; n, p) = \sum_{y=0}^{x} b(y; n, p)$$

a. $n = 5$

		p														
		0.01	**0.05**	**0.10**	**0.20**	**0.25**	**0.30**	**0.40**	**0.50**	**0.60**	**0.70**	**0.75**	**0.80**	**0.90**	**0.95**	**0.99**
	0	.951	.774	.590	.328	.237	.168	.078	.031	.010	.002	.001	.000	.000	.000	.000
	1	.999	.977	.919	.737	.633	.528	.337	.188	.087	.031	.016	.007	.000	.000	.000
x	**2**	1.000	.999	.991	.942	.896	.837	.683	.500	.317	.163	.104	.058	.009	.001	.000
	3	1.000	1.000	1.000	.993	.984	.969	.913	.812	.663	.472	.367	.263	.081	.023	.001
	4	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.998	.990	.969	.922	.832	.763	.672	.410	.226	.049

b. $n = 10$

		p														
		0.01	**0.05**	**0.10**	**0.20**	**0.25**	**0.30**	**0.40**	**0.50**	**0.60**	**0.70**	**0.75**	**0.80**	**0.90**	**0.95**	**0.99**
	0	.904	.599	.349	.107	.056	.028	.006	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	1	.996	.914	.736	.376	.244	.149	.046	.011	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	2	1.000	.988	.930	.678	.526	.383	.167	.055	.012	.002	.000	.000	.000	.000	.000
	3	1.000	.999	.987	.879	.776	.650	.382	.172	.055	.011	.004	.001	.000	.000	.000
	4	1.000	1.000	.998	.967	.922	.850	.633	.377	.166	.047	.020	.006	.000	.000	.000
x	**5**	1.000	1.000	1.000	.994	.980	.953	.834	.623	.367	.150	.078	.033	.002	.000	.000
	6	1.000	1.000	1.000	.999	.996	.989	.945	.828	.618	.350	.224	.121	.013	.001	.000
	7	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.988	.945	.833	.617	.474	.322	.070	.012	.000
	8	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.989	.954	.851	.756	.624	.264	.086	.004
	9	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.994	.972	.944	.893	.651	.401	.096

c. $n = 15$

		p														
		0.01	**0.05**	**0.10**	**0.20**	**0.25**	**0.30**	**0.40**	**0.50**	**0.60**	**0.70**	**0.75**	**0.80**	**0.90**	**0.95**	**0.99**
	0	.860	.463	.206	.035	.013	.005	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	1	.990	.829	.549	.167	.080	.035	.005	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	2	1.000	.964	.816	.398	.236	.127	.027	.004	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	3	1.000	.995	.944	.648	.461	.297	.091	.018	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	4	1.000	.999	.987	.836	.686	.515	.217	.059	.009	.001	.000	.000	.000	.000	.000
	5	1.000	1.000	.998	.939	.852	.722	.403	.151	.034	.004	.001	.000	.000	.000	.000
	6	1.000	1.000	1.000	.982	.943	.869	.610	.304	.095	.015	.004	.001	.000	.000	.000
x	**7**	1.000	1.000	1.000	.996	.983	.950	.787	.500	.213	.050	.017	.004	.000	.000	.000
	8	1.000	1.000	1.000	.999	.996	.985	.905	.696	.390	.131	.057	.018	.000	.000	.000
	9	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.996	.966	.849	.597	.278	.148	.061	.002	.000	.000
	10	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.991	.941	.783	.485	.314	.164	.013	.001	.000
	11	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.982	.909	.703	.539	.352	.056	.005	.000
	12	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.996	.973	.873	.764	.602	.184	.036	.000
	13	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.995	.965	.920	.833	.451	.171	.010
	14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.995	.987	.965	.794	.537	.140

(continued)

(c) En az 1 kişinin altında F yazan kolayı tercih etme ihtimali nedir?

(d) En fazla 4 kişinin altında S yazan kolayı tercih etme ihtimali nedir?

$X \sim Bin(n, p)$ için kümülatif dağılım fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır:

Örnek: Bir tür dosyalama kalitesini ölçen bir testi, bir ders kitabının bütün kopyalarının sadece %20 si geçememiştir. Kabul edelimki X rasgele değişkeni rasgele seçilen 15 ders kitabından testi geçemeyenlerin sayısı olsun.

(a) En fazla 8 kitabın teste başarısız olma olasılığı nedir?

(b) Tam olarak 4 kitabın testte başarısız olma olasılığı nedir?

(c) En az 4 en fazla 7 kitabın testte başarısız olma ihtimali nedir?

Table A.1 Cumulative Binomial Probabilities *(cont.)*

$$B(x; n, p) = \sum_{y=0}^{x} b(y; n, p)$$

d. $n = 20$

		p														
		0.01	0.05	0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.75	0.80	0.90	0.95	0.99
x	0	.818	.358	.122	.012	.003	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	1	.983	.736	.392	.069	.024	.008	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	2	.999	.925	.677	.206	.091	.035	.004	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	3	1.000	.984	.867	.411	.225	.107	.016	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	4	1.000	.997	.957	.630	.415	.238	.051	.006	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	5	1.000	1.000	.989	.804	.617	.416	.126	.021	.002	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	6	1.000	1.000	.998	.913	.786	.608	.250	.058	.006	.000	.000	.000	.000	.000	.000
	7	1.000	1.000	1.000	.968	.898	.772	.416	.132	.021	.001	.000	.000	.000	.000	.000
	8	1.000	1.000	1.000	.990	.959	.887	.596	.252	.057	.005	.001	.000	.000	.000	.000
	9	1.000	1.000	1.000	.997	.986	.952	.755	.412	.128	.017	.004	.001	.000	.000	.000
	10	1.000	1.000	1.000	.999	.996	.983	.872	.588	.245	.048	.014	.003	.000	.000	.000
	11	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.995	.943	.748	.404	.113	.041	.010	.000	.000	.000
	12	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.979	.868	.584	.228	.102	.032	.000	.000	.000
	13	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.994	.942	.750	.392	.214	.087	.002	.000	.000
	14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.998	.979	.874	.584	.383	.196	.011	.000	.000
	15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.994	.949	.762	.585	.370	.043	.003	.000
	16	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.984	.893	.775	.589	.133	.016	.000
	17	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.996	.965	.909	.794	.323	.075	.001
	18	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.992	.976	.931	.608	.264	.017
	19	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.997	.988	.878	.642	.182

Beklenen Değer, Varyans, ve Standart Sapma

$X \sim Bin(n, p)$ için

$E(X) = np,$

$Var(X) = np(1-p)$

$\sigma_X = \sqrt{np(1-p)}$

Örnek: Bir mağazada yapılan kasa işlemlerinin %75 i kredi kartıyla yapılıyorsa ve X de rasgele seçilen 10 kasa işleminden kredi kartı kullananların sayısı olsun.

(a) X nasıl bir dağılıma sahiptir?

(b) $P(X \geq 2) = ?$

(c) $P(2 \leq X \leq 4) = ?$

(d) $E(X), Var(X), \sigma_X$ değerlerini bulunuz.

(e) X in belenen değerden σ sık sapma ihtimali nedir?

ALIŞTIRMALAR

1. Bir şirketin 400 adet laptopu vardır ve her bir laptop %8 ihtimalle çalışmıyor olsun. Rasgele 20 laptop seçildiğinde,

(a) 5 tanesinin bozuk olma ihtimali nedir?

(b) Hepsinin sağlam olma ihtimali nedir?

(c) Hepsinin bozuk olma ihtimali nedir?

2. Yapılan bir çalışmaya göre Türkiyedeki gençlerin %4 de dövme vardır. Rasgele 30 genç seçildiğinde tam olarak 3 tanesinde dövme olma ihtimali nedir?

3. Bir XYZ cep telefonu 55 parçadan oluşmaktadır. Her bir parçanın arızalı olma ihtimali 0,002 dir. Rasgele seçilen bir XYZ cep telefonun mükemmel bir şekilde çalışmamama ihtimali nedir?

4. ABC şirketi oyuncak robotlar üretmektedir. 100 oyuncak robottan 1 çalışmamaktadır. Bu firmadan alacağınız 35 robottan tam olarak 4 tanesinin çalışmıyor olma ihtimali nedir?

5. Renkli taşlardan yapılmış bir mücevherdeki taşların %20 sinde mavidir
(a) 20 adet boncuktan oluşan bir kolyede 3 ten fazla mavi boncuk olma ihtimali nedir?,
(b) 28 boncuktan oluşan bir kolyede tam olarak 4 tane mavi boncuk kullanılmış olma ihtimali nedir?

3.5 Hipergeometrik ve Negatif Binom Dağılımı

Hipergeometrik ve negatif binom dağılımları binom dağılımıyla bağlantılı iki ayrık dağılım türüdür. Binom dağılımı sonlu sayıda sayıda iki gruba ayrılmış (S ve F) denemelerin oluşturduğu N büyüklüğündeki bir popülasyondan geri yerine koymaksızın n büyüklüğünde bir örneklemin seçilmesiyle yapılan yaklaşık bir olasılık modelidir. Hipergeometrik dağılımsa örneklem içerisindeki başarıların sayısı kesin bir olasılık modelidir.

Binom rasgele değişkeni X sabit sayıdaki n tane denemedeki başarıların sayısı iken Negative binom dağılımı ise rasgele sayıda deneme içerisinde belirli bir sayıda başarı elde edilmesine odaklanır.

Hipergeometrik Dağılım:

Hipergeometrik bir dağılımın var olması gerek koşullar aşağıdaki gibidir:

1. Popülasyon sonlu sayıda N eleman, birey yada objeden oluşur.
2. Her bir eleman başarı S yada başarısızlık F olarak karakterize edilir, ve popülasyonda M tane başarı vardır.
3. Geri yerine koymaksızın n tane bireyden oluşan bir örneklem seçilir. Bu örneklemdeki n tane bireyin her bir alt kümesi eşit ihtimalle seçilebilir.

Hipergeometrik dağılıma ait rasgele X değişkeni örneklemdeki başarı sayısıdır. X in olasılık dağılımı ise n,M ve N parametrelerine bağlıdır.

$$P(X=x) = h(x; n, M, N)$$

Popülasyon Büyüklüğü

Başarıların Sayısı

Örneklem Büyüklüğü

Örnek: Belirli bir zaman aralığında üniversitenin bilgi işlem merkezi 8 tanesi lazer, 12 tanesi püskürtmeli olmak üzere 20 adet yazıcı için servis çağrısı almıştır. Bu çağrılardan 5 tanesi rasgele bir şekilde seçilsin. Bu seçim işlemide eşit ihtimalli olsun. Bu durumda yapılan çağrılardan tam olarak 2 tanesinin mürekkep püskürtmeli yazıcı için yapılmış olma ihtimali nedir?

$N = 20, M = 12,\ ve\ n = 5$ parametrelerine sahip olduğumuz bir hipergeometrik dağılım için

$$P(X=2) = h(2; 5,12,20) = \frac{\text{2 S bulunduran sonuçların sayısı}}{\text{Bütün olası sonuçların sayısı}}$$

$$= \frac{\binom{12}{2}\binom{8}{3}}{\binom{20}{5}} = \frac{77}{323} = 0,238$$

Bu örneği genelleyecek olursak:

Hipergeometrik dağılıma sahip X rasgele değişkeni için olasılık kitle fonksiyonu $max\{0,n-N+M,\} \leq x \leq min\{n, M\}$ olmak üzere

$$P(X=x) = h(x; n, M, N) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

Şeklinde tanımlanır.

Beklenen Değer ve Var(X):

X, hipergeometrik dağılıma sahip bir ayrık rasgele değişken olmak üzere

$E(X) = n\dfrac{M}{N}$

$V(X) = (\dfrac{N-n}{N-1})n\dfrac{M}{N}(1-\dfrac{M}{N})$

$\dfrac{M}{N}$: Popülasyondaki başarılı sonuçların oranıdır. Bu oranı p ile gösterirsek

$E(X) = np$ ve $V(X) = npq(\dfrac{N-n}{N-1})$ olur.

Negatif Binom Dağılımı

Aşağıdaki koşulları sağlayan bir bir deneydeki olasılık dağılımına negatif binom dağılımı denir:

1. Deney bağımsız denemelerin bir dizisidir,
2. Herbir deneme başarı S yada başarısızlık F ile sonuçlanır,
3. Herbir denemedeki başarı olasılığı aynıdır; yani, her i=1,2,... için $P(i\,.\,denemede\ S) = p$ olur.
4. Deney $r.$ başarı elde edilene denk devam eder.

X: $r.$ başarı elde edilinceye kadarki başarısızlıkların sayısıdır.Burada başarı sabitken deneme sayıları farklılık gösterir. Burada başarı sayıları sabitken, değişken bu sabit sayıdaki başarıyı elde etmek için deneyi oluşturan denemelerin sayısıdır.

Bu durumda $p = P(S)$ başarı olasılığına sahip denemelerden oluşan r parametreli X negatif binom rasgele değişkeni için, olasılık kitle fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\boxed{nb(x; r, p) = \binom{x+r-1}{r-1}p^r(1-p)^x}$$

Örnek: Bir çocuk doktoru ilk cocuklarını bekleyen 5 çifti yeni ve doğal bir doğum diyetine katılmaları için tedavi etmek istiyor. Rasgele seçilen bir çiftin bu diyete katılmayı isteme ihtimali $0{,}2$ olsun.

(a) Diyete katılmak isteyen 5 çift bulunmadan önce 15 çiftin bu programa davet edilmiş olma ihtimali nedir?

$$nb(10; 5,\ 0{,}2) = \binom{14}{4}(0{,}2)^5(0{,}8)^{10} = 0{,}034$$

(b) En fazla 15 çifte bu davet yapıldığında en fazla 10 olumsuz yanıt almış olma ihtimali nedir?

$$P(X \leq 10) = \sum_{x=0}^{10} nb(x; 5,\ 0{,}2) = (0{,}2)^5 sum_{x=0}^{10}\binom{x+4}{4}(0{,}8)^x = 0{,}164$$

Eğer X negatif binom dağılımına sahip bir rasgele değişken ve $nb(x; r, p)$ de olasılık kitle fonksiyonu ise beklenen değer ve varyans sırasıyla $E(X) = \dfrac{r(1-p)}{p}$ ve $Var(X) = \dfrac{r(1-p)}{p^2}$ olur.

4. SÜREKLİ RASGELE DEĞİŞKENLER

Hatırlayacak olursak bir rasgele değişkene **süreklidir** demiştik eğer bu rd. nin aldığı değerler sayı doğrusu üzerinde bir aralık olarak yada birden fazla ayrık aralığın birleşimi olarak ifade edilirken sadece bir tek noktada aldığı değerin gerçekleşme ihtimali sıfır oluyorsa. Yani X bir sürekli rasgele değişkendir (srd) eğer

(S1) $A < B$ olmak üzere (A, B) aralığındaki her reel sayı X in aldığı bir değerdir ve

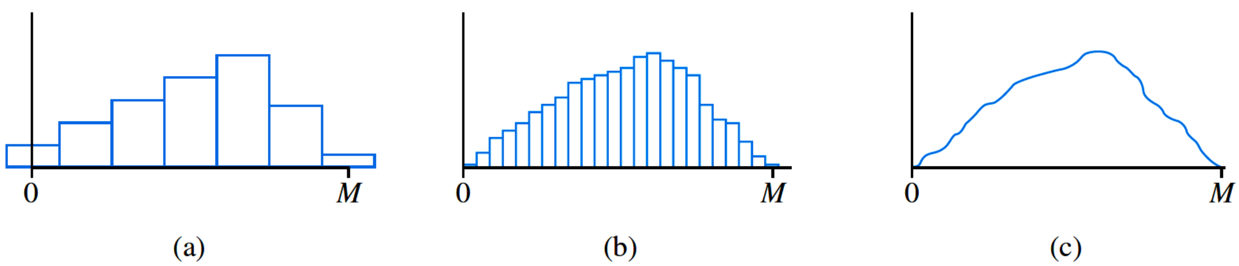
(S2) Her $c \in (A, B)$ için $P(X = c) = 0$ dır.

- Bir gölün ekolojisiyle ilgili yapılan bir çalışmada, rasgele seçilen bir kısmında gölün derinliği ölçülüyor olsun. X rd bu yapılan ölçümler olarak tanımlanırsa, X bir srd. olur.
- Rasgele seçilen kimyasal bileşenlerin pH seviyeleri X rd olarak tanımlanırsa, X bir srd olur. $[0,14]$ aralığındaki herhangi bir değer X olabilir.
- Rasgele seçilen müşterilerin berberde traş öncesi bekleme sürelerini X rd olarak tanımlarsak, X in srd olduğunu düşünebiliriz; ancak, bu sonuca ulaşmak için berberde boş bir koltuğun olmadığı varsayımında bulunmamız gerekir. Aksi halde gelen müşterilerin bekleme süreleri 0 olur ve $P(X = 0) > 0$ olur.

Bu örnekler göz önüne alındığında, yükseklik, ağırlık, sıcaklık gibi ölçümlerden yaralanılarak tanımlanan X rasgele değişkenleri yüksek ihtimalle sürekli rasgele değişken iken bazı sınırlamalar bizi kesikli rd e mecbur bırakıyor olabilir. Gerçekte ise, dünyaya ve fiziğe dayalı fenomenenlerin çoğu sürekli rasgele değişkenler ve dağılımlarla modellenir.

4.1 Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu (OYF)

Kabul edelimki X bir gölün rasgele seçilen bir noktasındaki derinliği olsun ve ölçümler $[0,M]$ aralığında yeralsın. Histogram grafiğiyle bu ölçümleri ayrık dağılım olarak modelleyebiliriz. Eğer histogram grafiğindeki belirli bir k değerindeki bar gölün k derinliğindeki kısımlarının gölün tamamına oranı olarak düşünülürse,

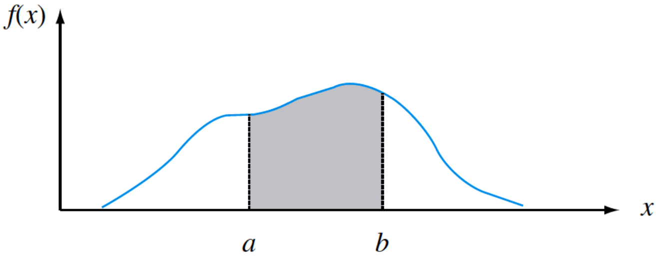


dikdörtgenlerin toplam alanı 1 olur ve dikdörtgenler $(a) \rightarrow (c)$ daralıyor ve sayıları artıyor olsa dahi toplam oran halen daha 1 dir. (Bu hikaye size tanıdık geldi mi?)

Olasılık Dağılımı

X srd için **olasılık dağılımı** yada **olasılık yoğunluk fonksiyonu (oyf)** bir $f(x)$ fonksiyonudur öyleki:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx \text{ olur.}$$



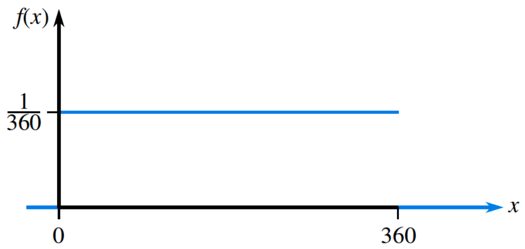
$P(a \leq X \leq b) = a \ ve \ b$ arasındaki bölgenin alanı

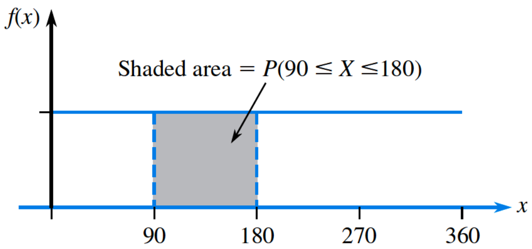
$f(x)$ in gerçekten bir olasılık yoğunluk fonksiyonu olması için aşağıdaki gerek ve yeter koşulları sağlıyor olması gerekir.

1. Her $x \in X, \ f(x) \geq 0,$
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ **dir.**

Örnek: Tekerlek, fren diski, çark gibi dairesel nesnelerin üzerinde referans çizgileri bulunur. Bu referans çizgilerine göre hata yönü genellikle belirsizliğe tabidir. Bir tekerlekteki sibobun bağlantısını gösteren referans çizgisini ele alalım ve X sibopla bu hata çizgisi arasında kalan saat yönündeki açı olsun. Bu durumda X için muhtemel olasılık yoğunluk fonksiyonlarından biri aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{360} & ;\text{eğer } 0 \leq x \leq 360 \\ 0 & ;\text{diğer durumlarda} \end{cases}$$





Q: Peki gerçekten bu fonksiyon bir olasılık yoğunluk fonksiyonu mudur?

Q: $P(90 \leq X \leq 180) = ?$

Tanım: X **srd** [A,B] aralığı üzerinde sabit bir olasılık dağılımına sahiptir denir eğer X oyf aşağıdaki gibiyse

$$f(x;A,B)=\begin{cases}\frac{1}{B-A} & \text{;eğer } A\le x\le B\\ 0 & \text{;diger durumlarda.}\end{cases}$$

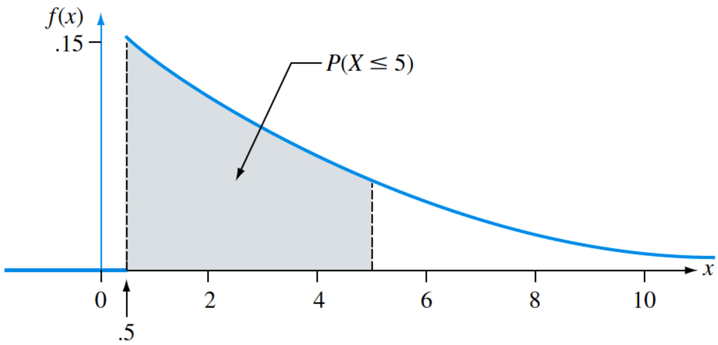
Q: Yukarıdaki oyf fonksiyonunu realize ediniz.

Örnek: Trafikte bir aracın belirli bir noktayı geçtikten sonra bir sonraki aracın o noktayı geçmesine kadar geçen süreye taşıt aralığı (Time headway) denir. X rasgele değişkeni yoğun bir trafiğin olduğu bir yolda rasgele seçilen arka arkaya giden iki araç için yapılan taşıt aralığı ölçümü olsun. Yapılan bir çalışmada X için oyf fonksiyonu aşağıdaki gibi veriliyor:

$$f(x)=\begin{cases}0{,}15e^{-0{,}15(x-0{,}5)} & \text{;eğer} x\ge 0{,}5\\ 0 & \text{;diger durumlarda.}\end{cases}$$

Q_1. $f(x)$ in X için bir olasılık yoğunluk fonksiyonu olup olmadığını realize ediniz.

Q_2. $P(X\le 5)=?$



Örnek: Bir öğretmen okula giderken ilk olarak evinin önündeki duraktan bir otobüse biniyor ve sonra ikinci bir otobüse transfer yapıyor. Herbir durakta bekleme süreleri dakika cinsinden bir birim dağılıma sahipse $A=0$ ve $B=5$ olmak üzere $Y=$ toplam durakta bekleme süresi rasgele değişkeni için oyf fonksiyonu

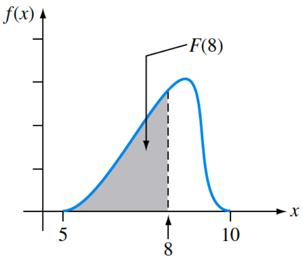
$$f(y)=\begin{cases}\frac{1}{25}y; & 0\le y<5\\ \frac{2}{5}-\frac{1}{25}y; & 5\le y\le 10\\ 0; & y<0 \text{ya da} y>10\end{cases}$$

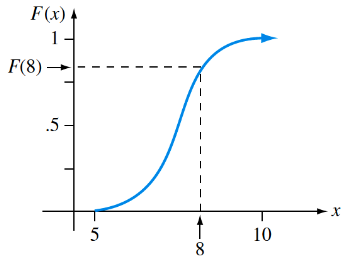
1. $f(y)$ fonksiyonun grafiğini çiziniz.
2. $f(y)$ nin oyf olup olmadığını realize ediniz.
3. En fazla 3 dk bekleme yapma ihtimalini bulunuz.
4. En fazla 8 dk bekleme yapma ihtimalini bulunuz.
5. Toplam bekleme süresinin 3 ile 8 dk arasında olması olasılığını bulunuz.
6. Toplam bekleme süresinin ya 2 dk dan az ya da 6 dk dan fazla olma ihtimalini hesaplayınız.

4.2 Kümülatif Dağılım Fonksiyonu (kdf) ve Beklenen Değer

X srd için kümülatif olasılık dağılım fonksiyonu kısaca kdf aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)dy$$

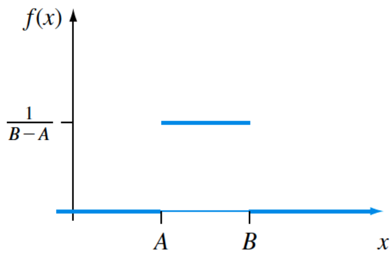


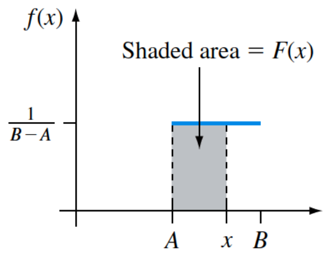


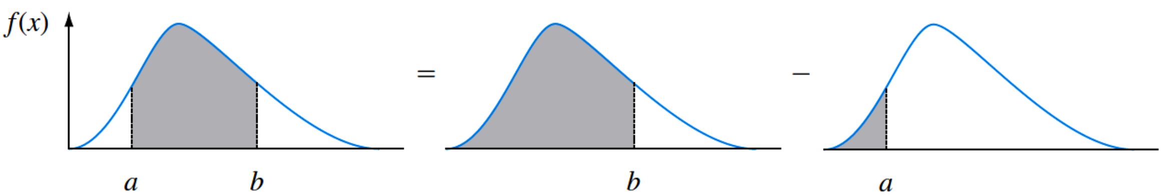
Örnek: X rd bir metal levhanın kalınlığı olsun. X rd $[A, B]$ aralığı üzerinde sabit dağılıma sahip olsun. Bu durumda X için kümülatif dağılım fonksiyonu aşağıdaki şekilde bulunur:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; x \leq A \\ \frac{x-A}{B-A} & ; A \leq x \leq B \\ 1 & ; x > B \end{cases}$$

Q: Bu fonksiyonu nasıl bulduk?







$P(a \leq x \leq b) =$

Örnek: X srd için verilen $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} + \frac{3}{8}x & ; 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & ; dd \end{cases}$ okf kullanarak X ait kdf bulunuz.

$P(1 \leq x \leq 1{,}5) = ?$

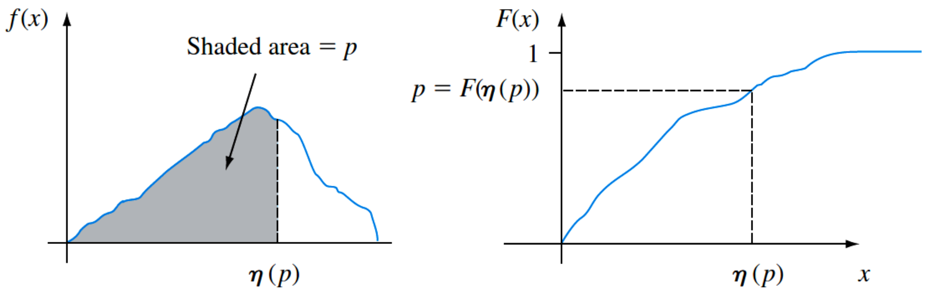
Not: X için kdf fonksiyonu elde edildikten sonra X e dair herhangi bir olasılık artık integral hesaplanmadan bulunabilir. Aşağıdaki sonuç kalkulüsün temel teoreminden dolayı kolayca elde edilir.

Teorem: Eğer $X, f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna (oyf) ve $F(x)$ kümülatif dağılım fonksiyonuna (kdf) fonksiyonuna sahip bir sürekli rasgele değişken (srd) ise $F(x)$ türevlenebilir olduğu her x noktasında $F'(x) = f(x)$ dir.

SÜREKLI DAĞILIMA İÇIN YÜZDELIKLER

Bir kişinin sınav notunun sınava girenlerin 85. yüzdeliğinde olduğunu söylediğimizde, sınavı alan kişilerin %85 inin notlarının o kişinin aldığı puanla eşit yada daha az olduğu anlarız.

Tanım: $0 \leq p \leq 1$ olmak üzere, $\eta(p)$ sayısı X srd nin $(100 \cdot p)$. yüzdeliğini göstersin. Bu durumda



$$p = F(\eta(p)) = \int_{-\infty}^{\eta(p)} f(y)dy.$$

Örnek: İnşaat malzemesi satan belirli bir firmanın belirli bir hafta içerisinde sattığı dolgu malzemelerinin miktarı (ton) X srd ile ifade edilsin. X için oyf fonksiyonu $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}(1-x^2) & ; 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & ; dd \end{cases}$ olarak veriliyor olsun.

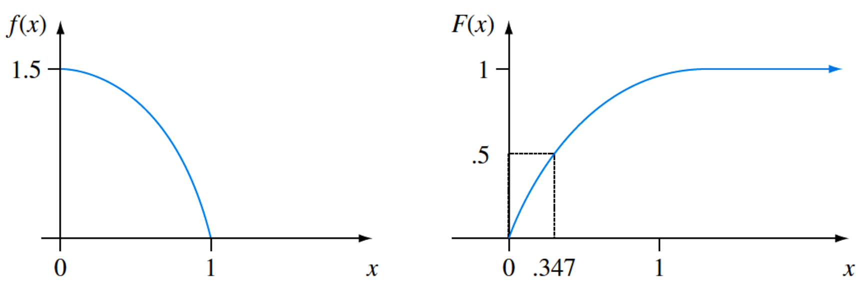
$[0,1]$ aralığı üzerinde $F(x)$ kdf aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$F(x) = \int_0^x \frac{3}{2}(1 - y^2)\,dy = \frac{3}{2}\left(y - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_{y=0}^{y=x} = \frac{3}{2}\left(x - \frac{x^3}{3}\right)$$

Bu durumda $(100 \cdot p)$. yüzdelik aşağıdaki denklemi sağlar:

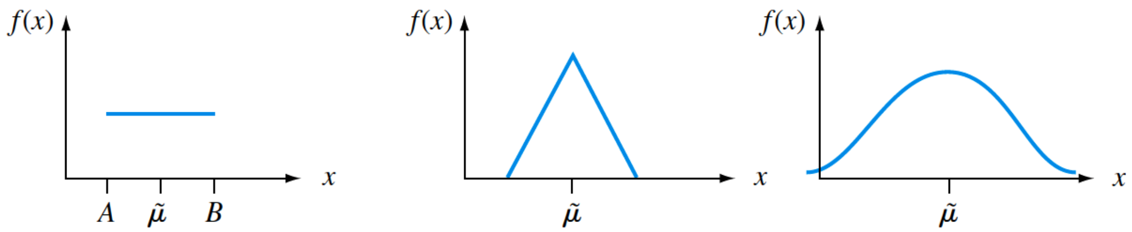
$$p = F(\eta(p)) = \frac{3}{2}\left[\eta(p) - \frac{(\eta(p))^3}{3}\right] \Rightarrow (\eta(p))^3 - 3\eta(p) + 2p = 0$$

Öyleyse 50.yüzdelik için $p = 0{,}5$ olur ve $\eta^3 - 3n + 1 = 0$ denklemi çözüldüğünde $\eta = \eta(0{,}5) = 0{,}347$ olarak bulunur. Sözel olarak bu sonuç şu anlama gelmektedir: Eğer dağılım haftadan haftaya aynı kalırsa, uzun bir satış dönemi neticesinde bütün haftaların %50 sinde <u>0,347 tondan az</u> ve geriye kalan diğer %50 lik kısımda



ise <u>0,347 tondan fazla</u> dolgu malzemesi satılmış olduğu sonucuna ulaşırız.

Tanım: X srd için medyan $\tilde{\mu}$ 50.yüzdelik değerine karşılık gelir. Yani $\tilde{\mu} = \eta(0{,}5) \Rightarrow 0{,}5 = F(\tilde{\mu})$. Geometrik olarak konuşacak olursak olasılık yoğunluk fonksiyonuna ait grafiğin altında kalan alanı $x = \tilde{\mu}$ dikey doğrusu yarı yarıya bölmektedir.



Simetrik Dağılımlara ait Medyanlar

Tanım: X srd için beklenen değer (ortalama) $\mu_X = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$ olarak tanımlanır.

Örnek: X srd için $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}(1-x^2) & ; 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & ; \quad dd \end{cases}$ olasılık yoğunluk fonksiyonu veriliyor. $\mu_X = ?$

X srd ne bir $h(x)$ fonksiyonu uygulandığında yeni bir rasgele değişken elde edilmiş olur; $Y = h(X)$. Bu yeni rasgele değişkenin sırasıyla beklenen değerini, varyansını ve standart sapmasını hesaplayacak olursak

- $\mu_Y = E(Y) = E(h(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) f(x) dx$
- $Var(X) = \sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X) f(x) dx = E((X - \mu_X)^2)$
- $\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$

Teorem: Her X srd için, $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ dir.
İspatı Ödev.

Örnek: İnşaat malzemesi satan belirli bir firmanın belirli bir hafta içerisinde sattığı dolgu malzemelerinin miktarı (ton) X srd ile ifade edilsin. X için oyf fonksiyonu $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}(1 - x^2) & ;0 \leq x \leq 1 \\ 0 & ; \quad dd \end{cases}$ olarak veriliyor olsun. X için beklenen değer, varyans ve standart sapmayı bulunuz.

ALIŞTIRMALAR

(1) Belirli bir ölçme işlemindeki hata payı aşağıda olasılık yoğunluk fonksiyonu verilen X sürekli rasgele değişkeni olarak tanımlanıyor:

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}09375(4 - x^2) & ; -2 \leq x \leq 2 \\ 0 & ; \quad dd \end{cases}$$

a. $f(x)$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

b. $P(X > 0) = ?$

c. $P(-1 \leq X \leq 1) = ?$

d. $P(X < -0{,}5$ ya da $X > 0{,}5) = ?$

e. $E(X), Var(X), \ ve \ \sigma_X$ değerlerini bulunuz.

(2) Olasılık istatistik dersleri hiçbir zaman zamanında bitmez ve her zaman ders saatinden 2 dk sonra biter. Kabul edelimki X rasgele değişkeni ders bitimi ve ders saati arasındaki geçen süre olsun ve X için olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x) = \begin{cases} kx^2 & ;0 \leq x \leq 2 \\ 0 & ; \quad dd \end{cases}$ olsun.

a. $k = ?$

b. Dersin ders saatinden sonraki 1 dakika içerisinde bitme ihtimali nedir?

c. Dersin ders saatinden sonra 60 ve 90 arasında devam etme ihtimali nedir?

d. Ders süresi ortalama ne kadar uzar?

(3) Belirli bir yıl boyunca bir bireyin yapacağı toplam sağlık harcaması (1000 TL cinsinden) X rasgele değişkeni olarak tanımlansın. X kesikli rasgele değişken olmasına rağmen kabul edelim aşağıdaki olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip bir sürekli dağılımla modellenmiş olsun: $f(x) = k(1 + \frac{2x}{5})^{-7}$ her $x \geq 0$.

a. $k = ?$

b. X in oyf fonksiyonun grafiğini çiziniz

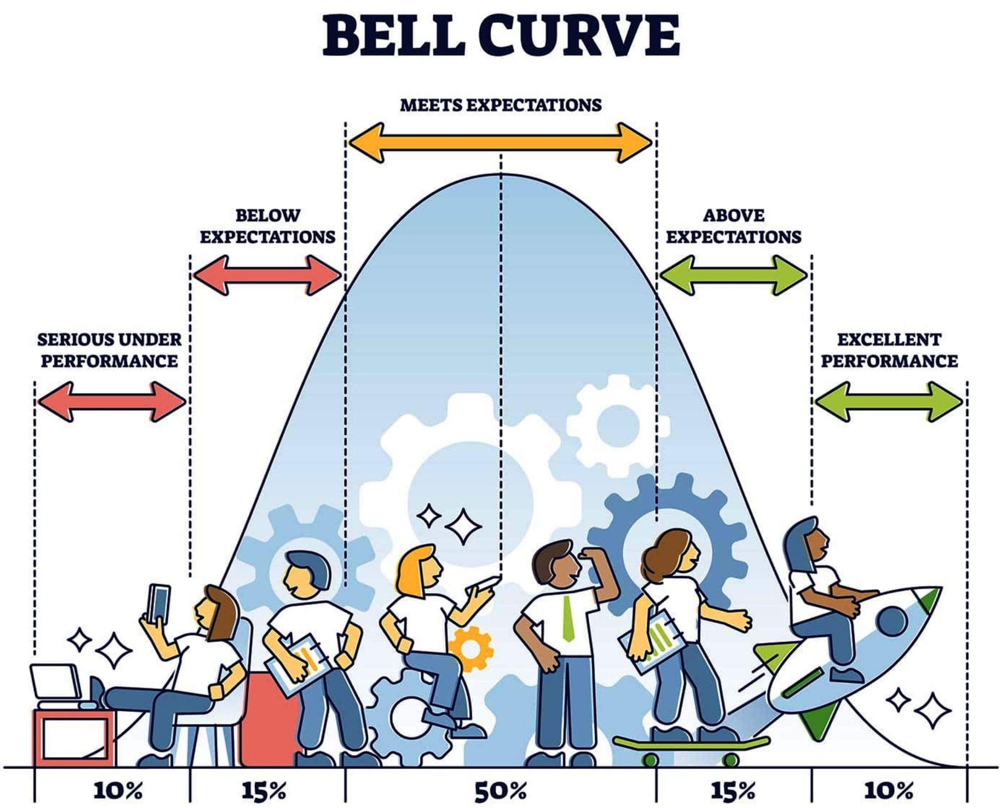
c. Sağlık harcamalarının beklen değerini ve varyansını hesaplayınız.

d. Bu kişinin sağlık sigortasında özel bir koşul bulunmaktadır: yapacağı sağlık harcamasının ilk 500 tl lik kısmı kendisi tarafından ödenir, 500 tl yi aşan giderlerin herbirinde sigorta geriye kalan miktarın %80 ni ödeyecektir ve kişinin yapacağı ödeme ilk 500 tl kısım dahil olmak üzere maksimum 2500 tl dir. Y sigorta şirketi tarafından bu kişi için yapılacak sağlık ödemelerinin miktarı olsun. $E(Y) = ?$

(İp ucu: X in hangi degeri için 2500 tl lik ödeme yapılır? Y yi X in bir Fonksiyonu olarak ifade edin.)

4.3 Normal Dağılım

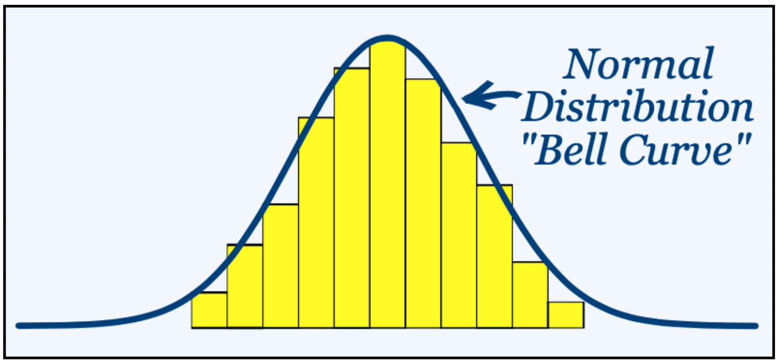
Olasılık ve istatistik konuları içerisindeki en önemli kısım normal dağılımlardır. Pek çok nümerik popülasyon normal dağılım özelliği göstermektedir: boy uzunlukları, ağırlıklar, diğer fiziksel özellikler, bilimsel bir deneydeki ölçüm hataları, fosillerin yaş tahminleri, psikolojik deneylerdeki tepki süreleri, zeka ölçümleri, kabiliyet ölçümleri, ekonomik veriler, sınav test puanları vs..



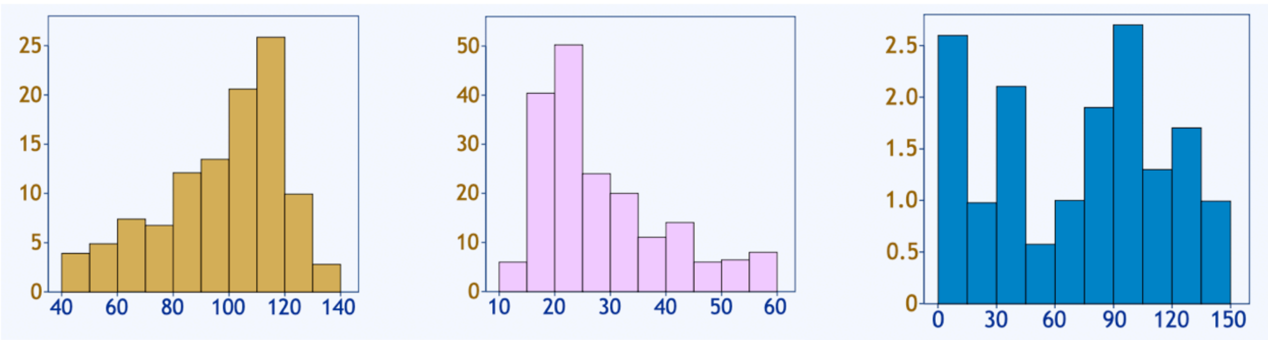
Tanım: X srd μ ortalamalı ve σ^2 varyanslı bir normal dağılıma sahiptir ve bu ilişkiyi $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ile gösteririz eğer X in olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x;\mu,\sigma) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $-\infty < x < \infty$.

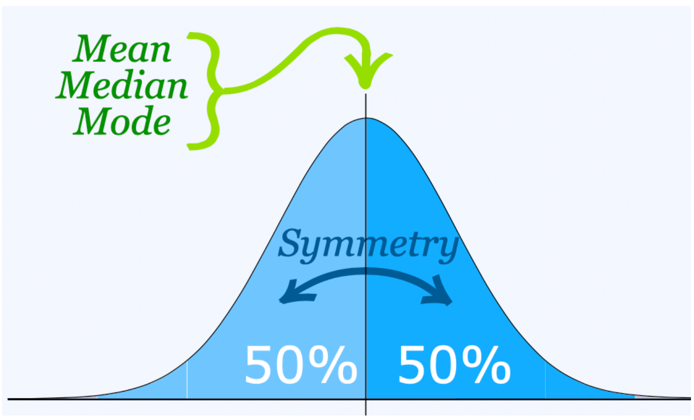
$f(x;\mu,\sigma) \geq 0$ **olduğunu görmek zor olmasada** $\int_{-\infty}^{\infty} f(x;\mu,\sigma)dx = 1$ **olduğunu göstermek biraz zor olabilir.**

Şekildeki eğriler bir tür çan figürünü anımsattığı için bu eğrileri çan eğrisi olarak adlandırıyoruz.



Ancak veri daima bu kadar düzenli dağılmak zorunda değildir.

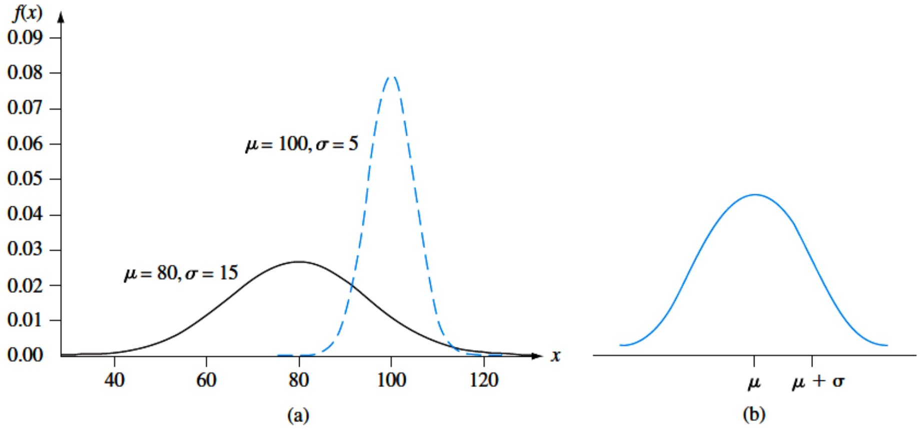




Ancak daha profesyonelce söylemek gerekirse $f(x;\mu,\sigma)$ bir oyf olduğundan, bu eğrilere yoğunluk eğriside deriz. Burada μ dağılımın medyanı, ortalaması(Beklenen Değeri) ve modudur. Yoğunluk eğrisi μ ye göre simetriktir.

$f(x;\mu,\sigma)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ fonksiyonu $E(X)=\mu$ ve $Var(X)=\sigma^2$ parametrelerine bağlıdır.

Aşağıdaki şekilde farklı (μ, σ) degerleri için çizilmiş normal dağılım eğrilerini görmekteyiz.



μ bir lokasyon parametresi olup μ deki büyük ölçekli bir değişim çan eğrisinin sağa yada sola doğru kaymasına sebep olur. σ ise bir tür ölçeklendirme parametresidir ve bu değerdeki değişimler ise çan eğrisinin yatayda esneyip daralmasına sebeb olur. Çan eğrisinin büküm noktaları (konveks ve konkav özelliklerinin değiştiği yer) $\mu \pm \sigma$ dır. Bu durumda σ büyük ve küçük değerler alması halinde yoğunluk eğrisi hakkında nasıl bir yorumda bulunabiliriz?

STANDART NORMAL DAĞILIM

Kabul edelimki $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ olsun. Bu halde $P(a \leq X \leq b)$ olasılığını bulmak için aşağıdaki integrali hesaplamamız gerekmekte.

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x; \mu, \sigma) dx = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

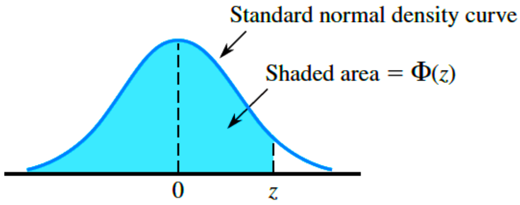
Peki bu integrali nasıl hesaplarız ?

Ortalaması $\mu = 0$ ve standart sapması $\sigma = 1$ olan normal dağılımlara **standart normal dağılım** denir. Standart normal dağılıma sahip bir rasgele değişkene standart normal rasgele değişken denir ve Z ile gösterilir. O halde Z nin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(z;\ 0,\ 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$ olur. Bu fonksiyonun grafiğine standart normal dağılım eğrisi ya da kısaca z-eğrisi denir. Bu eğrinin büküm noktaları $z = -1$ ve $z = 1$ dir.

Ayrıca Z için kümülatif dağılım fonksiyonu aşağıda verilmektedir:

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} f(y;\ 0,\ 1)\,dy.$$

Bu fonksiyonun belirli z değerleri için aldığı değerler aşağıdaki tablolarda mevcuttur. Bu tabloya Z-tablosu denir.



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
−3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002
−3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003
−3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005
−3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007
−3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010
−2.9	.0019	.0018	.0017	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
−2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
−2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
−2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
−2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0038
−2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
−2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
−2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
−2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
−2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
−1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
−1.8	.0359	.0352	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
−1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
−1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
−1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
−1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0722	.0708	.0694	.0681
−1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
−1.2	.1151	.1131	.1112	.1093	.1075	.1056	.1038	.1020	.1003	.0985
−1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
−1.0	.1587	.1562	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
−0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
−0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
−0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2296	.2266	.2236	.2206	.2177	.2148
−0.6	.2743	.2709	.2676	.2643	.2611	.2578	.2546	.2514	.2483	.2451
−0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
−0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
−0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3482
−0.2	.4207	.4168	.4129	.4090	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
−0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
−0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4840	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641

Table A.3 Standard Normal Curve Areas *(cont.)* $\Phi(z) = P(Z \leq z)$

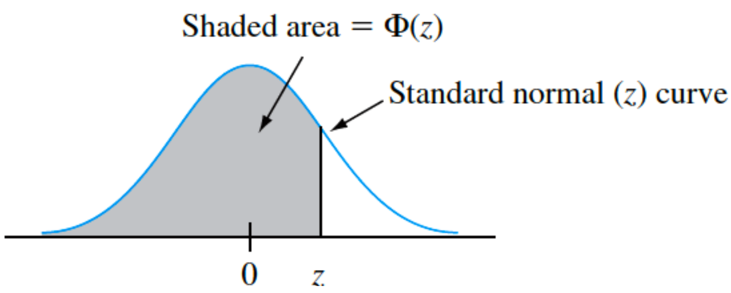
z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9278	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

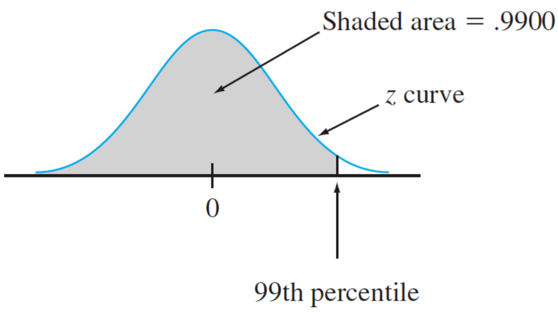
Not: Farklı Z-tabloları mevcuttur. Biz derslerimizde ve sınavlarımızda yukarıdaki tabloyu kullanacağız.

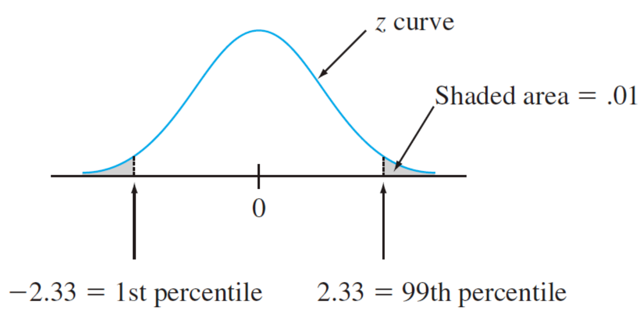
Örnek: Aşağıda istenen olasılıkları Z-tablosunu kullanarak hesaplayınız.

- $P(Z \leq 1{,}25) =$
- $P(Z \leq -1{,}25) =$
- $P(Z \geq 1.25) =$
- $P(-0{,}38 \leq Z \leq 1{,}25) =$

Her $p \in [0,1]$ için, Z-tablosu kullanılarak $(100 \cdot p)$. yüzdeliğini bulabiliriz. Bu sadece $P(Z \leq z) = p$ denkleminin z için çözümünü soran bir ters problemdir. Yani bu denklemde her şeyi biliyoruz, sadece z yi (100p inci yüzdeleği) bilmiyoruz. Bunun için tablonun ortasında yer alan degerler arasından p olasılığını buluruz ve bu değere karşılık gelen satır ve sutunu birlikte okumak suretiyle $(100 \cdot p)$. yüzdelik olan z değerini bulmuş oluruz. Şimdi 1. ve 99. yüzdelikleri bulalım.

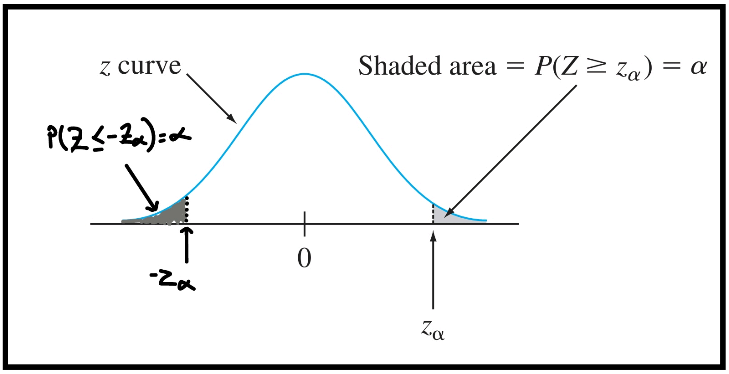


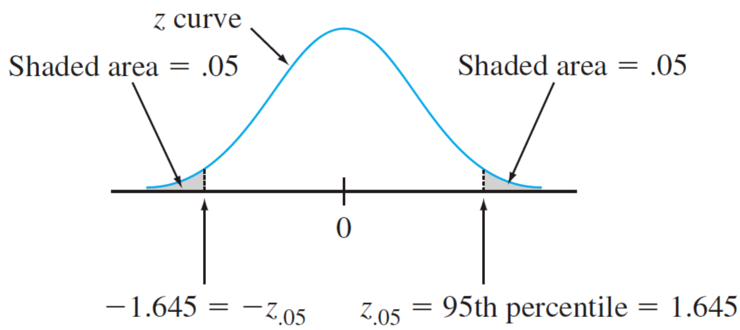




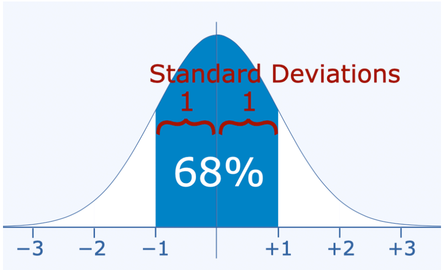
95. ve 90. yüzdelikleride siz bulabilir misiniz?

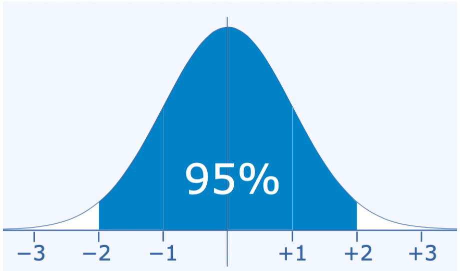
Z- eğrisi altında kalan alandan sağında α kadarını bırakan z değerini z_α ile göstereceğiz ve $\pm z_\alpha$ değerlerine z-kritik-değerleri denir.

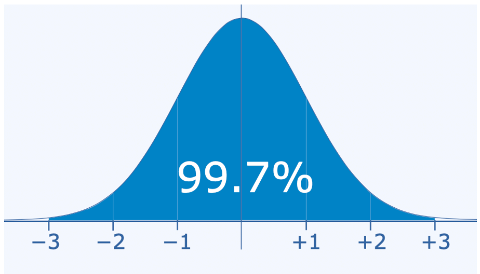




Standart Olmayan Normal Dağılımlar







Verinin %68 i ortalamadan σ kadar sapar

Verinin %95 i ortalamadan 2σ kadar sapar

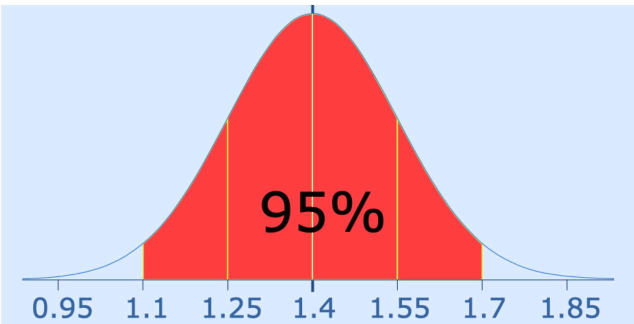
Verinin %99,7 si ortalamadan 3σ kadar sapar

Ancak normal dağılama sahip bir popülasyona ait veride ortalamadan 2 standart sapmadan daha fazla b sapan bir değer çok nadiren gözlemlenir. Bu sonuçlar ilerleyen derslerimizde hipotez-testlerinin oluşturulmasında çok önemli bir yere sahip olacaktır.

Örnek: Bir okuldaki öğrencilerin %95 inin boy uzunlukları 1,1 ve 1,7 metre arasındadır. Eğer bu veri normal dağılıma sahipse, verinin ortalamasını ve standart sapmasını bulabilir misiniz?

Öğrencilerin %95 inin boy uzunlukları bu aralıkta olduğundan iki degerin tam ortasında ortalamanın olduğunu normal dağılım eğrisinin simetri özelliğinden dolayı söyleyebiliriz. Ayrıca bu eğrinin altında kalan %95 lik bölge ortalamadan iki standart sapma kadar saptığımızda oluşuyor olduğundan aşağıdaki denklemin çözümündende ortalama ve standart sapma bulunur:

$$(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma) = (1{,}1\ ,\ 1{,}7) \Longrightarrow \mu = 1{,}4m \text{ and } \sigma = 0{,}15m\ .$$



Böylece yandaki görseli elde etmiş oluruz.

Peki %95 değilde %92 sinin boy uzunluğu bu aralıkta olsaydı, (μ, σ) ikilisi hangi değerleri alırdı?

Tanım: Bir gözlem ile ortalama arasındaki standart sapma cinsinden ölçeklendirilen mesafeye z-puanı denir.

Bu durumda boy uzunluğu 1,85 metre olan bir kişinin z-puanı $[(1{,}85 - 1{,}4)/0{,}15 = 0{,}45 = 3\sigma]$ olup, arkadaşınızın boy uzunluğunun z-puanı 3,0 olur.

Örnek: Günlük yolculuk süreleri (dakika) ile ilgili yapılan bir anket neticesinde aşağıdaki veri oluşturulmuştur.

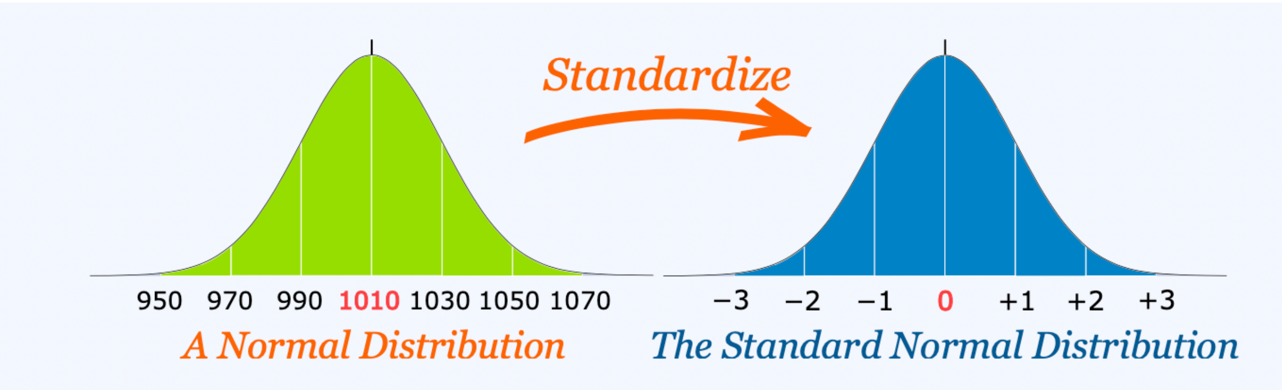
26, 33, 65, 28, 34, 55, 25, 44, 50, 36, 26, 37, 43, 62, 35, 38, 45, 32, 28, 34

Bu verinin ortalaması $\mu = 38{,}8$ ve standart sapması $\sigma = 11{,}4$ olarak bulunur. Peki Nasıl?

$$\mu = \frac{\sum x}{N} \qquad \sigma^2 = \frac{\sum_x (x-\mu)^2}{N} \quad \text{ve} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum_x (x-\mu)^2}{N}}$$

Bu verideki 26, 33 ve 65 değerleri için z-puanlarını hesaplayınız.

Bu yaptığımız z-puanı hesaplama işlemini cebirsel olarak formülüze edecek olursak: $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$.



Neden Standartlaştırırız?

Sahip olduğumuz veri hakkında karar vermemize yardımcı olduğu için.

Örnek: Olasılık ve İstatistik dersinde yapılan bir sınavda 60 puan üzerinden öğrencilerin aldıkları puanlar aşağıdaki gibidir:

20, 15, 26, 32, 18, 28, 35, 14, 26, 22, 17

Göründüğü gibi sınavdan 60 üzerinden 30 dahi alan öğrenci yok. Dolayısıyla çoğu sınavdan kalacak. Dersi veren hoca öğrencilerinin en azından bir kısmının başarılı olmasını istiyor. Bu sebeble veriyi standartlaştırıp sadece ortalamadan 1 standart sapmadan daha aşağıdakilerin başarısız olduğunu kabul ediyor. Peki dersten kimin kaldığını yukarıdaki veriye bakıp söyleye bilir misiniz? Zor olsa gerek.

Peki ya veriyi standartlaştırırsak?

$\mu = 23 \qquad \sigma = 6{,}6 \qquad \Longrightarrow$ -0.45, -1.21, 0.45, 1.36, -0.76, 0.76, 1.82, -1.36, 0.45, -0.15, -0.91

Bu durumda kolayca sadece 2 öğrencinin başarısız olduğunu söyleyebiliriz.

Yukarıdaki görsel sunumdan sonra gerekliliğini ve kullanılırlığını anladığımız standartlaştıma işlemini biraz da teorik olarak tekrar ele alalım.

Kabul edelimki $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ olsun.

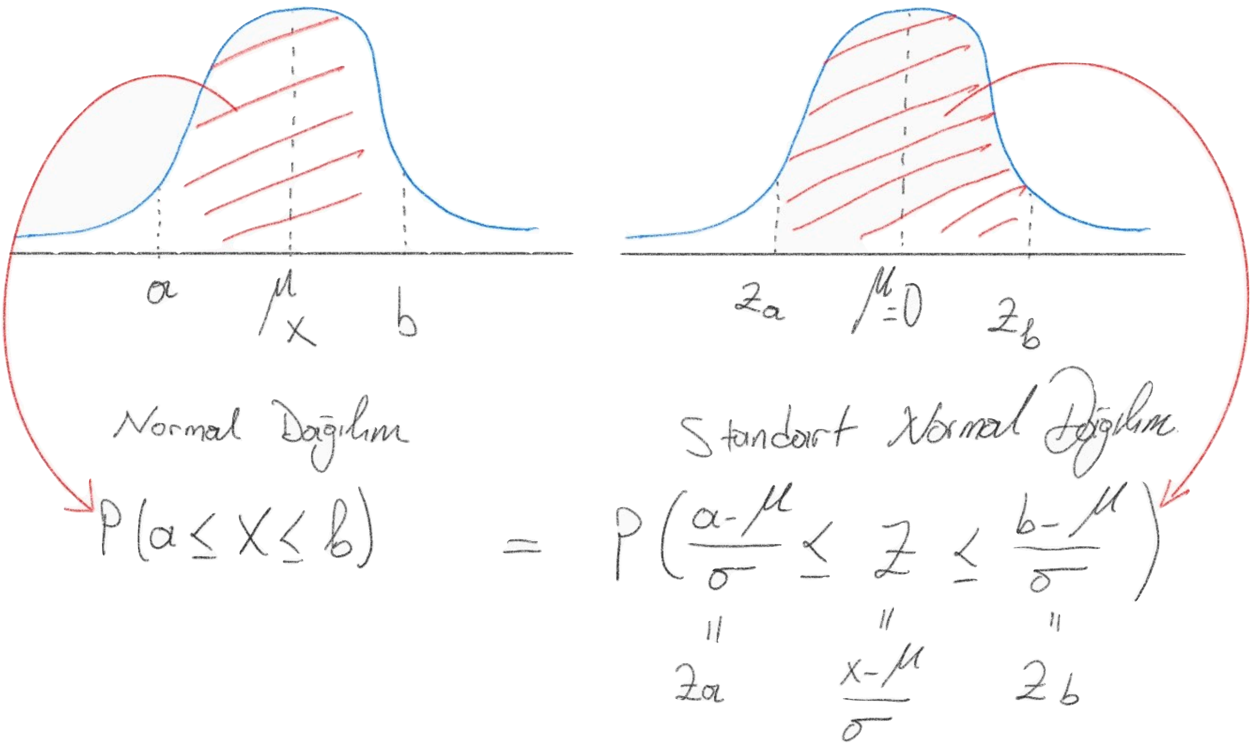
$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x;\mu,\sigma)dx = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

İntegralini hesaplamak $(\mu, \sigma^2) = (0,1)$ olduğu durumunların haricinde mümkün değildi.

Bu sebeble standart olmayan normal dağılıma sahip X srd nini standartlaştırmak gerekmektedir.

Teorem: Eğer $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ise, $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ sürekli değişkeni beklenen değeri $\mu_Z = 0$ ve varyansı $Var(Z) = \sigma_Z^2 = 1$ olan bir normal dağılıma sahiptir. Bu durumda

$$P(a \leq X \leq b) = P(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b-\mu}{\sigma}) \text{ olur.}$$



Örnek: Bir araç sürücüsünün önünde giden aracın fren ışığını görüp reaksiyon göstererek aracını yavaşlatması arkadan çarparak oluşan trafik kazalarından kaçınmak için hayati öneme sahiptir. 1993 yılında yapılan bir akademik çalışmaya göre "Fast Rise Brake Lamp as a Collision Prevention Device" (Ergonomics, 1993: 391–395) , bu reaksiyon süresi ortalaması 1,25 saniye ve standart sapması 0,46 saniye olan bir normal dağılıma sahiptir.

(a) Reaksiyon süresinin 1 ve 1,75 saniye arasında olma ihtimali nedir?

(b) Reaksiyon süresinin 2sn den geç olma ihtimali nedir?

(c) En geç 0,75 sn içerisinde tepki verilme ihtimal nedir?

Örnek: Belirli bir türdeki rasgele seçilen bir diyot için çökme gerilimi normal dağılıma sahiptir. Çöküm geriliminin ortalamadan en fazla 1 standart sapma uzaklaşmış olma ihtimali nedir?

Normal Dağılımlar İçin Yüzdeliklerin Bulunması

$N(\mu, \sigma^2)$ normal dağılımına ait $(100 \cdot p)$ inci yüzdeliğin bulunması için aşağıdaki yol izlenir.

1. Standart Normal dağılımda $(100 \cdot p)$ inci yüzdelik bulunur (daha önce bunu göstermiştik),
2. Yukarıda bulunan yüzdeliği aşağıdaki formülde μ ve σ^2 ikilisiyle birlikte kullanarak standart normal dağılımdan $N(\mu, \sigma^2)$ normal dağılımına geri dönüş yaparız:

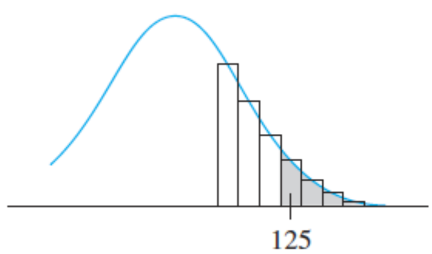
$$\boxed{\begin{array}{c}N(\mu,\sigma^2) \text{ normal dağılımındaki} \\ (100 \cdot p) \text{ inci yüzdelik}\end{array}} = \mu + \boxed{\begin{array}{c}\text{Standart normal dağılımdaki} \\ (100 \cdot p) \text{ inci yüzdelik}\end{array}} \cdot \sigma$$

Örnek: "Assessment of Lifetime of Railway Axle" (Intl. J. of Fatigue, 2013: 40–46) akademik çalışmasında belirli bir başlangıç çatlak uzunluğu ve yenilenme döngü sayısına dair veriler toplanarak, nihai çatlak derinliği X in ortalaması 6,496 mm ve standart sapması 0,067 mm olan bir normal dağılıma sahip olduğu gözlemleniyor. Bu şartlar altında, bütün nihai çatlak derinliklerinin % 0,5 inin aştığı çatlak derinliği nedir?

Normal Dağılım ve Kesikli Popülasyonlar

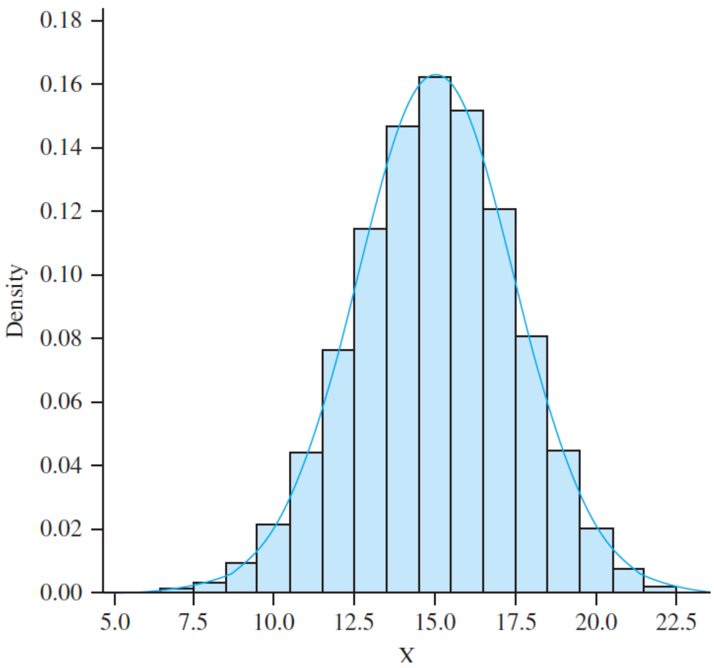
Normal dağılımlar kesikli popülasyonlara ait değerlerin dağılımında sıklıkla kullanılırlar.

Örnek: Standart bir test ile bir popülasyondaki bireylerin IQ degerleri ölçülüyor ve bu değerlerin ortalaması $\mu = 100$ ve standart sapması $\sigma = 15$ olan bir normal dağılıma sahip olduğu saptanıyor. Rasgele seçilen bir bireyin IQ değerinin en az 125 olma ihtimali nedir?



Normalde IQ degerleri tamsayı olduğu için olasılık dağılımının kesikli olması gerekir. Ancak normal dağılım eğrisini, kesikli rasgele değişkene ait histogram grafiğine bir yakınsama olarak ele alabiliriz.

X binom rasgele değişkeni için ortalama ve standart sapma sırasıyla $\mu_X = np$ ve $\sigma_X = \sqrt{npq}$ idi.



Yandaki şekilde tekrar sayısı $n = 25$ başarı olasılığı $p = 0{,}6$ olan bir binom dağılımına sahip X rasgele değişkeni için çizilmiş histogram grafiğini görmekteyiz. Bu durumda $\mu_X = 15$ ve $\sigma_X = 2{,}449$ olarak bulunur. Bu ortalama ve standart sapmaya karşılık gelen normal dağılım eğrisi histogram grafiği üzerendi yer almaktadır. Histogram grafiği biraz sağa doğru kaymış olsada bu hoş görülebilir çünkü $p \neq 0{,}5$. Ancak çok uç noktaların dışında normal dağılım eğrisi ve histogram grafiği arasında mükemmel bir uyumun var olduğunu görmekteyiz. Örneğin,

$P(X = 10) = b(10; 25,\ 0{,}6) = B(10; 25,\ 0{,}6) - B(9; 25,\ 0{,}6) = 0{,}021$ olurken aynı hesaplamayı normal dağılıma göre yaptığımızda $P(9{,}5 \leq X \leq 10{,}5) = P(-2{,}25 \leq Z \leq -1{,}84) = 0{,}0207$ olarak bulunur.

Teorem: Kabul edelimki X başarı olasılığı p olan bir binom rasgele değişkeni olsun. Eğer binom olasılıklık dağılımını gösteren histogram grafiği çok fazla sola yada sağa doğru yığılmamışsa, X rasgele değişkeni $\mu = np$ ortalamalı ve $\sigma = \sqrt{npq}$ standart sapmalı bir normal dağılıma sahiptir. Ayrıca X in $x = a$ olası değeri için,

$P(X \leq x) = B(x, n, p) \approx$ (standart normal dağılım eğrisinin altında ve $x + 0{,}5$ yüzdeliğinin solunda kalan alan)

$$= \Phi\left(\frac{x + 0{,}5 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

$np \geq 10$ ve $nq = n(1-p) \geq 10$ olduğunda binom dağılımı altında yeterince bir simetri oluşacağından yukarıdaki yakınsama anlamlı olacaktır. Buradaki iddiamız için direk bir ispat vermek pek bir zor olacaktır. Ancak ilerleyen kısımlarda göreceğimiz ve ispatlayacağımız Merkezi Limit Teoreminin bir sonucu olarak yukarıdaki teoremi ele alabiliriz. Bu yakınsama ile ilgili şunuda söylemekte fayda: olasılık hesaplamalarında eskiden olduğu kadar kıymetli bir sonuç değil artık çünkü bilgisayar yazılımları büyük n değerleri için binom olasılığını hesaplayabilmektedir.

Örnek: Büyük bir üniversitedeki öğrencilerin tamamının %25 i ekonomik yardım almaktadır. Rasgele seçilen 50 kişilik bir örneklemde yardım alan öğrencilerin sayısı X rasgele değişkeni olsun.

X binom olasılık dağılımına sahiptir. Neden? Peki bu binom olasılık dağılımını normal dağılıma yakınsatmak sağlıklı olur mu?

$$\boxed{p = \%25 = 0{,}25 \Longrightarrow \mu = np = 50(0{,}25) = 12{,}5 \geq 10 \text{ ve } nq = 50(0{,}75) = 37{,}5 \geq 10.}$$

Bu durumda binom dağılıma sahip X rasgele değişkeni $\mu = 12{,}5$ ortalamalı $\sigma = 3{,}06$ standart sapmalı bir normal dağılıma yakınsar diyebiliriz.

$$P(X \leq 10) = B(10; 50,\ 0{,}25) \approx \Phi(\frac{10 + 0{,}5 - 12{,}5}{3{,}06}) = \Phi(-0{,}65) = P(Z \leq -0{,}65) = 0{,}2578$$

$$P(5 \leq X \leq 15) =$$

ALIŞTIRMALAR

1. Standart normal dağılım tablosunu kullanarak aşağıdaki olasılıkları hesaplayınız.

a. $P(0 \leq Z \leq 2{,}17)$

b. $P(0 \leq Z \leq 1)$

c. $P(-2{,}50 \leq Z \leq 2{,}50)$

d. $P(|Z| \leq 2{,}50)$

e. $P(-1{,}50 \leq Z \leq 2{,}00)$

f. $P(-2{,}50 \leq Z \leq 0)$

g. $P(Z \leq 1{,}37)$

h. $P(-1{,}50 \leq Z \leq 2{,}0)$

i. $P(1{,}50 \leq Z)$

2. Standart normal dağılımda aşağıda belirtilen yüzdelikleri bulunuz.

a. 91. yüzdelik, b. 9. yüzdelik, c. 75. yüzdelik, d. 25. yüzdelik, e. 6. yüzdelik

3. Aşağıdaki α değerleri için z_α noktasını bulunuz.

a. $\alpha = 0{,}0055$ b. $\alpha = 0{,}09$ c. $\alpha = 0{,}663$

4. Kabul edelimki bir binayı ayakta tutan kolonlar üzerindeki kuvvet X rasgele değişkeni olsun öyleki X $15{,}0$ kips ortalamalı ve $1{,}25$ kips standart sapmalı normal dağılıma sahiptir. Aşağıdaki X e ait olasılıkları hesaplayınız:

a. $P(X \leq 15)$

b. $P(X < 15)$

c. $P(X \geq 10)$

d. $P(X > 10)$

e. $P(X \leq 17.5)$

f. $P(14 \leq X \leq 18)$

g. $P(|x - 15| \leq 3)$

5. Mopedler (motor kapasitesi $50cm^3$ altındaki küçük motorsikletler) Avrupada gerek kullanım kolaylığı ve gereksede düşük bütçeli olmaları sebebiyle oldukça popülerdirler. *“Procedure to Verify the Maximum Speed of Automatic Transmission Mopeds in Periodic Motor VehicleInspections” (J. of Automobile Engr., 2008: 1615–1623)* makalesinde bir tür güç testi (Rolling bench test, resimdiki gibi tekerin bir sistem üzerinde dönmesi ile yapılan bir test) tanımlanıyor. Bu testin sonuçlarından elde edilen veri ortalaması $46{,}8\ km/s$ ve standart sapması $1{,}75\ km/s$ olan bir normal dağılıma sahip olduğu ileri sürülüyor. Rasgele seçilen böylesi bir motorsiklet için,

a. Maksimum hızının en fazla $50\ km/s$ olma ihtimali nedir?

b. Maksimum hızının en az $48\ km/s$ olma ihtimali nedir?

c. Maksimum hızının ortalamadan en fazla $1{,}5$ standart sapma kadar sapma ihtimali nedir?

6. Bir yol yapımı aşamasında, asfalt karışımı asfalt döküm makinesine üretim tesisinden kamyonlar vasıtasıyla taşınır. *“Modeling of Simultaneously Continuous and Stochastic Construction Activities for Simulation” (J. of Construction Engr. and Mgmnt., 2013: 1037–1045)* makalesinde kamyonların taşıma süreleri X rasgele değişkeni olarak tanımlanıyor öyleki $X \sim N(\mu = 8{,}46,\ \sigma = 0{,}913)$ (değerler dakika cinsinden).

a. Taşıma süresinin en az 10 dakika olma ihtimali nedir? Bir kamyonun asfalt taşıma süresi 10 dk fazla olabilir mi?

b. Taşıma süresinin 15 dakikadan fazla olma ihtimali nedir?

c. Taşıma süresinin 8 ile 10 dakika arasında olma ihtimali nedir?

d. Hangi c değeri için bütün taşıma sürelerinin %98 i $[8{,}46 - c;\ \ 8{,}46 + c]$ aralığındadır?

e. Rasgele dört tane taşıma süresi seçildiğinde, en az bir tanesinin 10 dakikayı aşıyor olma ihtimali nedir?

7. Şişe mantarı kesen iki makineden birinin ürettiği mantarların çapları ortalamsı 3 cm ve standart sapması 0,1cm olan normal dağılıma sahiptir. Diğerinin ürettiği mantarların çapları ise 3,04 cm ortalamalı 0,02 cm standart sapmalı normal dağılıma sahiptir. Bir şişe mantarının kullanılabilir olması için çapının 2.9 cm ile 3.1 cm arasında olması yeterli olmaktadır. Hangi makine daha iyi üretim yapmaktadır?

8. Presli metal borulardaki aşınma hatasının hata uzunlukları ortalaması 30 mm ve standart sapması 7,8 mm olan bir normal dağılıma sahip olduğu aşağıdaki makalede ifade edilmektedir. *[“Reliability Evaluation of Corroding Pipelines Considering Multiple Failure Modes and TimeDependent Internal Pressure” (J. of Infrastructure Systems, 2011: 216–224)].*

a. Hata uzunluğunun en fazla 20 mm olma ihtimali nedir?

b. Hata uzunluğunun 20 mm den az olma olma ihtimali nedir?

c. Hata uzunluğunun 75.yüzdelik değeri nedir?

d. Hata uzunluğunun 15.yüzdeliği nedir?

e. Hangi değerler dağılımın ortasındaki %80 lik parçayı en küçük %10 cuk ve en büyük %10 cuk hata uzunluğundan ayırır?

9. Bir askeri kargo paraşütünün otomatik açma cihazı paraşüt yerden 200 m yukarıda iken açılacak şekilde dizayn edilmiştir. Paraşütün açılma yüksekliği ortalaması 200 m ve standart sapması 30 m olan normal dağılıma sahiptir. Eğer paraşüt 100 m den daha düşük bir yükseklikte açılırsa kargolar hasar görmektedir. Uçaktan bırakılan 5 paraşütten en az birinin taşıdığı kargoda zarar olma olasılığı nedir?

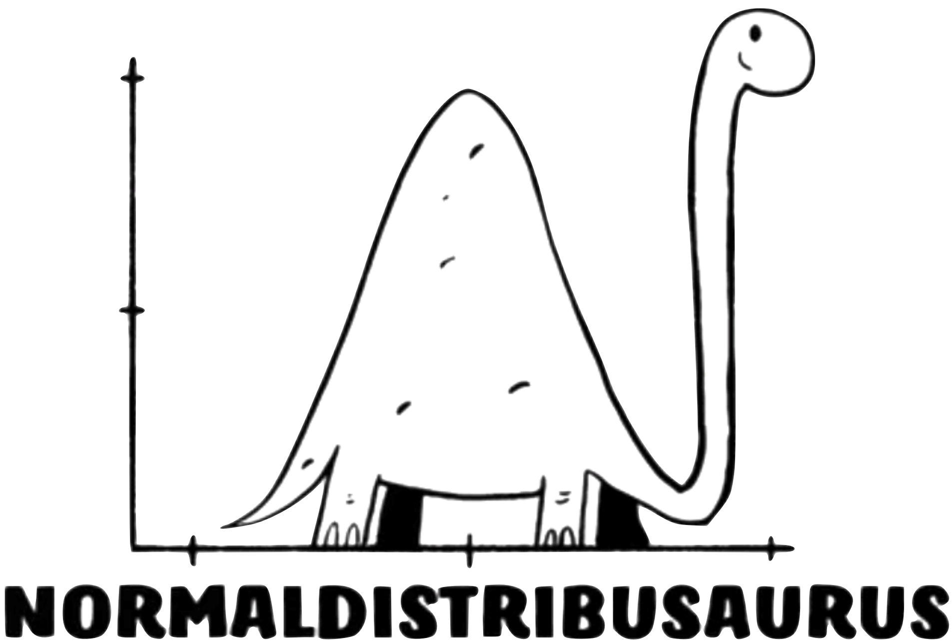
10. Çinde belirli bir köprüdeki araçların hızları normal dağılımla modellenmiştir.

a. Eğer araçların %5 i 39,12 km/s den az hızla ve %10 u 73,24 km/s fazla hızla gidiyorsa, bu normal dağılımın ortalamasını ve standart sapmasını bulunuz.

b. Rasgele seçilen bir aracın hızının 70 km/s den fazla olma ihtimali nedir?

c. Rasgele seçilen bir aracın hızının 50 ve 65 km/s arasında olma ihtimali nedir?

Buradaki sorular sadece küçük bir örneklem. Konuyu anlayana kadar çok daha fazlasını çözmeniz sizin için iyi olacaktır.



4.4 Üstel ve Gamma Dağılımları

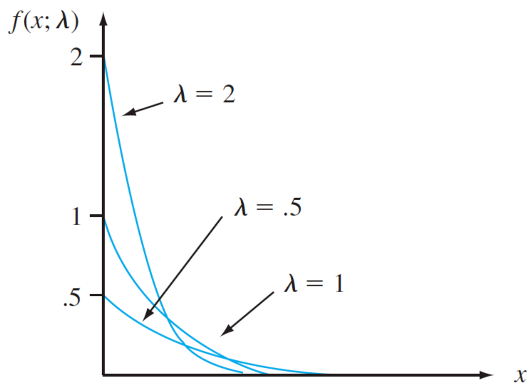
Bir normal dağılıma ait yoğunluk eğrisi çan formundadır ve ortalamaya göre simetriktir. Ama pek çok durumda ilgilendiğimiz değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonlarına ait eğriler sağa yada sola yığılmış olabilmektedir. Bu özelliği sergileyen dağılımlardan bir tanesi gamma dağılımıdır. İlk olarak bunun özel bir türü olan üstel dağılıma odaklanacağız.

Üstel Dağılımlar

Üstel dağılım ailesi mühendislik ve fen bilimlerinde çok geniş bir kullanım alanına sahiptir.

Tanım: X rasgele değişkeni $\lambda > 0$ parametreli üstel bir dağılıma sahiptir denir eğer X in olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki gibiyse

$$f(x;\lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; \quad dd. \end{cases}$$



Üstel yoğunluk grafikleri

Bu dağılımın beklenen değeri ve varyansı ise sırasıyla $\mu = \dfrac{1}{\lambda}$ ve $\sigma^2 = \dfrac{1}{\lambda^2}$ dir. Peki neden?

Üstel dağılım için olasılık yoğunluk fonksiyonu kullanılarak kolayca aşağıdaki kümülatif dağılım fonksiyonu elde edilebilir:

$$F(x;\lambda) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \end{cases}$$

Örnek: *"Probabilistic Fatigue Evaluation of Riveted Railway Bridges" (J. of Bridge Engr., 2008: 237–244)* makalesinde bir köprünün birleşim noktalarındaki gerilim aralığı ortalaması $6MPa$ olan üstel dağılımla modellenmiştir. Kabul edelimki bu doğru bir modellenme olsun. Bu durumda

$$E(X) = 1/\lambda = 6 \Rightarrow \lambda = 0{,}1667.$$

Gerilim aralığının en fazla $10MPa$ olma ihtimal nedir?

$$P(X \leq 10) = F(10;\ 0{,}1667) = 1 - e^{-(0{,}1667)(10)} = 1 - 0{,}189 = 0{,}811$$

Peki $P(5 \leq X \leq 10) = ?$

Üstel dağılım genellikle ardışık olayların arasında geçen geçen zamanın olasılık dağılımlarının modellenmesinde kullanılır. Örneğin, bir servisin müşteriler tarafından ziyaret edilmesi, bir santralla gelen aramalar. Bunun sebebi üstel dağılımın poisson dağılımı ile olan yakın ilişkisidir.

Üstel dağılımların bir başka önemli kullanım alanı ise bir parçanın yada maddenin ömür süresinin olasılık dağılımının modellenmesidir. Bu kullanım alanının popülerliği üstel dağılımların **zamansızlık özelliği dir (¨memoryless property¨).** Yani olasılık dağılımı geçmişinden bağımsızdır. Yani dilediğiniz herhangi bir anı $t = 0$ olarak kabul edebilirsiniz. Bu özelliğe sahip sadece iki tane dağılım vardır bunlardan bir diğeri ise geometrik dağılımdır.

Bu özelliği matematiksel olarak ifade etmek istersek eğer

Her $s, t \in \mathbb{R}$ için $P(X \geq s + t \,|\, X \geq t) = P(X \geq s)$.

Bu özelliği temsil eden akılda kalıcı en iyi örnek hilesi bir madeni paranın atılması deneyidir. Paranın önceki atışlarda neyle sonuçlandığının bir önemi yoktur. Her bir atışta yazı tura gelme ihtimali daime 1/2 dir.

Kabul edelimki bir parçanın ömür süresi λ parametreli üstel bir dağılıma sahip olsun. Bu parçanın kullanıma başlamasından sonra t_0 süresi geçiyor ve gelip kontrol ettiğimizde parça halen daha çalışıyor. Parçanın t saat daha bozulmadan çalışma ihtimali nedir? Matematiksel olarak istenen olasılığı yazacak olursak, $P(X \geq t + t_0 \,|\, X \geq t_0)$ olasılığını bilmek istiyoruz. Koşullu olasılık tanımından dolayı:

$$P(X \geq t + t_0 | X \geq t_0) = \frac{P[(X \geq t + t_0) \cap (X \geq t_0)]}{P(X \geq t_0)}$$

Paydaki $X \geq t_0$ olayı gereksidir çünkü her iki olayda ancak ve ancak $X \geq t + t_0$ ın gerçekleşmesiyle mümkün olur. Böylece

$$P(X \geq t + t_0 | X \geq t_0) = \frac{P(X \geq t + t_0)}{P(X \geq t_0)} = \frac{1 - F(t + t_0; \lambda)}{1 - F(t_0; \lambda)} = e^{-\lambda t}$$

olur ve $P(X \geq t + t_0 \,|\, X \geq t_0) = P(X \geq t)$ olduğunu elde ederiz.

Ekstra ömür süresinin olasılık dağılımı ömür süresinin orijinal olasılık dağılımının tamamiyle aynısıdır. Yani geriye kalan ömrün olasılık dağılımı yaştan bağımsızdır.

Gamma Fonksiyonu ve Gamma Dağılımı

Gamma dağılımlarına başlamadan önce matematiğin pek çok alanında önemli bir yere sahip olan gamma fonksiyonunu tanımlayalım.

$\alpha > 0$ olmak üzere, $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ fonksiyonuna **gamma fonksiyonu** denir. Bu fonksiyona ait bazı önemli özellikler aşağıdaki gibi listelenebilir:

1. Her $\alpha > 1$ için, $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$,
2. Her $n \in \mathbb{N}$ için, $\Gamma(n) = (n-1)!$
3. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

$$f(x, \alpha) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha-1} e^{-x}}{\Gamma(\alpha)} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; \quad dd \end{cases}$$

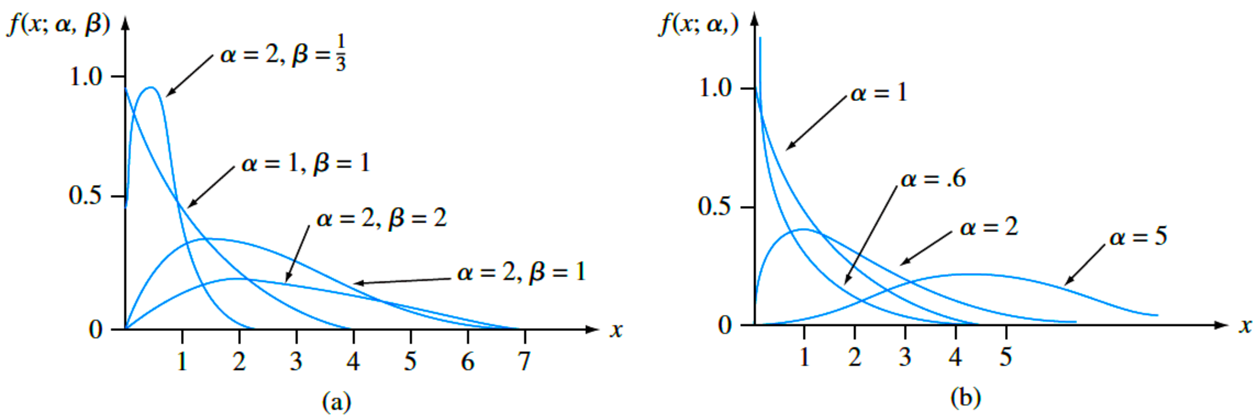
Yukarıda tanımlanan f fonksiyonu bir olasılık yoğunluk fonksiyonu mudur?

Tanım: Sürekli rasgele değişken X gamma dağılımına sahiptir denir eğer X için olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki fonksiyon olarak tanımlanıyorsa: $\alpha > 0$ ve $\beta > 0$ olmak üzere,

$$f(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} & ; x \geq 0 \\ 0 & ; \quad dd\,. \end{cases}$$

$\beta = 1$ olması durumunda X sürekli rasgele değişkeni standart gamma dağılımına sahiptir denir.

$\alpha = 1$ ve $\beta = 1/\lambda$ olması durumunda gamma dağılımı üstel dağılıma karşılık gelir.



(a) Gamma yoğunluk eğrisi; (b) standart gamma yoğunluk eğrisi

SGD için eğer $\alpha \leq 1$ olursa $f(x;\alpha)$ kesinlikle azalan bir fonksiyon olur. Eğer $\alpha > 1$ olursa $f(x;\alpha)$ orijinden bir mutlak maksimum noktasına doğru artan olurken sonrasında azalan özellik sergiler. β parametresi bir ölçek parametresi iken α ise yoğunluk eğrisinin şeklini aldığı değerlerle etkileyen şekil parametresidir. Yukarıdaki grafikleri incelediğinizde bu ilişkiyi rahatlıkla gözlemleyebilirsiniz.

$f(x;\alpha,\beta)$ gamma dağılımına sahip X rasgele değişkeni için ortalama ve varyans aşağıdaki gibidir:

$$E(X) = \mu = \alpha\beta$$

$$Var(X) = \sigma^2 = \alpha\beta^2$$

Eğer X standart gamma rasgele değişkeni ise (yani $\beta = 1$), X in kümülatif dağılım fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$F(x;\alpha) = \int_0^x \frac{y^{\alpha-1}e^{-y}}{\Gamma(\alpha)}\,dy \qquad x > 0$$

Bu fonksiyon literatürde **tam olmayan gamma (the incomplete gamma function)** fonksiyonu olarak adlandırılır. Hatta bazı kaynaklarda paydadaki $\Gamma(\alpha)$ yer almaz. Bu fonksiyonun aldığı degerlerden oluşan bir Gamma Tablosu vardır ve aşağıda ise küçük bir kısmı paylaşılmaktadır.

Table A.4 The Incomplete Gamma Function

$$F(x;\alpha) = \int_0^x \frac{1}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-y}\,dy$$

x \ α	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	.632	.264	.080	.019	.004	.001	.000	.000	.000	.000
2	.865	.594	.323	.143	.053	.017	.005	.001	.000	.000
3	.950	.801	.577	.353	.185	.084	.034	.012	.004	.001
4	.982	.908	.762	.567	.371	.215	.111	.051	.021	.008
5	.993	.960	.875	.735	.560	.384	.238	.133	.068	.032
6	.998	.983	.938	.849	.715	.554	.394	.256	.153	.084
7	.999	.993	.970	.918	.827	.699	.550	.401	.271	.170
8	1.000	.997	.986	.958	.900	.809	.687	.547	.407	.283
9		.999	.994	.979	.945	.884	.793	.676	.544	.413
10		1.000	.997	.990	.971	.933	.870	.780	.667	.542
11			.999	.995	.985	.962	.921	.857	.768	.659
12			1.000	.998	.992	.980	.954	.911	.845	.758
13				.999	.996	.989	.974	.946	.900	.834
14				1.000	.998	.994	.986	.968	.938	.891
15					.999	.997	.992	.982	.963	.930

Tam olmayan gamma fonksiyonu tablosu

Örnek: *"The Probability Distribution of Maintenance Cost of a System Affected by the Gamma Process of Degradation" (Reliability Engr. and System Safety, 2012: 65–76)* akademik çalışması göstermekteki yıpranma, sürtünme, korozyon gibi bozulmaları modellemek için gamma dağılımı oldukça sık kullanılmaktadır. Kabul edelimki X rasgele değişkeni belirtir tür bozulmanın (degradation) miktarını temsil ediyor olsun ve $\alpha = 2$ olmak üzere X standart gamma dağılımına sahip olsun. Öyleyse aşağıdaki olasılığı hesaplayınız.

$P(3 \leq X \leq 5)$

$P(X > 4)$

Teorem: Kabul edelimki X rasgele değişkeni (α, β) parametreli standart olmayan bir gamma dağılımına sahip olsun. Bu durumda her $x > 0$ için X in kümülatif dağılım fonksiyonu

$$P(X \leq x) = F(a; \alpha, \beta) = F(\frac{x}{\beta}; \alpha)$$

öyleki $F(\cdot\,; \alpha)$ tam olmayan gamma fonksiyonudur.

Örnek: 240 rads'lık gamma radyasyonuna maruz kalmış fareler arasından rasgele seçilen erkek bir farenin hayatta kalma süresi hafta cinsinden X rasgele değişkeni olarak tanımlansın. $\alpha = 8 \; ve \; \beta = 15$ olmak üzere X gamma dağılımına sahiptir. *(Bu veri Survival Distributions: Reliability Applications in the Biomedical Services, by A. J. Gross and V. Clark, makalesinde alınmış ve makaledeki gamma dağılımının değerleri tam olarak$\alpha \approx 8{,}5 \; ve \; \beta \approx 13.3$ olarak değerlendirilmiştir.)*

Ortalama yaşam süresi $E(X) = \alpha\beta = 8 \cdot 15 = 120$ haftadır

$Var(X) = \alpha\beta^2 = 8 \cdot 15^2 = 1800$ ve standart sapma $\sigma_X = \sqrt{1800} = 42{,}43$ hafta olur.

$P(60 \leq X \leq 120) =$

$P(X \geq 30) =$

Peki bu olasılıkları $X \sim N(120,\ 1800)$ olması durumu için inceleyelim. Acaba normal dağılımı gamma dağılımı yerine bu çalışmada kullanılabilir miydi?

ALIŞTIRMALAR

5. NOKTA VE GÜVEN ARALIĞI TAHMİNİ

5.1 Nokta Tahmini

İstatistiksel çıkarımlar bir yada birden fazla popülasyon karakteristiği için sonuçlar bulmayı gerektirebilir. Bunu yapabilmek için araştırmacı çalışmaya dahil edilen her popülasyondan bir örneklem data elde eder ve çalışmanın sonuçlarını bu örneklem üzerinden elde edilen çıkarımlar olur. Örneğin, μ yarı iletken plakalar üzerindeki kablo bağlantılarının kırılım dirençlerinin ortalaması olsun. Bu ortalamayı tahmin edebilmek için, rasgele n=10 tane kablo bağlantısı seçilir ve herbirinin kopma direnci ölçülür. Kabul edelimki bu ölçümler $x_1, \ \dots \ , x_n$ olsun. Bu örneklemin aritmetik ortalaması $\bar{x}$ ile popülasyon ortalaması μ hakkında bir tahminde bulunabiliriz. Aynı örneklem için S^2 varyansıylada popülasyon varyansı σ^2 hakkındada bir tahminde bulunabilir.

Tanım: Bir popülasyona ait θ parametresi için nokta tahmini berilen bir örneklem verisi üzerinden θ için hesaplanan makul bir değerdir.

Örnek: Bir otomobil üreticisi eskisine göre daha dayanıklı bir tampon geliştirmiştir. Firma bu yeni tamponu 25 tane kontrollü duvara çarpma testinde kullanmış ve pu testlerin herbirinde aynı model araç 20 km hızla duvara çarpmıştır. Bu deney için X rasgele değişkeni çarpma neticesinde hasara sahip olmayan araçların sayısı olsun. Burada çarpışma neticesinde zarar görmeyen araçların oranı p tahmin etmek istediğimiz parametre olsun. p için bir nokta tahmini gerçekleştirelim $\hat{p} = \dfrac{X}{n} \longrightarrow p \approx 15/25 = 0{,}6.$ Örneklemin nasıl seçildiği ve ne kadar büyük yada küçük olduğu bu tahmini değeri değiştirebilmektedir.

Örnek: Epoxy resin maddesinin yalıtkanlık eşik değeri için 20 tane gözlem yapılmış ve yalıtkanlığın son bulduğu voltaj değerleri aşağıdaki veriyi oluşturmaktadır.

24.46	25.61	26.25	26.42	26.66	27.15	27.31	27.54	27.74	27.94
27.98	28.04	28.28	28.49	28.50	28.87	29.11	29.13	29.50	30.88

Bu veriyi normal dağılım çizimi ile grafikleştirdiğimizde doğrusal bir grafik elde edilmektedir. Buda gösteriyorki verinin dağılımını modellemede normal dağılım kullanılabilir. Bu normal dağılımın ortalaması μ olsun. Normal dağılımlar μ ye göre simetrik bir dağılım olduğundan μ yü verinin medyanı mod degeri aritmetik ortalaması vs alabiliriz. Şimdi μ için alternatif bir kaçtan nokta tahmini yapalım.

Tahmin edici	Tahmin
Örneklem ortalaması $\bar{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$	$\mu \approx \bar{X} = 555{,}6/20 = 27{,}793$
Örneklem Medyanı $\tilde{X}$	$\mu \approx \tilde{X} = (27{,}94 + 27{,}98)/2 = 27{,}96$
$[min(x_i) + maks(x_i)]/2$	$\mu \approx (24{,}46 + 30{,}88)/2 = 27{,}67$
$\bar{X}_{tr(10)}$ %10 luk en küçük ve en büyük değerlerin dışlanmasıyla elde edilen ortalama	$\mu \approx \bar{X}_{tr(10)} = \dfrac{555{,}86 - (24{,}46 + 25{,}61 + 29{,}50 + 30{,}88)}{16} = 27{,}838$

Burada farklı merkezi ölçümlerle popülasyon ortalaması μ yü tahmin etmeye çalıştık. Hangi tahminin μ nün gerçek değerine daha yakın olduğunu ise sadece μ yü bimemiz halinde söyleyebiliriz. Ancak hangi tahmin edicinin daha optimal olduğunu söylemek mümkündür.

Ödev: Yukarıda örnekte popülasyon varyansı için nokta tahmininde bulununuz.

5.2 Güven Aralıklarının Temel Özellikleri

Nokta tahmini tek bir sayı olarak istatistiksel manada bir önem taşımaz çünkü örneklemler rasgele seçilmiş olabilir. Örneğin bir kayıt havlunun dayanıklılık deneyinde örneklem ortalaması $\bar{X} = 9322{,}7$ ise popülasyon ortalaması $\mu \approx \bar{X} = 9322{,}7$ olarak tahmin edilebilir. Ancak $\mu = \bar{X}$ eşitliğinin sağlanıyor olması imkansıza yakın bir ihtimaldir. Dolayısıyla tahmin edilecek parametre için bir tek değer yerine bu parametrenin hangi değer aralığında yüzde kaç ihtimalle bulunabileceğini söylemek çok daha zekice bir yaklaşım olur. Bu türden aralıklara söz konu parametrenin güven aralığı denir.

Güven aralıklarının temel konsepti ve özellikleri her ne kadar gerçekçi olmasada basit bir probleme odaklanarak anlatmak kolay olacaktır. Kabul edelimki ilgilendiğimiz parametre popülasyon ortalaması μ olsun ve

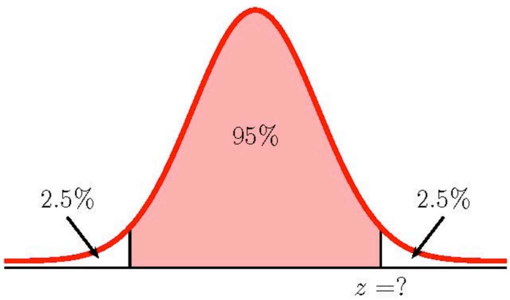
(a) Popülasyon normal dağılıma sahip,

(b) Popülasyon standart sapması σ biliniyor olsun.

Popülasyon dağılımının normal olması sıklıkla bir kabüldür ancak μ bilmiyorken σ nün biliniyor olması mantıksız bir kabüldür çünkü $\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$ dir.

Örnek: Ergonomi üzerine ihtisaslaşmış endüstri mühendisleri rahatlık ve yüksek üretkenliği başarmak için çalışma alanları ve bu alanlarda kullanılan ekipmanlar ile ilgili araştırma ve geliştirmeler yapmaktadırlar. "Studies on Ergonomically Designed Alphanumerical Keyboards, Human factors, 1985, 175-187" makalesinde önkol-bilek destekli klavyenin yüksekliği ile ilgili bir araştırma yer almaktadır. Bu araştırmada $n = 31$ tane klavye kullanıcı bir örneklem olarak seçilmiş ve örneklemdeki kişilerin yükseklik tercihlerinin ortalaması $\bar{X} = 80$ cm olarak bulunmuştur. Kabul edelimki tercih edilen klavye yükseklikleri normal dağılıma sahip olsun ve bu dağılımın standart sapması ise $\sigma = 2{,}0$ cm olarak hesaplanmış olsun. Bu durumda $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ olur. Popülasyon ortalaması μ için %95 lik güven aralığı aşağıdaki gibi hesaplanır.

Bir başka deyişle μ için öyle bir aralık yazınızki μ nün bu aralıkta olma ihtimali %95 olsun.

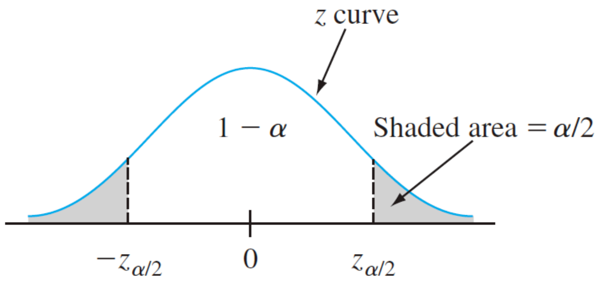


$P(,196 \leq Z = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq 1{,}96) = 0{,}95$ olur. Burada μ yalnız bırakılacak olursa

$$\iff P(\bar{X} - 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 0{,}95.$$

Bu durumda μ için %95 lik güven aralığı $(\bar{X} - 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \ \bar{X} + 1{,}96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = (79{,}3;\ \ 80{,}7)$ olarak bulunur.

Bu örnekte yapmış olduğumuz güven aralığı çalışmasını genelleyecek olursak:



Bir popülasyonun σ standart sapmasını bildiğimiz normal dağılımının popülasyon ortalaması μ için $\%\,100(1-\alpha)$ lık güven aralığı

$$(\bar{X} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \ \bar{X} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

olarak ifade edilir.

Böylesi bir güven aralığının uzunluğu $w = 2Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ dir. Eğer güven aralığının verilen bir uzunluğu için örneklem büyüklüğünü belirlemek gerekirse yukarıdaki eşitlikte n yi yalnız bırakmak yeterli olacaktır, yani $n = \left(2Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{w}\right)^2$.

Güven aralığının genel tanımı

Ele alınan popülasyona ait bir θ parametresi için $X_1, \ldots, X_n$ bir örneklem olsun. Kabul edelimki aşağıdaki iki özelliği sağlayan bir rasgele değişken var olsun:

(1) θ ve $X_1, \ldots, X_n$ bir fonksiyonu olsun,

(2) Olasılık dağılımı θ yada bir başka parametreye bağlı olmasın.

Bahsi geçen rasgele değişkeni $h(X_1, \ldots, X_n; \theta)$ fonksiyonu olarak tanımlayalım.

Örneğin, bu popülasyon σ (biliniyor) standart sapmalı ve $\theta = \mu$ ortalamalı bir normal dağılıma sahipse $h(X_1, \ldots, X_n; \theta) = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ olarak alınabilir ve bu rasgele değişken yukarıdaki iki özelliği sağlar. Her ne kadar burada h fonksiyonu μ ye bağlı olsada μ nün alacağı değerden bağımsız olan bir normal dağılıma sahiptir.

Herhangi bir $0 < \alpha < 1$ için $P(a \leq h(X_1, \ldots, X_n; \theta) \leq b) = 1 - \alpha$ olacak şekilde bir $a\ ve\ b$ alt-üst sınırlarını bulmak mümkündür. (2) numaralı özellikten dolayı bu $a\ ve\ b$ alt-üst sınırları θ ya bağlı değildir. Ayrıca $h(X_1, \ldots, X_n; \theta) \sim N(\bar{X}, \sigma/\sqrt{n})$ olduğu için $P(a \leq h(X_1, \ldots, X_n; \theta) \leq b) = 1 - \alpha$ eşitliği θ

yalnız bırakılacak şekilde manipüle edildiğinde $P(l(X_1,...,X_n) \le \theta \le u(X_1,...,X_n)) = 1-\alpha$ gibi bir olasılık bulunur. Burada $l(X_1,...,X_n)$ ve $u(X_1,...,X_n)$ değerleri θ nın $\%\,100(1-\alpha)$ lık güven aralığının alt ve üst sınır değerlerini tanımlar.

Dağılımın normal olduğu durumlarda $l(X_1,...,X_n) = \bar{X} - Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ve $u(X_1,...,X_n) = \bar{X} + Z_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ olduğunu görmüştük.

Örnek: Teorik bir modele göre, belirli bir voltaj degerine ulaşıldığında elektrotların arasındaki izolasyon sıvısının bozulma süresi λ parametreli üstel dağılıma sahiptir. $n = 10$ tane gözlemden oluşan rasgele bir örneklem aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$x_1 = 41.53, x_2 = 18.73, x_3 = 2.99, x_4 = 30.34,$$
$$x_5 = 12.33, x_6 = 117.52, x_7 = 73.02, x_8 = 223.63, x_9 = 4.00, \ x_{10} = 26.78.$$

λ ve ortalama bozulma süresi için %95 lik güven aralığını yazınız.

Kabul edelimki $h(X_1,...,X_n;\lambda) = 2\lambda \sum X_i$ olsun. Bu parametrenin χ^2 dağılımına sahip olduğunu ve özgünlük derecesinin $2n = 20$ olduğunu görebiliriz. İlgili tablo kullanıldığında $n = 10$ için

$P(9{,}591 < 2\lambda \sum X_i < 34{,}170) = 0{,}95 \iff P\left(9{,}591/2\sum X_i < 2\lambda < 34{,}170/2\sum X_i\right) = 0{,}95$

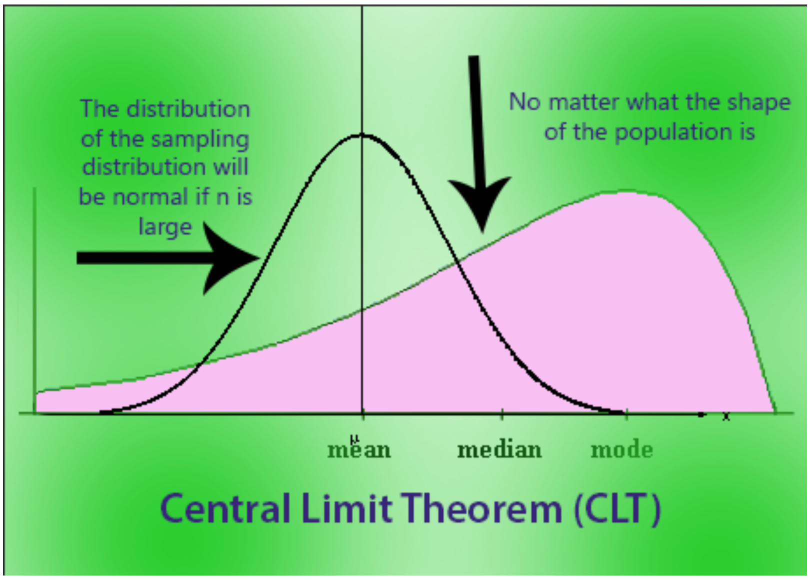
$\sum X_i = 550{,}87 \Rightarrow \lambda$ için %95 lik güven aralığı $(0{,}00871; 0{,}03101)$ olur.

Üstel dağılımın beklenen değeri $\mu = 1/\lambda$ için %95 lik güven aralığı ise

$P\left(\dfrac{\sum X_i}{34{,}170} < \mu = 1/\lambda < \dfrac{\sum X_i}{9{,}591}\right) = 0{,}95$ olur ve böylece (32,24; 114,87) olarak bulunur.

5.3 Büyük Örneklemler İçin Güven Aralığı

Ortalaması μ ve standart sapması σ olan bir popülasyondan $X_1, \ldots, X_n$ örneklemi rasgele seçilmiş olsun. n nin yeterince büyük olduğu durumlarda, merkezi limit teoremi popülasyon dağılımı ne olursa olsun, $\bar{X}$ in olasılık dağılımının normal olduğunu söyler.



Bu durumda $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma\sqrt{n}}$ rasgele değişkeni standart normal dağılıma sahiptir ve

$P(-Z_{\alpha/2} \leq Z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$ olur.

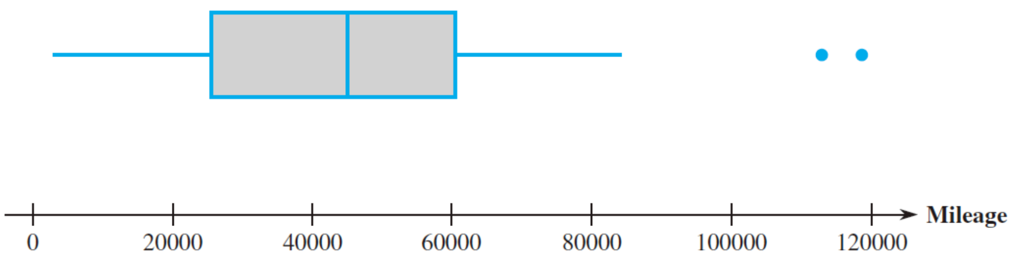
Theorem: Eğer n yeterince büyükse, $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma\sqrt{n}}$ değişkeni yaklaşık olarak normal dağılıma sahiptir. μ için $\%\,100(1-\alpha)$ lık güven aralığı $\left(\bar{X} - Z_{\alpha/2}\dfrac{s}{\sqrt{n}},\ \ \bar{X} + Z_{\alpha/2}\dfrac{s}{\sqrt{n}}\right)$ olur. Bu formül popülasyon dağılımının şeklinden bağımsızdır.

Not: Burda σ genellikle bilinemediğinden varsayımlardan kurtulmak için popülasyon standart sapması σ yerine örneklem standart sapması s kullanılmıştır.

Örnek: Her zaman bir Porsche araban olsun istemez miydin? Yazar belkide en ucuz model olan Boxster a gücünün yeteceğini düşünmüş ve www.cars.com websitesinde yaptığı arama neticesinde 1113 tane ilan listelenmiştir ve fiyatlar 3499$ dan 130000$ a kadardır. Bu araçlar içerisinden rasgele seçilen 50 gözlemden oluşan bir örneklemdeki araçların km leri aşağıdaki gibi listelenmiştir:

2948	2996	7197	8338	8500	8759	12710	12925
15767	20000	23247	24863	26000	26210	30552	30600
35700	36466	40316	40596	41021	41234	43000	44607
45000	45027	45442	46963	47978	49518	52000	53334
54208	56062	57000	57365	60020	60265	60803	62851
64404	72140	74594	79308	79500	80000	80000	84000
113000	118634						

Bu örnekleme ait kutu grafiği aşağıdaki gibidir.



Grafik örneklemdeki degerlerin simetrik bir şekilde dağıldığını söylemektedir. Örneklemi özetlemek gerekirse, $n = 50$, örneklem ortalaması $\bar{x} = 45679{,}4$ km, örneklem medyanı $\tilde{x} = 45013{,}5$ km ve örneklem standart sapması $s = 26641{,}675$ km dir. Buna göre popülasyon ortalaması μ için %95 lik güven aralığı

$$45{,}679.4 \pm (1.96)\left(\frac{26{,}641.675}{\sqrt{50}}\right) = 45{,}679.4 \pm 7384.7$$
$$= (38{,}294.7,\ 53{,}064.1)$$

olarak bulunur. Örneklem büyüklüğü bizim belirlediğimiz sınırda olsa dahi iyi bir tahminde bulunacak kadar büyük değildir. Bu sebeblede bulduğumuz güven aralığı oldukça geniş bir aralıktır.

Peki Örneklem yeterince büyük değilse?

T-DAĞILIMLARI

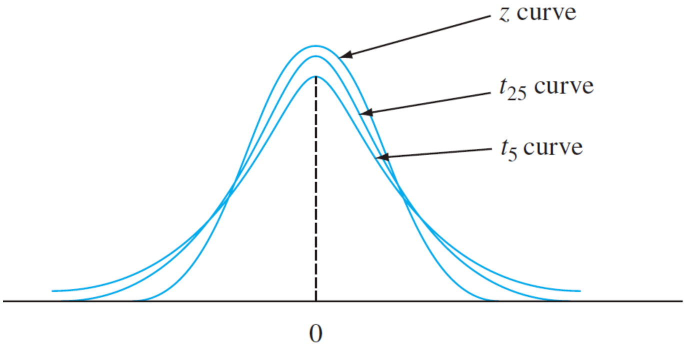
Teorem: $\bar{X}$, μ ortalamalı normal dağılıma sahip bir popülasyondan alınan n büyüklüğündeki bir örneklemin ortalaması olsun. $T = \dfrac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}}$ rasgele değişkeni $(n-1)$. dereceden t**-dağılımına** sahiptir.

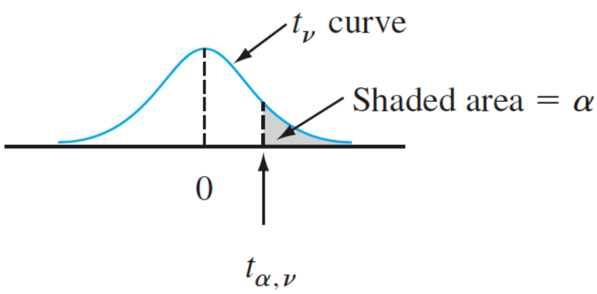
Burada $T = \dfrac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}}$ notasyonu standart normal dağılımda olmadığımızı vurgulamak için Z yerine kulanılmıştır ($n < 50$).

Normal dağılımlar μ ve σ parametrelerine bağlıyken t-dağılımları özgürlük derecesi olarak adlandıracağımız $v = n - 1$ parametresine bağlıdır..

T-dağılımlarının özellikleri

- t_v , v özgürlük dereceli t-dağılımını göstermek için kullanılır,
- Herbir t_v eğrisi çan eğrisi formundadır ve 0 ı merkez kabul eder,
- v küçüldükçe t_v eğrisi daha çok etrafa yayılır ve tepe noktası alçalır,
- $v \to \infty$ iken t-dağılımı standart normal dağılıma yakınsar.

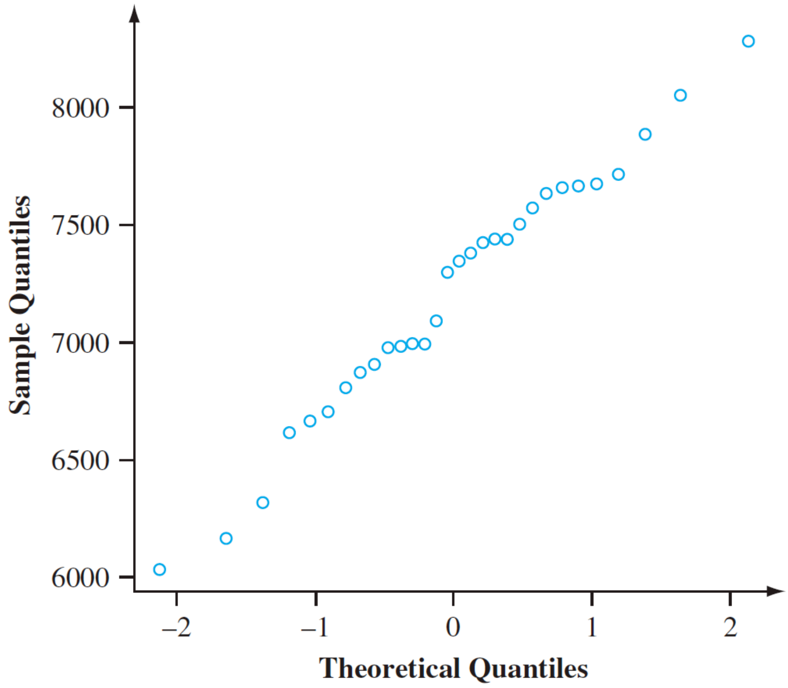




Teorem: μ ortalamalı normal dağılıma sahip bir popülasyondan rasgele seçilen n büyüklüğündeki bir örneklemin ortalaması $\bar{X}$ ve standart sapması s olsun. Popülasyon ortalaması μ için $\% 100(1-\alpha)$ lık güven aralığı $\left(\bar{X} - t_{\alpha/2,n-1}\dfrac{s}{\sqrt{n}},\ \ \bar{X} + t_{\alpha/2,n-1}\dfrac{s}{\sqrt{n}} \right)$ olur.

Örnek: Genellikle yapı işlerinde sığla agacı kerestesine olan talep azalsada sağlam ve katı kalaslara olan ihtiyaçlarda talepler karşılanamamaktadır. Bir akademik makaleye göre, bir tür lazer ile üretim ve ve test aşamalarında sığla ağacı kerestelerine puan verilmektedir. Aşağıda bununla ilgili bir veri verilmektedir.

6807.99	7637.06	6663.28	6165.03	6991.41	6992.23
6981.46	7569.75	7437.88	6872.39	7663.18	6032.28
6906.04	6617.17	6984.12	7093.71	7659.50	7378.61
7295.54	6702.76	7440.17	8053.26	8284.75	7347.95
7422.69	7886.87	6316.67	7713.65	7503.33	7674.99



Normal Dağılım Grafiği

Verilen bu 30 gözlemden oluşan örneklemin ortalaması $\bar{X} = 7203{,}191$ ve standart sapması $s = 543{,}54$.

Formuller: $\bar{X} = \dfrac{\sum X_i}{n}$ ve $s = \dfrac{(X_i - \bar{X})^2}{n}$

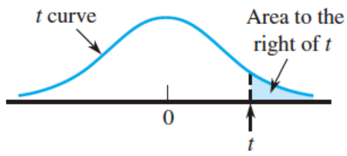
μ için %90 lık güven aralığını hesaplayınız.

Burada örneklem yeterince büyük olmadığı için $(n < 50)$ $v = n - 1 = 29$ özgürlük dereceli t-dağılımı kullanılacaktır.

$1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}05 \Rightarrow t_{\alpha/2,v} = t_{0{,}025;\ 29} = 2{,}045$

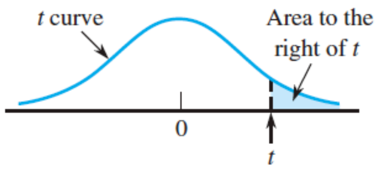
$$\left(\bar{X} - t_{\alpha/2,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}},\ \ \bar{X} + t_{\alpha/2,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}}\right) = \left(7203{,}191 - 2{,}045\frac{543{,}54}{\sqrt{30}}, 7203{,}191 + 2{,}045\frac{543{,}54}{\sqrt{30}}\right) = (7000{,}253;\ 7406{,}129)$$

Table A.8 *t* Curve Tail Areas



t \ ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
0.0	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500
0.1	.468	.465	.463	.463	.462.	.462	.462	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461
0.2	.437	.430	.427	.426	.425	.424	.424	.423	.423	.423	.423	.422	.422	.422	.422	.422	.422	.422
0.3	.407	.396	.392	.390	.388	.387	.386	.386	.386	.385	.385	.385	.384	.384	.384	.384	.384	.384
0.4	.379	.364	.358	.355	.353	.352	.351	.350	.349	.349	.348	.348	.348	.347	.347	.347	.347	.347
0.5	.352	.333	.326	.322	.319	.317	.316	.315	.315	.314	.313	.313	.313	.312	.312	.312	.312	.312
0.6	.328	.305	.295	.290	.287	.285	.284	.283	.282	.281	.280	.280	.279	.279	.279	.278	.278	.278
0.7	.306	.278	.267	.261	.258	.255	.253	.252	.251	.250	.249	.249	.248	.247	.247	.247	.247	.246
0.8	.285	.254	.241	.234	.230	.227	.225	.223	.222	.221	.220	.220	.219	.218	.218	.218	.217	.217
0.9	.267	.232	.217	.210	.205	.201	.199	.197	.196	.195	.194	.193	.192	.191	.191	.191	.190	.190
1.0	.250	.211	.196	.187	.182	.178	.175	.173	.172	.170	.169	.169	.168	.167	.167	.166	.166	.165
1.1	.235	.193	.176	.167	.162	.157	.154	.152	.150	.149	.147	.146	.146	.144	.144	.144	.143	.143
1.2	.221	.177	.158	.148	.142	.138	.135	.132	.130	.129	.128	.127	.126	.124	.124	.124	.123	.123
1.3	.209	.162	.142	.132	.125	.121	.117	.115	.113	.111	.110	.109	.108	.107	.107	.106	.105	.105
1.4	.197	.148	.128	.117	.110	.106	.102	.100	.098	.096	.095	.093	.092	.091	.091	.090	.090	.089
1.5	.187	.136	.115	.104	.097	.092	.089	.086	.084	.082	.081	.080	.079	.077	.077	.077	.076	.075
1.6	.178	.125	.104	.092	.085	.080	.077	.074	.072	.070	.069	.068	.067	.065	.065	.065	.064	.064
1.7	.169	.116	.094	.082	.075	.070	.065	.064	.062	.060	.059	.057	.056	.055	.055	.054	.054	.053
1.8	.161	.107	.085	.073	.066	.061	.057	.055	.053	.051	.050	.049	.048	.046	.046	.045	.045	.044
1.9	.154	.099	.077	.065	.058	.053	.050	.047	.045	.043	.042	.041	.040	.038	.038	.038	.037	.037
2.0	.148	.092	.070	.058	.051	.046	.043	.040	.038	.037	.035	.034	.033	.032	.032	.031	.031	.030
2.1	.141	.085	.063	.052	.045	.040	.037	.034	.033	.031	.030	.029	.028	.027	.027	.026	.025	.025
2.2	.136	.079	.058	.046	.040	.035	.032	.029	.028	.026	.025	.024	.023	.022	.022	.021	.021	.021
2.3	.131	.074	.052	.041	.035	.031	.027	.025	.023	.022	.021	.020	.019	.018	.018	.018	.017	.017
2.4	.126	.069	.048	.037	.031	.027	.024	.022	.020	.019	.018	.017	.016	.015	.015	.014	.014	.014
2.5	.121	.065	.044	.033	.027	.023	.020	.018	.017	.016	.015	.014	.013	.012	.012	.012	.011	.011
2.6	.117	.061	.040	.030	.024	.020	.018	.016	.014	.013	.012	.012	.011	.010	.010	.010	.009	.009
2.7	.113	.057	.037	.027	.021	.018	.015	.014	.012	.011	.010	.010	.009	.008	.008	.008	.008	.007
2.8	.109	.054	.034	.024	.019	.016	.013	.012	.010	.009	.009	.008	.008	.007	.007	.006	.006	.006
2.9	.106	.051	.031	.022	.017	.014	.011	.010	.009	.008	.007	.007	.006	.005	.005	.005	.005	.005
3.0	.102	.048	.029	.020	.015	.012	.010	.009	.007	.007	.006	.006	.005	.004	.004	.004	.004	.004
3.1	.099	.045	.027	.018	.013	.011	.009	.007	.006	.006	.005	.005	.004	.004	.004	.003	.003	.003
3.2	.096	.043	.025	.016	.012	.009	.008	.006	.005	.005	.004	.004	.003	.003	.003	.003	.003	.002
3.3	.094	.040	.023	.015	.011	.008	.007	.005	.005	.004	.004	.003	.003	.002	.002	.002	.002	.002
3.4	.091	.038	.021	.014	.010	.007	.006	.005	.004	.003	.003	.003	.002	.002	.002	.002	.002	.002
3.5	.089	.036	.020	.012	.009	.006	.005	.004	.003	.003	.002	.002	.002	.002	.002	.001	.001	.001
3.6	.086	.035	.018	.011	.008	.006	.004	.004	.003	.002	.002	.002	.002	.001	.001	.001	.001	.001
3.7	.084	.033	.017	.010	.007	.005	.004	.003	.002	.002	.002	.002	.001	.001	.001	.001	.001	.001
3.8	.082	.031	.016	.010	.006	.004	.003	.003	.002	.002	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001
3.9	.080	.030	.015	.009	.006	.004	.003	.002	.002	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001
4.0	.078	.029	.014	.008	.005	.004	.003	.002	.002	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.000	.000

(continued)



t \ ν	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	35	40	60	120	∞ ($= z$)
0.0	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500
0.1	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.461	.460	.460	.460	.460	.460
0.2	.422	.422	.422	.422	.422	.422	.422	.422	.421	.421	.421	.421	.421	.421	.421	.421	.421
0.3	.384	.384	.384	.383	.383	.383	.383	.383	.383	.383	.383	.383	.383	.383	.383	.382	.382
0.4	.347	.347	.347	.347	.346	.346	.346	.346	.346	.346	.346	.346	.346	.346	.345	.345	.345
0.5	.311	.311	.311	.311	.311	.311	.311	.311	.311	.310	.310	.310	.310	.310	.309	.309	.309
0.6	.278	.278	.278	.277	.277	.277	.277	.277	.277	.277	.277	.277	.276	.276	.275	.275	.274
0.7	.246	.246	.246	.246	.245	.245	.245	.245	.245	.245	.245	.245	.244	.244	.243	.243	.242
0.8	.217	.217	.216	.216	.216	.216	.216	.215	.215	.215	.215	.215	.215	.214	.213	.213	.212
0.9	.190	.189	.189	.189	.189	.189	.188	.188	.188	.188	.188	.188	.187	.187	.186	.185	.184
1.0	.165	.165	.164	.164	.164	.164	.163	.163	.163	.163	.163	.163	.162	.162	.161	.160	.159
1.1	.143	.142	.142	.142	.141	.141	.141	.141	.141	.140	.140	.140	.139	.139	.138	.137	.136
1.2	.122	.122	.122	.121	.121	.121	.121	.120	.120	.120	.120	.120	.119	.119	.117	.116	.115
1.3	.105	.104	.104	.104	.103	.103	.103	.103	.102	.102	.102	.102	.101	.101	.099	.098	.097
1.4	.089	.089	.088	.088	.087	.087	.087	.087	.086	.086	.086	.086	.085	.085	.083	.082	.081
1.5	.075	.075	.074	.074	.074	.073	.073	.073	.073	.072	.072	.072	.071	.071	.069	.068	.067
1.6	.063	.063	.062	.062	.062	.061	.061	.061	.061	.060	.060	.060	.059	.059	.057	.056	.055
1.7	.053	.052	.052	.052	.051	.051	.051	.051	.050	.050	.050	.050	.049	.048	.047	.046	.045
1.8	.044	.043	.043	.043	.042	.042	.042	.042	.042	.041	.041	.041	.040	.040	.038	.037	.036
1.9	.036	.036	.036	.035	.035	.035	.035	.034	.034	.034	.034	.034	.033	.032	.031	.030	.029
2.0	.030	.030	.029	.029	.029	.028	.028	.028	.028	.028	.027	.027	.027	.026	.025	.024	.023
2.1	.025	.024	.024	.024	.023	.023	.023	.023	.023	.022	.022	.022	.022	.021	.020	.019	.018
2.2	.020	.020	.020	.019	.019	.019	.019	.018	.018	.018	.018	.018	.017	.017	.016	.015	.014
2.3	.016	.016	.016	.016	.015	.015	.015	.015	.015	.015	.014	.014	.014	.013	.012	.012	.011
2.4	.013	.013	.013	.013	.012	.012	.012	.012	.012	.012	.012	.011	.011	.011	.010	.009	.008
2.5	.011	.011	.010	.010	.010	.010	.010	.010	.009	.009	.009	.009	.009	.008	.008	.007	.006
2.6	.009	.009	.008	.008	.008	.008	.008	.008	.007	.007	.007	.007	.007	.007	.006	.005	.005
2.7	.007	.007	.007	.007	.006	.006	.006	.006	.006	.006	.006	.006	.005	.005	.004	.004	.003
2.8	.006	.006	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.005	.004	.004	.004	.003	.003	.003
2.9	.005	.004	.004	.004	.004	.004	.004	.004	.004	.004	.004	.003	.003	.003	.003	.002	.002
3.0	.004	.004	.003	.003	.003	.003	.003	.003	.003	.003	.003	.003	.002	.002	.002	.002	.001
3.1	.003	.003	.003	.003	.003	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.001	.001	.001
3.2	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.002	.001	.001	.001	.001	.001
3.3	.002	.002	.002	.002	.002	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.000
3.4	.002	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.000	.000
3.5	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.000	.000	.000
3.6	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.000	.000	.000	.000	.000
3.7	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
3.8	.001	.001	.001	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
3.9	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000
4.0	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000

Örnek: Akademik bir makaleden alınan

25.2	21.3	22.8	17.0	29.8	21.0	25.5	16.0	20.9	19.5

örneklemi bir sosisteki yağ oranının yüzdesidir. Popülasyon ortalaması için %95 lik güven aralığını bulunuz.

- Uygulamaların pek çoğunda esas olan bir değişkenin tanımladığı ortalamayı yaklaşık olarak hesaplamaktan ziyade değişkenin alacağı değeri tahmin etmektir.

Teorem: Normal dağılıma sahip bir popülasyondan seçilen n büyüklüğündeki bir örneklemdeki tek bir deger için $\% \, 100(1-\alpha)$ güven aralığı $\left(\bar{X} - t_{\alpha/2,n-1} s \sqrt{1+\frac{1}{n}}, \;\; \bar{X} + t_{\alpha/2,n-1} s \sqrt{1+\frac{1}{n}} \right)$ dir.

Örnek: Yukarıdaki örnekte bir sosisin yağ oranının %95 lik güven aralığını bulunuz.

Bulduğunuz bu aralık karar vermenizde yardımcı olabilecek kalitede midir?

6. HİPOTEZ TESTLERİ

Popülasyona ait bir parametre bir örneklem seçilerek ya nokta tahmini yapılarak ya da olası değerlerin oluşturduğu bir aralık yazılarak tahmin edilebilir. Ancak çoğu zaman objektif bir araştırmada mesele parametreyi tahmin etmekten ziyade o parametreyle ilgili karşıt iki iddanın hangisinin doğru olduğunu test etmektir.

Popülasyon karakteristiği yada olasılık dağılımının karakteristiği hakkında tek bir parametrenin aldığı değer, bir den fazla parametrenin aldıkları değer ya da bütün bir olasılık dağılımının formu hakkında ortaya konulan iddalara **istatistiksel hipotez yada sadece hipotez** denir. Örneğin,

- Belirli bir tür pvc borularının içi çapının ortalamasının $\mu = 0{,}75$ olduğu iddiası,
- Belirli bir markaya ait devre kartlarından bozuk olanların bütün devrelere oranı $p < 0{,}1$ dir iddiası,
- Kabul edelimki μ_1 ve μ_2 iki farklı tür halatın kopma dirençlerinin ortalamasını gösteriyor olsun. $\mu_1 - \mu_2 = 0$ olduğu iddiası yada $\mu_1 - \mu_2 > 5$ olduğu iddiası,
- Belirli koşullar altında bir aracın firen mesafesinin normal dağılıma sahip olduğu iddiası

birer istatistiksel hipotezdirler.

Herhangi bir hipotez testi probleminde iki tezat hipotezi ele alıyor olacağız. Hipotezlerden bitanesi $\mu = 0{,}75$ iken diğer hipotez $\mu \neq 0{,}75$ olacak yada $p \geq 0{,}1$ ve $p < 0{,}1$ şeklinde iki tezat-zıt-birbiriyle çelişen ifadeler olacaktırlar. Buradaki odak noktamız örneklemin verdiği bilgileri kullanarak bu iki hipotezden hangisinin doğru olduğuna karar vermek olacaktır.

Örneğin adalet sisteminde yargılanan bir kişi içinde benzer bir durum mevcuttur. İki adet hipotez vardır, biri suçlanan kişinin masum olduğu yönünde diğeri ise diğeri ise kişinin suçlu olduğu yönündedir. Masumiyet karinesi gereği kişinin ilk etapta suçsuz olduğu kabul edilir ve bu hipotezle çelişecek bir delil ortaya konduğunda kişinin suçlu olduğu kabul edilir. Benzer şekilde istatistiksel hipotezlerinde test edilmesi probleminde hipotezlerden bir tanesi başlangıçta alternatif hipoteze göre favori kabul edilip yola çıkılır. Eğer örneklemin verdiği bilgiler favori iddiamızla çelişmezse hipotez doğrulanır, aksi halde alternatif hipotez doğrulanmış olur.

Tanım: **Sıfır hipotezi** başlangıç aşamasında doğru olduğunu düşündüğümüz hipotezdir (ön kabul) ve H_0 ile gösterilir. Bu hipotezle tezatlık oluşturan ikinci hipoteze ise **alternatif hipotez** denir ve H_a ile gösterilir.

Eğer örneklemin vereceği güçlü bir delil H_0 ın yanlış olduğunu söylüyor olursa, H_0 hipotezi H_a hipotezine karşılık reddedilir. Aksi halde H_0 ın uygun görüş olduğuna inanmaya devam ederiz. Bu durumda hipotez testlerinde sadece iki farklı sonuç ortaya konulur: H_0 reddetmek ve reddetmemek.

6.1 Testin Uygulanması ve P-değeri

Testin uygulanması örneklem verisine dayanarak H_0 ın uygun olup olmadığını söyleyen bir kuraldır. Buradaki anahtar mevzu aşağıdaki gibidir:

Örnek: D marka yoğurt üreten bir firma marketteki payını büyütmek istiyor ve özellikle C marka yoğurt tüketicilerini kendi markasında ikna etmek istiyor. Pazarlama birimi aşağıdaki gözü kapalı testi uygulamayı tavsiye ediyorlar: C marka yoğurt tüketen 100 kişiye iki kase yoğurdun tadına bakıp hangisini beğendiklerini sormak. Kaselerde bir tür barkod var ve bu sebeble testi uygulayan kişiler yoğurt markalarını biliyorken yoğurtları tadanlar markalardan bir haber oluyorlar.

Kabul edelim ki bütün C marka kullanıcılarının içerisinde C yi D ye tercih eden lerin oranı p olsun. $H_0 : p = 0{,}5$ vs $H_a : p < 0{,}5$. Burada alternatif hipotez C marka kullananların çoğu D markayı tercih ediyor olduğunu iddia ediyor. Tabikide D şirketi H_0 ın reddedilip H_a nün doğrulanmasını istiyor olsa gerek. Eğer sıfır hipotezi doğru olursa, rasgele seçilen bir C yoğurt tüketicisinin C yada D marka yoğurt tercihi yazı tura atmaya kalıyor.

Örneklem verisi 100 adet tercihten oluşan bir tür C ve D dizisi olacaktır. Kabul edelimki X rasgele değişkeni bu 100 kişi içerisinden C yi D ye karşı tercih eden kişilerin sayısı olsun. Bu rasgele değişken bizim test istatistiğimiz olacak. X 100 tekrardan oluşan binom olasılık dağılımına sahiptir ve başarı olasılığı p dir.

Eğer H_0 hipotezi kabul görecek olursa, başarı olasılığı $p = 1/2$ olur ve beklenen değer $E(X) = np = 100(0{,}5) = 50$ olur. Bu durumda X in büyük oranda 50 den daha küçük bir değeri H_0 sıfır hipotezini H_a hipotezine karşılık reddetmeyi tartışıyordur diyebiliriz. Kabul edelimki X in bu değeri 37 olsun. Peki bu değer H_0 hipotezini reddetmek için ne kadar yeterlidir yada ne kadar H_0 ile çelişir? Bu soruyu cevaplaya bilmek için X in H_0 hipoteziyle daha çok çelişki oluşturan değerlerini belirleyelim. 35 bunlardan biri 30 ise bir başkasıdır.

$$P(X \leq 37\ H_0\ dogru\ iken) = P(X \leq 37, X \sim Bin(100,\ 0{,}5)\ iken) = B(37; 100,\ 0{,}5) = 0{,}006$$

Buna göre, eğer sıfır hipotezi doğru ise, %1 den daha düşük bir ihtimalle 100 denemeden 37 yada daha azının başarılı olduğu söylenir. Bu durumda $X = 37$ değeri alternatif hipotezle sıfır hipotezine göre daha çok uyumludur. H_0 ın kabül görmesi durumunda $\sigma_X = \sqrt{npq} = \sqrt{100(0{,}5)(0{,}5)} = 5$ olur. H_0 ın doğru olması beklentisinden $X = 37$ değeri 2,5 standart sapmadan daha küçüktür.

Şimdide bu deneyde 100 kişiden 45 kişinin C yi tercih ettiğini (45 başarının var olduğunu) kabul edelim. H_0 ın doğru olduğunu kabul ederek H_0 ile çelişki oluşturacak bir test istatistiği olasılığı hesaplayalım:

$P(X \leq 45\ H_0\ dogru\ iken) = P(X \leq 45, X \sim Bin(100,\ 0{,}5)\ iken) = B(45; 100,\ 0{,}5) = 0{,}184$ olur.

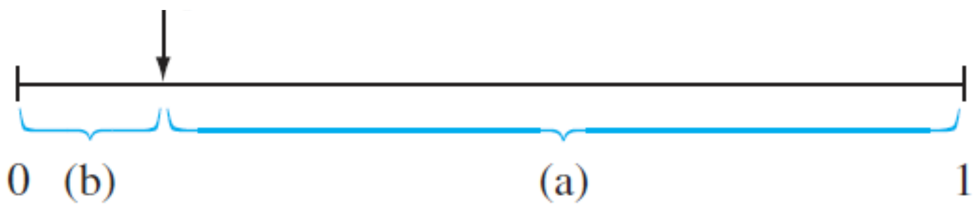
$p = 0{,}5$ iken 45 yada daha az başarının elde edildiğini görmek şaşırtıcı olmayacaktır. Bu durumda 45 degeri H_0 ile çok fazla çelişiyor olduğunu söyleyemeyiz (H_0 ın doğru olması beklentisinden sadece bir standart sapma küçük). Bu sebeblede H_0 ı reddetmek çok mantıklı değil.

Tanım: Bir **test istatistiği** H_0 hipotezinin reddedilip edilemeyeceğini belirlerken kullanılan örneklemin bir fonksiyonudur. Kullanılan örneklem H_0 ve H_a hipotezlerini net bir şekilde ayırt edebilmelidir. Yani H_0 ın doğru yada doğru olmadığı durumlarda aldığı değerler birbirine yakın olmamalıdır.

H_0 ın doğru olduğu kabulüyle elde edilen bir örneklem verisi üzerinde yapılan bir hesaplamayla H_0 ı reddetmek için yeterli olan test istatistiğinin elde edilme ihtimaline p-değeri denir. Bir hipotez testi analizinde **önem seviyesi** olarak isimledireceğimiz bir α değerinin belirlenmesiyle sonuca ulaşılır:

- H_0 hipotezi H_a için reddedilir eğer p-degeri $\leq \alpha$ ise,
- H_0 hipotezi H_a için reddedilmez eğer p-degeri $> \alpha$ ise.
- Genelikle $\alpha = 0{,}05;\ 0{,}01;\ 0{,}001$ gibi degerler alır.

P-değeri= H_0 ın rededileceği en küçük seviyedir.



Eğer α (a) da ise H_0 reddedilir, Eğer α (b) da ise H_0 kabul görür

P-degerinin ne olduğunu sözcüklere dökmek zorlayıcı olsada kullanması o kadarda zor degildir.

- P-degeri bir olasılıktır,
- H_0 ın doğru olduğu kabul edilerek hesaplanır,
- P-degerini bulmak için test istatistiğinin hangi değerinin H_0 a en az örneklemimizdeki kadar karşıt olacağını saptarız,
- P-degeri küçüldükçe H_0 karşı elde edilecek delilde bir kadar güçlü olur.
- P-degeri H_0 ın doğru yada yanlış olduğunu söyleyen bir olasılık değildir.

Örnek: Atık pillerde dahil olmak üzere pek çok etkence yağış suları kirlenmektedir. Bu piller kırıldığında, çevrecesel faktörlerce önemli olan metalleri doğaya salmaktadır. 'Urban Battery Litter' isimli bir makalede Cleveland civarında toplanan çeşitli atık pillerden bir özet veri sunulmaktadır. 51 tane Panasonic AAA pilinden oluşan rasgele bir örneklemde çinko kütle ortalaması 2.06 gram ve standart sapması 0.141 gramdır. Bu veri popülasyon ortalamasının μ 2 gramdan fazla olduğuna dair ikna edici bir delil üretir mi?

Bir sonuca varmak için önem seviyesini $\alpha = 0{,}01$ olarak ela alalım.

Hipotezlerimizi $H_0: \ \mu = 2{,}0 \ vs \ H_a: \mu > 2{,}0$ olarak tanımlayalım.

Örneklem makul bir büyüklüğe sahip olduğundan merkezi limit teoremi gereği örneklem ortalaması normal dağılıma sahiptir diyebiliriz. Dahası, standartlaştırılmış değişken $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu}{s/\sqrt{n}}$ yaklaşık olarak standart normal dağılıma sahiptir. H_0 sıfır hipotezinin doğru olduğu kabul ederek aşağıdaki test istatistiğini elde ederiz:

$$Z = \frac{\bar{X} - 2{,}0}{s/\sqrt{n}} \Rightarrow z = \frac{2{,}06 - 2{,}0}{0{,}141/\sqrt{51}} \approx 3{,}04$$

Örneklem ortalaması H_0 hipotezinin doğru olması beklentisinden kabaca 3 standart sapma daha büyüktür (nadiren iki standart sapma ötelenir). Bu durumda $\bar{X}$ ın 2.06 dan daha büyük bir değeri H_0 ile daha net bir çelişki oluşturur. Yani $z \geq 3.04$ için H_0 ile çelişki oluşur. Bu durumda

$$P - degeri = P(Z \geq 3{,}04) = 1 - \Phi(3{,}04) = 1 - 0{,}9988 = 0{,}0012 < 0{,}01 = \alpha$$

Bu sebeblede sıfır hipotezi reddedilir ve çinko ortalamasının 2 gramın üzerinde olması beklenir.

Hipotez testindeki hatalar:

Önem seviyesi α nın seçimindeki temel prensip, hipotezlerle ilgili bir karara varırken ortaya çıkan hataların göz önüne alınmasıdır. Adli yargılama örneğini tekrar ele alalım. Sıfır hipotezimiz bir suçu işlediği öne sürülen kişinin masum olduğu iddiası idi. Mahkeme karar verirken iki tür hatanın oluşabileceğini göz önüne alması gerekir: biri suçsuz bir kişi mahkum etmek diğeri ise suçlu bir kişi serbest bırakmaktır. Bu hataları genel olarak aşağıdaki gibi kategorize edebiliriz:

Birinci tip hata: H_0 doğruyken reddedilmesi

İkinci tip hata: H_0 yanlış iken kabul edilmesi.

Örnek: Bir kahvaltılık gevrek üreticisi belirli bir ürününün miktarı belirtilen porsiyon başına tüketildiğinde 100 kalori sağladığını iddia etmektedir. Ancak bu değer miktar değişmesede porsiyondan porsiyona değişebilmektedir. Dolayısıyla 100 kalorilik deger sadece bir ortalamadır. Bu kahvaltılık gerekten belirtilen miktarda tüketen kişiler 100 kaloriden fazla kalori alıp almadıklarından emin olmak istiyor olabilirler. Bu durumda hipotezlerimiz $H_0: \mu = 100 \ vs \ H_a: \mu > 100$ olarak bulalım. Alternatif hipotez iddia edilenden daha fazla kalorinin tüketiciler tarafından alındığını söylemektedir. Burada birinci tip hata gerçektende 100 kalori alınırken sıfır hipotezini reddetmektir. İkici tip hata ise 100 den fazla kalori alınıyorken firmanın iddiasını kabul etmektir.

Örnek: Bir otomobile modeli 10 km hızla yaptığı çarpışmaların %25 inde gözle görülebilir bir hasarın oluşmadığına dair bir kanıyla bilinmektedir. Modifiye edilmiş bir tampon ile bu oranın yükseltilebileceği iddia edilmektedir. Bu yeni tampona sahip araçların 10 km hızla yapmış oldukları yapmış oldukları kazaların tamamında gözle görülemeyen boyutlarda hasarla sonuçlanan çarpışmaların oranı p olsun. Burada kuracağımız hipotezler $H_0 : P = 0{,}25$ vs $H_a : p > 0{,}25$ olsun. Bu kontrollü çarpışma testi $n = 20$ aracın katıldığı bir test ve X ise görünür hasarın oluşmadığı çarpışmaların sayısı olsun. Eğer H_0 doğru kabul edilirse, $E(X) = np = 20(0{,}25) = 5$ olur. Sezgisel olarak, bu değerden daha büyük x değerleri H_0 hipotezine karşı H_a hipotezini destekler. Bu Hipotez testinde önem seviyesi olarak $\alpha = 0{,}1$ olarak alınsın.

$X \sim B(n = 20, p = 0{,}25)$

$P - degeri = P(X \geq x) = 1 - B(x-1; n = 20, p = 0{,}25)$ olur. Binom tablosunu kullanacak olursak,

$P(x \geq 7) = 1 - B(6; 20,\ 0{,}25) = 1 - 0{,}786 = 0{,}214$

$P(X \geq 8) = 1 - 0{,}898 = 0{,}102 \approx 0{,}1$

$P(X \geq 9) = 1 - 0{,}959 = 0{,}041$

Yukarıdaki test istatistiklerine göre, H_0 ı $P - degeri \leq 0{,}1$ iken reddetmek H_0 ı $X \geq 8$ iken reddetmeye denktir. Bu durumda

P(1. Tip Hata)=P(H_0 ı doğruyken reddetmek)=0,102~0,1 olur.

Yani 1.tip bir hatanın gerçekleşme ihtimali önem derecesi α ya karşılık gelmektedir. Bu durumda eğer sıfır hipotezi doğru ve test tekrar tekrar yapılmaya devam edilirse bu denemelerin %10 da sıfır hipotezi alternatif e karşı hatalı bir şekilde reddedilir.

Sadece bir tek 1.tip hata olasılığı vardır çünkü H_0 ın doğru olması için parametrenin alacağı sadece bir tek değer vardır. Bu sebeble sıfır hipotezinde eşitlik kullanılmaktadır.

Kabul edelimki β 2.tip bir hata yapma olasılığı olsun. Maalesef bu sefer β için sadece tek bir değer vardır diyemeyiz çünkü H_0 ın yanlış olması için birden fazla yol vardır; örneğin $p = 0{,}37,\ p = 0{,}3,\ p = 0{,}5$ gibi. Bu durumda p nin 0,25 den büyük herbir değeri için β nında farklı farklı değerleri vardır diyebiliriz.

Yukarıdaki yapmış olduğumuz hesaplamalarıda dikkate aldığımızda 0,1 önem seviyesinde H_0 ın reddedilmesi için gerek ve yeter koşul $X \geq 8$ olmasıdır. Böylece H_0 reddedilemez ancak ve ancak $X \leq 7$.

$\beta(0{,}3) = P(p = 0{,}3 iken 2.tip\ hata) = P(p = 0{,}3\ iken H_0\ in\ rededilmemesi) = B(7; 20,\ 0{,}3) = 0{,}772$

Yani p 0,25 yerine 0,3 olduğunda kabaca yapılan deneylerin %77 de H_0 hipotezi hatalı bir şekilde reddedilmez diyebiliriz.

p	.3	.4	.5	.6	.7	.8
$\beta(p)$	.772	.416	.132	.021	.001	.000

2.tip bir hatanın gerçekleşmesi olasılığı p nin 0,3 ve 0,4 değerleri için oldukça yüksektir çünkü bu değerler H_0 hipotezindeki degere oldukça yakındır ve örneklem büyüklüğü net bir ayrım oluşturamayacak kadar küçüktür.

6.2 Popülasyon ortalamasına dair hipotezler için z testleri

Bir önceki bölümde yaptıklarımızı toparlayacak olursak aşağıdaki prosedürü elde ederiz:

1. Uygun bir test istatistiği hesaplanır,
2. P-değeri belirlenir (bir olasılıktır, H_0 ın doğru olduğu kabulü ile hesaplanır)
3. H_0 hipotezi reddedilir eğer $p-degeri \leq \alpha$ ise. Burada α önem seviyesi daha önceden verilmiştir yada seçilmiştir.

Normal Popülasyon Dağılımı (σ biliniyor, μ bilinmiyor)

P-degerinin belirlenmesi H_0 ın doğru olduğu kabül edilmesi halinde test istatistiğinin dağılımına bağlıdır. Bu bölümde ise, popülasyon ortalaması μ için ortaya konulan hipotezleri test etme aşamasında kullanmak üzere z testlerine odaklanacağız ki z test ile kast edilen, H_0 doğru kabul edildiğinde test istatistiğinin en azından yaklaşık olarak normal dağılıma sahip olmasıdır. Bu durum dahilinde p-degeri bir z-egrisi altında kalan bölgenin alanı olacak ve bu alan H_a ki eşitsizliğin $>$, $<$, $yada$ $\neq$ olmasına bağlıdır.

Bu üç durumdada sıfır hipotezi H_0 μ nün belirli bir değere sahip olduğu söyler ve bu değeri μ_0 ile göstereceğiz ve sıfır değeri olarak adlandıracağız. Yani $H_0 : \mu = \mu_0$ formundadır. $X_1, \ldots, X_n$ normal dağılıma sahip bir popülasyondan alınmış n büyüklüğünde bir örneklem olsun. Bu durumda örneklem ortalamsı $\bar{X}$ de bir normal dağılıma sahiptir ve beklenen değeri $\mu_{\bar{X}} = \mu$ ve standart sapması $\sigma_{\bar{X}} = \sigma/\sqrt{n}$.
H_0 ın doğru olması halinde $\mu_{\bar{X}} = \mu_0$ olur. O halde $\bar{X}$ ın standartlaştırılmasıyla H_0 ın doğru olduğu kabulü altında elde edilen Z istatistiği aşağıdaki gibidir:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}.$$

$\bar{x}$ ve μ_0 arasındaki mesafenin standart sapma cinsinden ifade edilmesiyle z test istatistik değeri bulunur. Örneğin, $H_0 : \mu = 100$, $\sigma_{\bar{X}} = \sigma/\sqrt{n} = 10/\sqrt{25} = 2$ ve $\bar{x} = 103$ ise test istatistiği değeri $z = (103 - 100)/2{,}0 = 1{,}5$. Yani gözlemlenen $\bar{x}$ değeri H_0 hipotezi doğruyken olması gerekenden $\bar{X}$ ın standart sapması cinsinden 1.5 standart sapma daha büyüktür. Z istatistiği H_0 doğruyken $\bar{X}$, μ nün tahmin edicisi ve beklenen degeri arasındaki mesafe için doğal bir ölçümdür. Eğer bu mesafe H_a nın yönünde çok büyük olursa, H_0 ın yanlış olduğuna dair yeterli bir delil oluşturur.

Bir parametreye dair hipotezleri test ederken aşağıdaki adımların takip edilmesi tavsiye edilir…

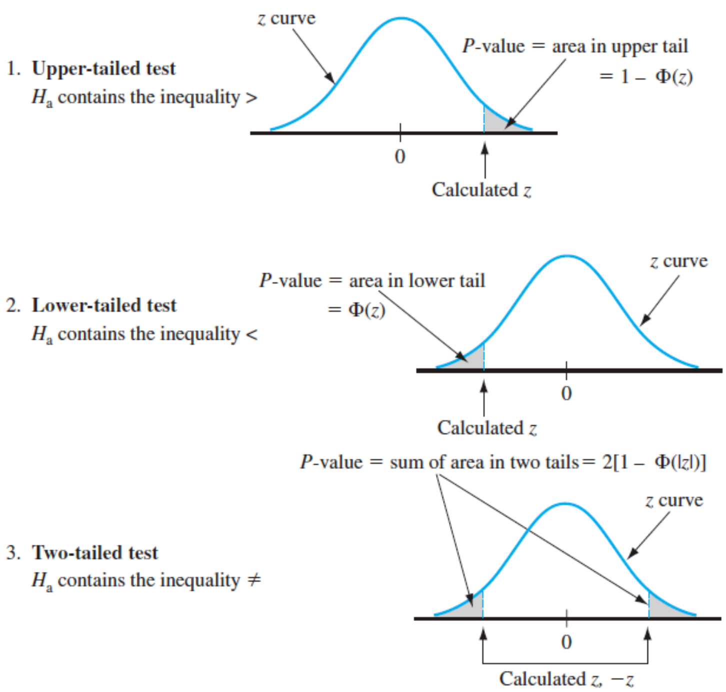
1. Söz konusu parametreyi belirleyin ve problemdeki hikayeye göre tasvir edin,
2. Sıfır degerini ve sıfır hipotezini belirleyin,
3. Uygun bir alternatif hipotez bulun,
4. Test istatistiğini formülüze edin,
5. Gerekli olduğuna inandığınız örneklem değerlerini hesaplayınız ve test istatistiği formülüne koyunuz ve test istatistik değerini bulunuz,
6. P-değerini bulunuz,
7. Kıyaslamaları yaparak H_0 ı reddetmek yada etmemek üzere karar veririz.

Soru: z-testi ne zaman kullanılabilir?

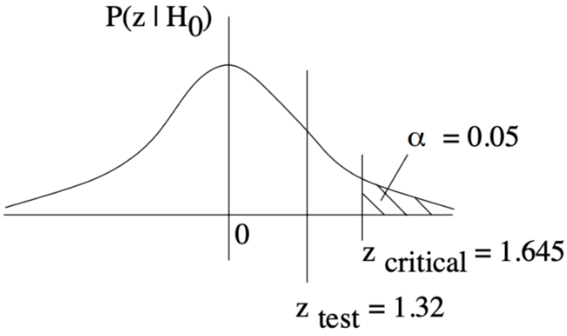
1. Popülasyon standart sapması biliniyorken, ya da
2. Örneklem büyüklüğü $n \geq 30$ iken (bu durumda test istatistiğinde $\sigma = s$ olarak kullanılırı).

Kabul: Normal popülasyon dağılımı ve standart sapma σ biliniyor yada örneklem yeterince büyük			
	Sıfır Hipotezi $H_0 : \mu = \mu_0$		**Test İstatistiği** $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$
	Alternatif Hipotez		P-değerinin belirlenmesi
1	$H_a : \mu > \mu_0$	(Sağ-kuyruklu test)	z nin sağında kalan alan
2	$H_a : \mu < \mu_0$	(Sol-kuyruklu test)	z nin solunda kalan alan
3	$H_a : \mu \neq \mu_0$	(Çift-kuyruklu test)	$\lvert z \rvert$ nin sağında kalan alanın iki katı

P—değerini farklı durumlarda nasıl hesaplayacağımızı aşağıdaki grafiklerde görmekteyiz.



Şimdi bol bol örnek çözelim.



Örnek 1: Bir araştırmacının iddiasına göre amerikadaki profesörlerin yıllık ortalama maaşı 42000$ dır. 30 profesörden oluşan bir örneklemde ortalama maaş 43260$ dır. $\alpha = 0{,}05$ önem seviyesine göre profesörlerin maaşlarının ortalamasının 42000$ dan fazla olduğu iddiasını test ediniz. ($\sigma = 5230\$$).

1. Hipotezler:

$H_0: \ \mu = 42000$

$H_a: \ \mu > 42000$ (test edilecek iddia) ==> sağ-kuyruklu test

2. z_{kritik}: bu öyle bir z değeridir ki $\Phi(z) = 1 - \alpha = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$. Öyleyse Z-tablosuna bakacak olursak $z = 1.65$ olarak bulunur.

3. Test istatistiği

$$z_{test} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{43260 - 42000}{5230/\sqrt{30}} = 1.32$$

4. $P-$**değeri**

P(Z>1.32)= $1 - \Phi(1{,}32) = 1 - 0{,}8888 = 0{,}1112 \nleq \alpha$

5. Sonuç

Dolayısıyla alternatif hipotezi destekleyip sıfır hipotezini reddecek kadar güçlü bir delil olmadığı için H_0 ı doğru kabul ederiz.

Örnek 2: Kabul edelimki kedilerin belirli bir tür davranışları standart sapması 6 olan bir normal dağılıma sahip olsun. Yarın popülasyondan rasgele 49 kedi seçilsin ve ortalaması 46,44 ve standart sapması 5,6968 olsun. Önem seviyesi $\alpha = 0{,}01$ olacak şekilde popülasyon ortalamasının 47 küçük olduğu iddiasını test ediniz.

1. Hipotezler:

$H_0: \ \mu = 47$

$H_a: \ \mu < 47$ (test edilecek iddia) ==> sol-kuyruklu test

2. z_{kritik}: bu öyle bir z değeridir ki $\Phi(z) = \alpha = 0{,}01$. Öyleyse Z-tablosuna bakacak olursak $z = -2{,}33$ olarak bulunur.

3. Test istatistiği (H_0 doğru kabul edilir)

$$z_{test} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{46{,}44 - 47}{6/\sqrt{49}} = -0{,}65$$

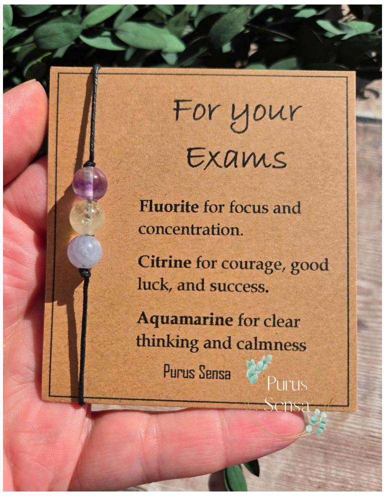
4. $P-$**değeri**

$P(Z < -0{,}65) = 0{,}2578 \nleq \alpha = 0{,}01$ olur.

5. Sonuç

Dolayısıyla alternatif hipotezi destekleyip sıfır hipotezini reddecek kadar güçlü bir delil olmadığı için H_0 ı doğru kabul ederiz.

Örnek 3: Sınav takıları popülasyonu standart sapması 5 olan bir normal dağılıma sahiptir. Çarşıya dolaşmaya çıktığınızda 9 adet takı seçiyorsunuz öyleki ortalaması 28,95 ve standart sapması 6,3802 oluyor. Önem seviyesi $\alpha = 0{,}01$ olmak üzere ortalamanın 27 den farklı olduğu iddiasını test ediniz.



1. Hipotezler:

$H_0: \ \mu = 27$

$H_a: \ \mu \neq 27$ (test edilecek iddia) ==> iki-kuyruklu test

2. z_{kritik}: bu öyle bir z değeridir ki $2\Phi(z) = \alpha = 0{,}01$. Öyleyse Z-tablosuna bakacak olursak $z = \pm 2{,}58$ olarak bulunur.

3. Test istatistiği (H_0 doğru kabul edilir)

$$z_{test} = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{28{,}95 - 27}{5/\sqrt{9}} = 1{,}17$$

4. $P-$**değeri**

$P(Z < -1{,}17 \ veya \ Z > 1{,}17) = 2(1 - \Phi(1{,}17)) = 0{,}242 \nleq \alpha = 0{,}01$ olur.

5. Sonuç

P—değeri önem seviyesinden yeterince küçük değildir. Dolayısıyla alternatif hipotezi destekleyip sıfır hipotezini reddecek kadar güçlü bir delil olmadığı için H_0 ı doğru kabul ederiz.

Örnek 4. Olağandışı bir hava olaylarının hızı standart sapması 8 olan normal dağılıma sahip bir popülasyon oluşturmaktadır. Bu popülasyon içerisinden 44 tane hava olayını örneklem olarak ele alalım. Öyleki. Bu örneklemin ortalaması 5,4 ve standart sapması 7,3023. Önem seviyesi $\alpha = 0{,}05$ olmak üzere bu hava olaylarının hızlarının ortalamasının 3 den büyük olduğu iddiasını test ediniz.

1. Hipotezler:

$H_0: \ \mu = 3$

$H_a: \ \mu > 3$ (test edilecek iddia) ==>. sağ-kuyruklu test

2. z_{kritik}: bu öyle bir z değeridir ki $1 - \Phi(z) = \alpha = 0{,}05$ Öyleyse Z-tablosuna bakacak olursak $z = 1{,}65$ olarak bulunur.

3. Test istatistiği (H_0 **doğru kabul edilir)**

4. $P-$**değeri**

$P(Z > 1{,}99) = 1 - 0{,}9767 = 0{,}0233 < \alpha = 0{,}01$ olur. Bu durumda H_0 ı reddedilir.

Örnek 5. Yeni alınmış bir oto lastiğine vurulacak havanın değerinin 30 psi olması gerekmektedir. Kabul edelimki μ gerçek popülasyon ortalaması olsun. μ nün 30 dan farklı olup olmadığı test edilmek isteniyor. Aşağıdaki test istatistik degerleri için P—değerini bulup $\alpha = 0{,}01$ önem seviyesinde karar veriniz.

a. $z_{test} = 2{,}10$ b. $z_{test} = -1{,}75$ c. $z_{test} = 1{,}41$ d. $z_{test} = -5{,}3$

Örnek 6. Belirli bir markaya ait margarinlerden alınan 16 adet örneklem incelenmiş ve ortalama erime noktası değeri $\bar{X} = 94{,}32$ olarak belirlenmiştir. Kabul edelimki bu margarinin erime noktası $\sigma = 1{,}20$ standart sapmalı bir norma dağılıma sahip olsun. Erime değerinin 95 den farklı olması iddiasını $\alpha = 0{,}01$ önem seviyesinde test ediniz.

Örnek 7. Kabul edelimki psikologların cesaretleri standart sapması 10 olan bir normal dağılıma sahip olsun. Bu popülasyondan 57 psikolog seçerek bir örneklem oluşturulduğunda ortalamsının 34,81 ve standart sapmasının 9,0579 olduğu belirlenmiştir. $\alpha = 0{,}05$ önem seviyesinde popülasyona ait beklenen cesaret seviyesinin 34 den büyük olduğu iddiasını test ediniz.

6.3 T-testi

Literatürde test edilecek hipotezlerin formatlarına göre üç çeşit t-testi vardır.

Tek Örneklemli

Bağımsız Örneklemli

Çiftli Örneklemli

Tek Örneklemli (Basit) t-testi

Popülasyon dağılımının ne tür bir dağılıma sahip olduğunu bilmediğimiz durumlarda eğer örneklem büyüklüğü yeterince büyük degilse, merkezi limit teoremi artık işlevsel olmaz. Bu durumda test istatistiği olarak $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ fonksiyonu kullanılamaz. Tıpkı güven aralıklarında benzer bir durumun üstesinden t-dağılımlarını kullanarak geldiğimiz gibi, buradada örnekler dağılımının t-dağılımına yakınsadığını göz önüne alarak yola devam edeceğiz. Dolayısıyla yeni test istatistiği fonksiyonumuz $T = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ olur.

Hipotezler:

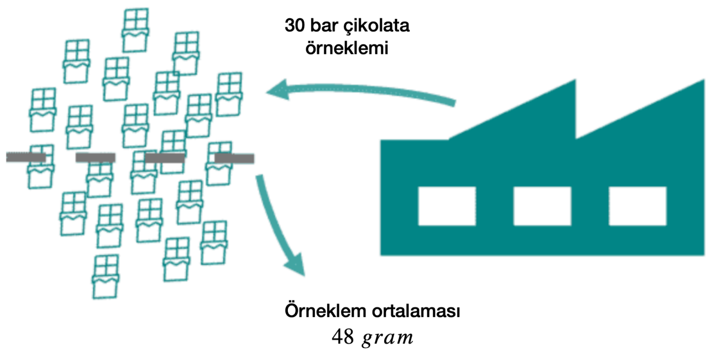
$H_0 : \mu = \mu_0 \longleftarrow$ Örneklem ortalaması ve popülasyon ortalaması arasında büyük bir fark yoktur.
$H_a : \mu > \mu_0 \longleftarrow$ Örneklem ortalaması popülasyon ortalamasından oldukça büyüktür.
$H_a : \mu < \mu_0 \longleftarrow$ Örneklem ortalaması popülasyon ortalamasından oldukça küçüktür.
$H_a : \mu \neq \mu_0 \longleftarrow$ Örneklem ortalaması ve popülasyon ortalaması arasında büyük bir fark vardır.

Önem seviyesi: %1 yada %5 olarak tercih edilir.

Eğer P—değeri $\leq \alpha$ ise, H_0 hipotezi reddedilir, aksi halde kabul edilir.

	Kabul:Örneklem Küçükken (n<30)	
	Sıfır Hipotezi $H_0 : \mu = \mu_0$	**Test İstatistiği** $T = \left\lvert \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \right\rvert$
	Alternatif Hipotez	P-değerinin belirlenmesi
1	$H_a : \mu > \mu_0$ (Sağ-kuyruklu test)	t_{n-1} in sağında kalan alan
2	$H_a : \mu < \mu_0$ (Sol-kuyruklu test)	t_{n-1} in solunda kalan alan
3	$H_a : \mu \neq \mu_0$ (Çift-kuyruklu test)	t_{n-1} eğrisinde $\lvert t \rvert$ nin sağında kalan alanın iki katı

Örnek: Bir çikolata fabrikası üretmiş olduğu çikolata barlarının ortalama ağırlının 50 gram olduğunu söylemektedir. Bu iddiayı doğrulamak için 30 paket çikolata rasgele seçilerek bir örneklem oluşturuluyor. Bu örneklemin ortalamsı 48 gramdır. Örneklem ortalaması ve popülasyon ortalaması arasında büyük bir farkın olup olmadığını test ediniz.



Örnek: Hesap makinesi pilerinin sürekli kullanım ömrünün araştırıldığı bir çalışmada üretim bandından 33 adet pil rasgele bir şekilde seçiliyor. Örneklemin ortalaması 99,5 saat ve varyansı 18,49 saat olarak saptanıyor. %5 lik önem seviyesinde popülasyon ortalamasının 100 saatten az olduğu beklentisini test ediniz.

Örnek: Bir saha çalışmasına göre, bir tür bezelye 10 dönümde 1200 kg ürün vermektedir. Rasgele seçilen 10 tarlada deneme dikimleri yapılmış ve aşağıdaki veri elde edilmiştir:

1430 1260 1370 1090 1370 1200 1140 1200 1260 1310

Bu veri beklentiyi sağılıyor mu?

$n = 10, \bar{X} = 1263,\ s/\sqrt{n} = 34{,}32$ hesap makinesini kullanarak buluruz.

$$t_{test} = \left| \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \right| = \frac{1263{,}1200}{34{,}32} = 1{,}836$$

Hipotezler:

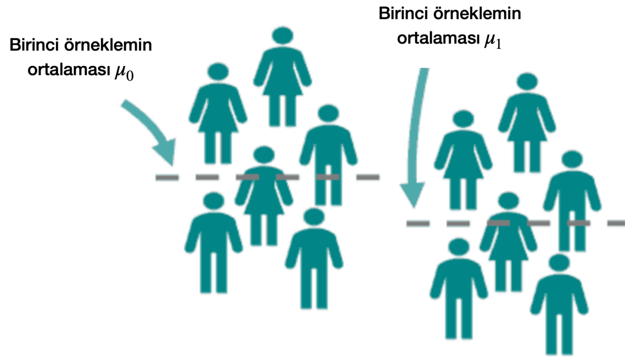
$H_0 : \mu = 1200$ ve. $H_a = \mu \neq 1200$ Çift kuyruklu t-testi

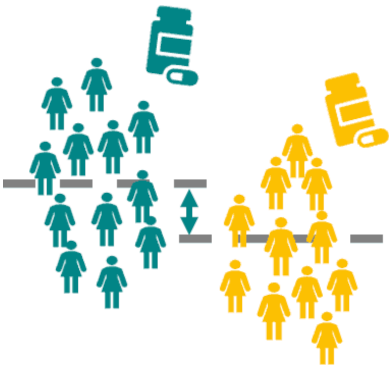
Popülasyon	Pop. standart sapması σ	Örneklem Büyüklüğü	Test
Normal	Biliniyor	Küçük	Z
Normal	Biliniyor	Büyük	Z
Normal	Bilinmiyor	Küçük	T
Normal	Bilinmiyor	Büyük	T, ama Z de olur
~~Normal~~	Fark etmez	Küçük	T
~~Normal~~	Biliniyor	Büyük	Z
~~Normal~~	Bilinmiyor	Büyük	Z, ama T de olur

Sınav buraya kadar mutlaka hesap makinesi getirin.

Bağımsız örneklemler için t-testi

İki grubun yada örneklemin ortalamalarını kıyaslamak istediğimizde bu testi kullanırız.





Örnek: A ve B marka ağrı kesicilerin etkisini incelemek için rasgele bir şekilde 60 kişilik bir grubu iki gruba ayırıyoruz. İlk grup A marka ikinci grupsa B marka ağrı kesiciyi kullanıyor. Bu iki ayrı kesicinin ağrı dindirme etkisi arasında önemli bir farkın olup olmadığını test ediniz.